

5c. 5. Pl. 7.





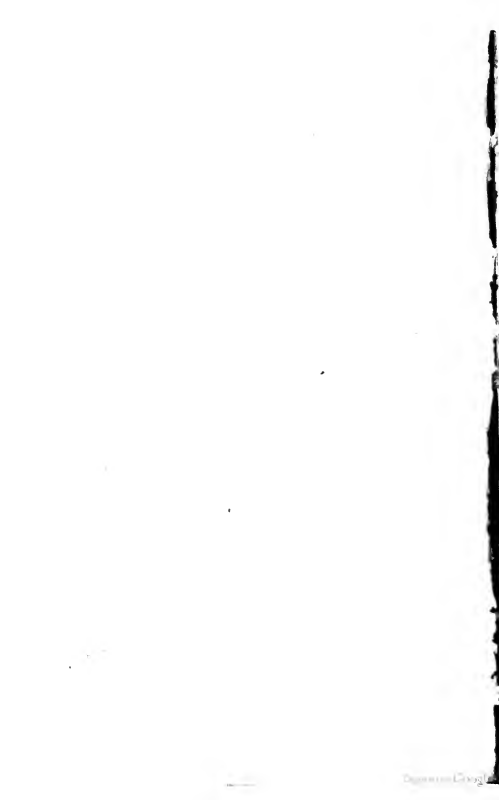


MAG3389

76.



ELEMENTI
DI MATEMATICA



ELEMENTI

D I

MATEMATICA

DEL PROFESSORE

D. TOMMASO MAZZANI



ROMA

TIPOGRAFIA DELLE BELLE ARTI

1845



IMPRIMATUR - Fr. D. Buttaoni O. P. S. P. A. Mag.
IMPRIMATUR - J. Canali Patr. Constantinop. Vicesg.

ALLA GIOVENTÙ STUDIOSA

L' AUTORE

A niun altri che a voi, studiosa gioventù, debbono essere dedicati questi elementi, che sono al vostro uso destinati, e sono scritti da chi da non pochi anni ha ogni cura di voi. Questi elementi vi servono a qualunque scienza vi vogliate applicare. Imperocchè se di tutte le scienze la Logica può dirsi la grammatica, perchè regola e dirige il raziocinio nella ricerca delle loro verità, la Matematica di questa disciplina è continuo esercizio, e pratica. Ma in questi elementi eziandio coloro, che si occupano delle Arti Belle trovano di che giovarsi all'uopo. È loro necessario lo studio della geometria; or que-

sta parte nella presente opera si può studiare senza alcuna cognizione del calcolo , eccetto l'ultimo capo d'ognuna delle sue tre parti, che trattando della misura delle figure richiede il computo. Ciò però non ha che far nulla colle proprietà delle figure geometriche, e colle loro costruzioni, di che solo abbisognano gli artisti anche dei mestieri. Ma sono anche invitati allo studio dei nostri elementi quei giovani , che ai calcoli vogliono darsi della società , e l'uffizio desiderano imprendere di ragionieri. Nella nostra Aritmetica troveranno esposte, e dimostrate tutte le operazioni dell' Aritmetica con rigore , e con semplicità. Troveranno poi di che esercitarsi in ogni sorta di problemi , che possono occorrere nel loro impiego, e questi risolti in varie maniere. Ciò servirà ad aguzzar l'ingegno, e, tolta la materialità del calcolare propria degli aritmetici pratici , a farlo destro e padrone nella risoluzione delle più difficili quistioni. Con che ad un tempo , ed impareranno ciò che loro abbisogna, e si formeranno il criterio a tutto necessario. In ultimo senza quasi avvedersene , e direi per ne-

cessità saranno condotti all'espressioni generali dei numeri , ed a conoscere il bisogno , che hanno di sapere l'Algebra elementare , e ciò per risolvere problemi intralciati, che coll'Algebra , e coi Logaritmi si risolvono in poco d'ora: mentre lungo tempo e noiosa fatica a ciò si richiede nell'Aritmetica pratica.

In questo corso al termine dei capi principali si troveranno esercizi di calcolo da eseguirsi, e di problemi da risolversi, che non si raccomandano mai abbastanza agli studiosi delle matematiche, i quali debbono profondamente penetrare, ed essere franchi nelle loro operazioni. A questo fine ho fatto conoscere l'uso delle tavole logaritmiche, e trigonometriche, ed ho presentate molte applicazioni ai problemi. Si sono poi rettificate alcune idee non giuste, e sono stati cambiati alcuni ragionamenti, che non so come si siano potuti stampare tante volte, e tante volte insegnare senza ravvisarne il paralogismo. Ho procurato , che come le conseguenze vengono dalle premesse, ed una dimostrazione si appoggia alle antecedenti, così una materia desse luogo, e richiedesse un'altra ; e

si vedrà , che ognuna delle quattro parti , in cui ho diviso il calcolo, nasce di necessità dall'antecedente per introdurre mezzi di computo necessarii a risolvere problemi per mancanza di questi lasciati in essa insoluti. Si è fatto di tutto, onde le dimostrazioni oltre all' essere ricavate dall'intrinseco del soggetto fossero prive di artifizii, i quali debbono essere lungi dagli elementi delle matematiche, e debbono essere introdotti quando col progredire si fanno esse più generali, ed astratte. Finalmente ho studiato di esser chiaro. Che poi in tutto ciò sia riuscito voi, o giovani studiosi, lo mostrerete col fatto se servendovi di questi elementi, e studiandoci mostrerete di esservi avvezzi a veder l'intrinseco della scienza , di amare in essa la semplicità e naturalezza , e di aver chiarezza nella vostra mente, e nel vostro discorso. Del resto abbiatevi quest'opera come caparra d'un corso completo di tutte le parti delle Matematiche , che se a Dio piaccia ho divisato di pubblicare.





ARITMETICA



1. *L'unità* è una grandezza, che si fissa per ripeterla, o prenderne parti. Si dice per es. *cinque canne, due settimi di canna*. Qui la canna è unità, perchè si ripete cinque volte, e di essa si prendono le due settime parti. La ripetizione dell'unità si chiama *numero*, e le parti dell'unità si dicono *frazioni dell'unità stessa*.

2. *L'Aritmetica* è la scienza dei numeri, e delle frazioni, che dimostra le proprietà di queste grandezze, o quantità, e dà i metodi per calcolarle: quindi l'Aritmetica ha due parti la prima tratta dei numeri, la seconda delle frazioni.



PARTI PRIMA

DEI NUMERI.

3. Le note, o cifre per rappresentare i numeri sono le seguenti: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, che si leggono: *uno, due, tre, quattro, cinque, sei, sette, otto, nove*. S'intende dire una unità, che è la quantità fissata, due unità, tre unità ec. Si vede chiaro che 1 non è numero, perchè il numero è ripetizione di uno. Quantunque con queste cifre non si possano esprimere i numeri maggiori del nove, pure con esso

per mezzo di una convenzione fatta tra gli Aritmetici si possono esprimere tutti i numeri.

4. Prima però di proporre questa convenzione è da fissare anche per il seguito, che quando diremo a dritta, o a sinistra di una cifra intenderemo dire la parte della cifra, che corrisponde innanzi la dritta, o la sinistra di chi la legge, o la scrive: così scritto per es. il : 3 : la dritta del 3 è dove sono segnati tre punti, e la sinistra dove ne sono segnati due.

5. La convenzione degli Aritmetici, onde colle nove cifre si possano esprimere tutti i numeri, è la seguente. *Le unità di una cifra scritta alla sinistra di un'altra valgono dieci unità di questa.* Si scriva per es. 2; scrivendo poi 32 le unità del 3 sono dieci unità del 2; scrivendo 432 le unità del 4 sono dieci unità del 3, e così di seguito. Così se si scrive il numero 742563, le unità del 3 sono unità semplici, le unità del 6 sono dieci di quelle unità, e si chiamano *decine*, e si leggono sessanta, e così *dieci, venti, trenta, quaranta, cinquanta, settanta, ottanta, novanta*, secondo che invece del 6 vi fosse 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9. Ogni unità del 5 sono dieci decine, e si chiamano *centinaja*, e si legge *cinquecento*. Si leggerebbe *quattrocento, settecento* se vi fossero i numeri 4, 7. Ogni unità del due sono dieci centinaja, che si chiamano *migliaja*, e si legge 2 mila. Si leggerebbe *mille, tre mila, quattro mila*, ec., se invece di 2 vi fosse 1, 3, 4 ec. Ogni unità del 4 sono dieci migliaia, e per queste unità non v'è nome, ma ritengono il proprio di decine di migliaia, e si legge *quarantamila*. Le unità del sette sono *centinaja di migliaia*, e si legge *settecento mila*. Dopo ciò il numero si legge *SETTE CENTO QUARANTA DUE MILA CINQUE CENTO SESSANTA TRE*. Si vede, che con questa convenzione si possono scrivere tutti i numeri per quantunque grandi. Solo si debbono fissare altri nomi per legger questi qualunque numeri. Gli Aritmetici hanno stabilito, che *ad ogni sei cifre si debba cambiare unità*, e

che in ogni seina la prima cifra a dritta esprimendo le unità la seguente a sinistra esprima le decine, l'altra le centinaja, l'altra le migliaia, la quinta le decine di migliaia, e la sesta le centinaja di migliaia. Riguardo alle unità, quelle della prima seina sono le unità semplici, quelle della seconda si chiamano milioni, quelle della terza si chiamano bilioni, quelle della quarta triloni ec.

6. Facile dopo ciò è il leggere qualunque numero, bastando dividerlo con virgole di sei in sei cifre da dritta

a sinistra. Sia il numero $54^2, 217893, 417512^1$. Si legge facilmente 54 BILIONI, 217 MILA, 893 MILIONI, 417 MILA, 512.

7. Se in un numero mancasse qualche cifra decadica o le unità stesse, vi si supplisce scrivendovi la cifra 0, che chiamasi zero, la quale non esprime alcun numero, ma serve per mantenere il posto alle cifre numeriche; questo posto fissa il valore decadico delle cifre, perchè al secondo posto le unità sono decine, al terzo posto sono decine di decine, e così di seguito andando verso sinistra (§. 5.). Quindi se si proponesse a scrivere il numero VENTI TRE MILA E QUATTRO; siccome in questo mancano le centinaja, e le decine, si suppliscono queste con due zeri, ed il numero sarà espresso da 23004. Dopo ciò le cifre del (§. 3.) si chiamano *cifre significative*, perchè esprimono numeri, ciò che non fa la cifra zero.

8. Dal sistema decadico stabilito dagli Aritmetici (§. 5.), si conchiude, che per ogni posto che una cifra in un numero si trasloca da dritta a sinistra diviene essa dieci volte più grande, perchè dieci volte più grandi diventano le sue unità. Se dunque a dritta d'un numero si scrivano uno, due, tre zeri ec. il numero diventerà dieci, cento, mille ec. volte più grande, perchè le cifre sono traslocate a sinistra di uno, di due, di tre ec. posti.

OPERAZIONI SOPRA I NUMERI.

Queste operazioni sono quattro: SOMMA, SOTTRAZIONE, MOLTIPLICAZIONE, E DIVISIONE.

9. *La somma è l'operazione per la quale più numeri si riducono ad uno.* Così quando si dice, che la somma di 2, 3, 4 è 9, i tre numeri dati si riducono ad un solo 9. I numeri semplici facilmente si sommano.

10. Prima di dare il metodo per fare la somma distingueremo i numeri in numeri *semplici*, e numeri *complessi*. I primi sono espressi da una sola cifra, gli altri da più d'una. Inoltre altri sono i numeri *omogenei*, ed altri gli *eterogenei*. I primi ripetono la stessa unità, gli altri diverse unità. Così sono omogenei 5 decine e 7 decine, 8 palmi e 9 palmi: sono poi eterogenei 10 centinaja 8 miagliaja; 11 canne e 2 palmi. *Per sommare i numeri complessi si scrivono l'uno sotto l'altro in guisa, che le cifre dell'unità formino una linea verticale, o come si dice colonna, le decine in colonna, e così sieno disposte le altre cifre dello stesso valore decadico. S'incomincia la somma dalla colonna delle unità, e poi andando a sinistra si fa la somma delle altre colonne. Avendo sommata ciascuna colonna si veggono le decine che entrano nella somma, e queste come tante unità semplici si uniscono alla somma della colonna seguente, non scrivendo sotto la colonna attuale che le unità, le quali non arrivano a dare una decina.*

$$\begin{array}{r}
 45674 \\
 60724 \\
 5605 \\
 9324 \\
 \hline
 121327 \\
 \hline
 22110
 \end{array}$$

Nel nostro esempio la somma della colonna delle unità ci dà 17, in questo vi è una decina, e di più sette unità, si

scrive il 7 sotto la colonna delle unità, e la decina si porta nella somma della colonna seguente, che tutto insieme ci darà 12; si segnerà 2, e si porterà uno nella somma della terza colonna, e così di seguito; quindi il risultamento, o la somma sarà 121327. La ragione per cui le unità si scrivono sotto le unità, le decine sotto le decine in tante colonne è, che la somma non si può eseguire, che fra numeri omogenei, perchè non si potrebbe fare un sol numero, cioè ripetizione di una unità colla somma ex. gr. di 7 decine con 9 centinaia. Avendo disposti i numeri omogenei in colonna, sommando le colonne si sommano i numeri omogenei. Tutte le dieci unità poi di una colonna sono tante unità da portarsi nella colonna seguente a sinistra pel sistema decadico (§. 5.)

11. Per far la prova, o per vedere se il risultamento sia giusto si farà la somma a rovescio dalla prima colonna a sinistra, e la somma d'ogni colonna si sottrarrà dalla cifra sottoposta del risultamento. Se ognuna di queste cifre fosse precisamente la somma della colonna superiore in ognuna delle indicate sottrazioni si troverebbe zero. Ma poichè accade, che vi possono essere le unità portate dalla colonna seguente a dritta, dalla sottrazione indicata rimarrà il residuo, che saranno queste unità, le quali come tanti dieci si aggiungeranno alla cifra seguente del risultamento prima di sottrarvi la somma della colonna superiore; dopo ciò l'indizio, che la somma avuta sia giusta si avrà quando troveremo zero dalla sottrazione della colonna delle unità fatta dalla cifra inferiore del risultamento, perchè a questa sola nulla si aggiunge per somma di colonna seguente, che non v'è.

Nel nostro esempio la somma della prima colonna a sinistra dà 10, che sottratto da 12 dà il residuo 2, che si segna per portarlo come 20 alla cifra seguente 1. La somma dell'altra colonna è 19 che tolta da 21 ci dà 2. La somma della terza colonna è 22, che tolta da 23 dà 1. La

somma della quarta è 11, che tolta da 12 dà 1. Finalmente tolto 17, somma dell'ultima colonna, da 17 abbiamo zero.

12. *La sottrazione è un'operazione, per la quale si trova la differenza fra due numeri, o si trova di quanto un numero è maggiore o minore di un'altro. La sottrazione si eseguisce togliendo il numero minore dal maggiore. Il maggior numero si chiama minuendo, il minore minutore, e il risultamento dell'operazione si dice residuo, o resto. Per eseguire la sottrazione di due numeri complessi, si pongono l'uno sotto l'altro, come nella somma (§. 10.). Fatto ciò, cominciando dalla colonna delle unità, dalla cifra superiore si toglie l'inferiore. Se avvenga, che l'inferiore sia maggiore della superiore, a questa si aggiunge un dieci, che è l'unità, che si toglie dalla cifra seguente a sinistra, che appunto val dieci pel sistema decadico (§. 5.). Con questa aggiunta la sottrazione sarà sempre eseguibile, non potendo mai giungere al dieci il valore della cifra inferiore, perchè la maggior cifra è 9. Se finalmente avvenga, che nel minuendo vi sia più di un zero di seguito, e che dall'ultimo a dritta si debba sottrarre una cifra significativa, in tal caso quest'ultimo zero si suppone dieci, tutti gli altri a sinistra si suppongono nove, e s'intende diminuita d'un'unità la prima cifra significativa, che s'incontra a sinistra delli zeri. Che se la prima cifra dopo l'ultimo zero a dritta nella sottrazione abbia avuto bisogno di un dieci, allora quell'ultimo zero si suppone nove. La ragione di ciò è chiara. L'unità che si toglie alla prima cifra significativa prima delli zeri a sinistra nel primo zero diventa dieci, si lascia nove, e la decima unità portata nell'altro zero diventa dieci, si lascia nove, e come innanzi il zero seguente diventa dieci, e così di seguito fino all'ultimo zero, che sarà dieci, o nove, se una unità debba dare alla cifra seguente. Ecco l'esempio.*

170024670027

32457432815

 137567237212

In questo si vede, che l'ultimo dei zeri a dritta è dieci, perchè nulla dà al 2, che l'altro è nove, e che la prima cifra, che s'incontra 7 è stata diminuita di un'unità. Negli altri due zeri, che s'incontrano a sinistra il primo è stato valutato nove perchè ha dato un'unità alla cifra seguente 2 per poter sottrarre il 5. Nella sottrazione si fa la stessa disposizione dei numeri che nella somma, e ciò per la stessa ragione, che la sottrazione si fa sempre fra numeri omogenei. Non si potrebbe mai sottrarre per esempio da 12 decine 8 centinaia, perchè il residuo non potrebbesi esprimere per alcuna di queste due unità.

13. *La prova della sottrazione è di sommare il residuo col minutore, che se questo sia giusto deve tornare il minuendo.* In fatti il residuo è di quanto il minutore è al di sotto del minuendo, dunque se gli si aggiunga questo residuo deve arrivare al minuendo.

14. *La moltiplicazione di un numero per un'altro è la ripetizione del primo tante volte quante sono le unità nel secondo.* Il primo numero si chiama *moltiplicando*, il secondo *moltiplicatore*, ed il risultamento si dice *prodotto*, ed i due numeri, che si moltiplicano si chiamano *fattori* del prodotto.

Per eseguire la moltiplicazione dei numeri complessi si debbono sapere a mente i prodotti delle cifre a due a due, cosa facilissima. Quando ciò si sappia i due numeri complessi dati a moltiplicarsi si scrivono l'uno sotto l'altro come nella somma. Ciò fatto s'incomincia a moltiplicare tutto il moltiplicando per la cifra delle unità del moltiplicatore. In ogni prodotto si ritengono le decine, che si ottengono, e si portano come altrettante unità nel prodotto seguente, e si scrivono solo le unità del prodotto, che non giungono alla decina. Colla stessa regola si moltiplicherà successivamente il multi-

plicando per tutte le cifre del moltiplicatore andando verso sinistra; li parziali prodotti poi si scrivono così, che la prima cifra di ogni prodotto sia verticalmente sotto la cifra moltiplicatrice, e le altre di seguito a sinistra in guisa da far colonna colle cifre superiori; finalmente si sommano i parziali prodotti. Nell'esempio qui innanzi

$$\begin{array}{r}
 4359 \\
 867 \\
 \hline
 30513 \\
 26154 \\
 34872 \\
 \hline
 3779253
 \end{array}$$

prima si è moltiplicato il moltiplicando 4359 per 7, poi per 6, in ultimo per 8, e li prodotti parziali 30513, 26154, 34872 si sono scritti così che la prima cifra del primo prodotto è sotto la sua cifra moltiplicatrice 7; la prima cifra 4 del secondo prodotto è verticalmente sotto la sua cifra moltiplicatrice 6; e così il 2 dell'ultimo prodotto è sotto la cifra 8 del moltiplicatore. La ragione di cotal collocamento è la seguente. Ogni cifra moltiplicatrice alla prima cifra del moltiplicando, che è delle unità dà il suo valore decadico: per esempio il moltiplicatore 8 che sono 8 centinaja rende il prodotto di 9 per 8, 72 centinaja, dunque il due che si segna sono 2 centinaja, dunque dev'esser posto nella colonna delle centinaja, che si trova sotto la cifra moltiplicatrice 8. In genere la cifra moltiplicatrice dando al suo prodotto per le unità del moltiplicando il suo valore decadico gli deve dare il suo posto: perchè è da fissarsi che il posto (§. 5.) in un numero dà alle cifre il valore decadico. È poi troppo chiaro, che i seguenti prodotti di dieci in dieci volte maggiori debbano essere successivamente collocati a sinistra sotto le seguenti colonne.

15. Se avvenga, che o uno, o ambedue i fattori siano terminati da zeri, questi si tolgano, si faccia il prodotto dei fattori risultanti, ed al termine di questo prodotto si aggiungano tutti gli zeri trascurati. Si debba per es. moltiplicare 72000 per 200; si moltiplichino 72 per 2, ed al prodotto 144 si aggiungano i cinque zeri, ed avremo 14400000. Infatti togliendo i due zeri a 200 è diventato cento volte minore; togliendo i tre zeri a 72000 è diventato mille volte più piccolo: dunque moltiplicando 72 per 2 si è moltiplicato un numero mille volte minore per un altro cento volte minore del vero: dunque il prodotto 144 è centomila volte minore del vero; per riportarlo al giusto deve rendersi cento mila volte maggiore, perciò la prima cifra 4 deve occupare il sesto posto (§. 5.), ciò che accaderà coll'aggiunta dei cinque zeri.

16. Si dice comunemente, che nella moltiplicazione si possano scambiare i due fattori in guisa che tanto è moltiplicare per es. 23 per 14, quanto 14 per 23: ma ciò è bene di dimostrare. Siano scritti come qui innanzi ad ugual distanza in linea retta 5 punti, e questi siano ripetuti sei volte così, che si veggano posti in linee verticali come A C



È facile il vedere, che il total numero dei punti si ottiene tanto^a ripetendo i punti della linea AB pel numero dei punti AC, quanto viceversa ripetendo i punti della linea AC pel numero dei punti della linea AB: ma nel primo caso si moltiplica 5 per 6, e nel secondo 6 per 5; dunque due

fattori della moltiplicazione si possono scambiare nell'eseguire l'operazione.

17. *La Divisione è un'operazione, per la quale si cerca quante volte un numero entra in un altro.* Il numero che deve entrare si chiama *divisore*, quello nel quale entra si chiama *dividendo*, ed il risultamento dell'operazione, ossia quante volte il primo numero entra nel secondo si chiama *quoto*, o *quoziente*. Si debba divider 24 per 6 il quoto sarà 4, perchè il 6 entra quattro volte nel 24.

18. È facile il vedere che il 4 è la sesta parte del 24, perchè il 4 ripetuto 6 volte dà 24: dunque colla nostra divisione abbiamo ottenuto anche nel quoto una parte del dividendo espressa dal divisore, cioè sesta parte; dunque *il quoto esprime quante volte il divisore entra nel dividendo*, ed ancora *una parte del dividendo di natura espressa dal divisore*, cioè parte sesta, settima, ventesima, centocinquantesima ec., secondo che il divisore è 6, 7, 20, 150 ec. Anzi in questo secondo senso l'operazione si chiama *divisione*, che vorrebbe dire nel caso nostro dividere il 24 in 6 parti, e la risposta è, che ognuna di queste parti vale 4.

19. Esprimendo il quoto quante volte il divisore entra nel dividendo, se il divisore si ripete queste volte, o se si moltiplica pel quoto deve dare il dividendo. Ciò s'intende se il divisore entra esattamente nel dividendo, perchè se vi sia un residuo, onde il prodotto del divisore pel quoto uguagli il dividendo, è necessario aggiungergli quel residuo.

20. La divisione altra è semplice, altra composta. La composta è quella, nella quale il divisore ha più d'una cifra. Semplice si dice quella, nella quale il divisore è di una sola cifra: qui sotto è l'esempio per cotali divisioni. Si debba dividere 1756794 per 9.

$$\begin{array}{r}
 1756794 \\
 9 \overline{) 1756794} \\
 \hline
 195199 + \frac{3}{9}
 \end{array}$$

La divisione s'incomincia dalla cifra più alta, e si dice il 9 nel 17 entra una volta, ed avanza 8. Quest'8 portato nella cifra seguente 5 dà 85, dunque si deve dividere 85 per 9, il quoto sarà 9 con un residuo 4, che sul 6 darà 46, che diviso per 9 ci darà 5 con un residuo 1. Il 17 diviso per 9 dà 1. L'89 diviso per 9 dà 9. L'84 diviso per 9 dà 9 con un residuo 3, che non potendosi dividere per 9, e intanto dovendosi esprimere la divisione, si scriverà $+\frac{3}{9}$,

che vuol dire, più tre diviso per nove; perchè ad esprimere la divisione gli Aritmetici pongono il divisore sotto il dividendo interposta una linea orizzontale come nel nostro caso, o scrivendo il divisore dopo il dividendo interposti due punti verticali, nel nostro caso 3:9. Di qui la seguente regola per la divisione semplice. *Si scrive il divisore sotto la prima cifra a sinistra del dividendo, poi si divide pel divisore questa prima cifra, o la prima, e la seguente insieme se in quella non vi entra: si segna il quoto, e le unità del residuo, se vi sono, si portano come tante decine nella cifra seguente, e tutto questo si divide pel divisore; il nuovo resto ridotto a tante decine si porta alla cifra seguente, e si fa la divisione: finalmente l'ultimo resto se vi è, si esprime diviso pel divisore o colla lineola, o coi due punti come si è detto. Se qualche divisione parziale non si potesse eseguire si scrive zero nel quoto, e tutta la cifra, che non si divide ridotta a tante decine si aggiunge alla cifra seguente.*

21. Andiamo alla divisione composta. Si debba dividere 23459673 per 359. Si scrivono i due numeri come qui innanzi

$$\begin{array}{r}
 2345,9573 \quad | \quad 359 \\
 \underline{1919} \\
 1245 \\
 \underline{1687} \\
 2513 \\
 \underline{0000}
 \end{array}$$

Nel dividendo, cominciando dalla cifra più alta, si prenda una parte, nella quale possa entrare il divisore. Nel nostro caso si vede, che tre cifre non bastano, perchè quantunque il divisore abbia tre cifre la sua prima è maggiore della prima del dividendo. Con una virgola dunque si separeranno le prime cifre nel dividendo. Si cerca dunque di vedere quante volte il 359 entri nella prima parte 2345 del dividendo. Per riuscirvi indagheremo quante volte le cifre del divisore entrino nelle corrispondenti decadiche del dividendo: ma per dire che tutto il divisore entra un numero di volte nel dividendo è necessario, che lo stesso numero di volte le parziali cifre del divisore entrino nelle corrispondenti del dividendo. S'incomincerà dunque a dire il 3 nel 23 entra 7 volte con un residuo 2, che deve portarsi sul 4, e che darà 24: ma il 5 nel 24 non entra 7 volte: dunque diremo che il 3 nel 23 entra 6 volte, allora il 5 nel 54 entra 6 volte con un residuo 24, che portato sul 9 vedesi, che in esso entrerà pure 6 volte il 9 del divisore; si scrive questo quoto 6 sotto il divisore. Sapendosi che il 359 in 2345 entra 6 volte, il 359 ripetuto 6 volte, o moltiplicato per 6 dovrà togliersi dal dividendo per proseguire a veder quante volte il divisor dato entra nel resto del proposto dividendo. La sottrazione si può abbreviare dicendo 9 per 6 da 54, per sottrarlo dal 5 gli si aggiunge un 50, e si dice da 55 tolto 54 abbiamo 1. Il 5 per 6 dà 30: per compensare il 50 dato al 5 cresceremo di 5 unità questo 30 da togliersi dalla cifra seguente 4, perchè in questa cifra le 50 unità seguenti valgono 5, ed è lo stesso che il 4 si diminuisca di 5, o che gli si tolgano di più questi 5 nella sottrazione del 30. Qui ancora non potendosi togliere 35 da 4, si dirà 35 da 44 il residuo sarà 9. Il 3 per 6 dà 18, cui aggiunto il 4, si sottrarrà il 22 da 23, ed avremo 1.

Accanto al residuo 191 si cali la cifra 9 del dividendo, e si dirà il 3 nel 19 entra 6, ma il 5 nell'11 non en-

tra tanto, si dirà dunque il 3 nel 19 entra 5 volte, ed il 5 nel 41 entra 5 volte con assai buon residuo; dunque il quoto sarà 5. Il 9 per 5 dà 45, che tolto da 49 dà 4, il 5 per 5 dà 25 e 4 dà 29, che tolto da 31 ci lascia 2. Il 3 per 5 dà 15 col 3 dà 18, che tolto da 19 lascia 1. Si vada così innanzi finchè si troverà il quoto 65347 con un residuo di 200.

Ecco la regola generale per la divisione composta. *Scritto il dividendo, ed il divisore come nel nostro esempio, si separino nel primo da sinistra a dritta tante cifre, onde il divisore entri nel numero, che esse esprimono, e queste saranno tante quante quelle del divisore, o una di più. Si vegga poi quante volte la prima cifra del divisore entri nella prima, o nelle due prime del dividendo: prima però di scrivere il quoto si vegga se altrettante volte entrino le seguenti cifre del divisore nelle corrispondenti decadiche del dividendo, che se vi entrino meno volte, si diminuisca così il primo quoto, che il residuo del prodotto di questo quoto per la prima cifra del divisore tolto dalla prima o prime del dividendo, e ridotto a decime ingrandisca tanto le cifre seguenti dello stesso dividendo, che divise per le corrispondenti del divisore si possa avere per tutte lo stesso primo quoto. Si scriva allora questo nel posto del quoto, e per questo moltiplicato il divisore, il prodotto si tolga dalla parte separata del dividendo. Accanto al residuo si cali la cifra del dividendo, che si trova dopo la detta parte separata, e in questa nuova parte del dividendo si eseguisca la divisione come nella prima: di nuovo il secondo quoto si moltiplichi pel divisore, ed il prodotto si sottragga dall'attuale dividendo, ed accanto al residuo calata la cifra del dividendo che è dopo quella calata antecedentemente si prosegua la divisione, come nei due casi antecedenti. Se calata la cifra qualche divisione non si potesse eseguire si scriva zero nel quoto, si cali un'altra cifra nel residuo, e si prosegua la divisione.*

22. È da fissarsi, che il divisore nelle successive parti del dividendo non può entrare più di 9 volte. Supponiamo

in fatti, che vi potesse entrare 10 volte. O il numero delle cifre del dividendo uguaglia il numero delle cifre del divisore, ed in tal caso, moltiplicando il divisore per 10 coll'aggiungergli lo zero, il prodotto avrebbe una cifra di più del dividendo, indizio che il divisore non può entrare 10 volte nel dividendo. O il numero delle cifre del dividendo supera quello delle cifre del divisore, e ciò avviene perchè alcuna delle prime cifre del divisore supera la corrispondente decadica del dividendo come nel nostro caso del 359 relativamente al 2345. In tal caso moltiplicando il divisore per 10 il prodotto avrà tante cifre quante sono quelle del dividendo, ma ne sarà maggiore, perchè alcuna delle sue cifre supererà la corrispondente del dividendo.

Ora se tutto il divisore non potrà entrare in tutto il dividendo più di 9 volte, per la stessa ragione più di 9 volte non potrà entrare ciascuna cifra del divisore nella corrispondente decadica del dividendo, perchè questo comun quoto delle cifre è il quoto di tutto il dividendo pel divisore.

23. Se si sbagliasse nei quoti parziali dalle moltiplicazioni si conoscerebbe subito l'errore. Perchè se il quoto è troppo forte moltiplicato per esso il divisore il prodotto supererebbe il dividendo, e non si potrebbe togliere: se poi fosse minore del vero, questo prodotto sottratto dal dividendo darebbe il residuo, nel quale entrerebbe ancora il divisore.

24. La prova della moltiplicazione è la divisione. In fatti il prodotto essendo il moltiplicando ripetuto tante volte quante sono le unità del moltiplicatore, il moltiplicando entra nel prodotto tutte queste unità di volte: dunque diviso il prodotto per il moltiplicando il quoto dovrà essere il moltiplicatore; e perchè scambiando i fattori si ottiene il medesimo prodotto (§. 16.) dividendo pure il prodotto pel moltiplicatore deve venire per quoto il moltiplicando. Ecco dunque la prova della moltiplicazione. *Si dividerà il prodotto per uno dei due fattori, e se l'operazione si sia bene eseguita, il quoto dovrà essere l'altro fattore.*

PARTE SECONDA

DELLE FRAZIONI.



25. La frazione è una parte dell'unità; così due quinti di scudo, tre settimi di canna sono frazioni dello scudo e della canna.

La prima cosa che si deve eseguire nelle frazioni è scriverle. Le frazioni si scrivono in quel modo, che esprimiamo le divisioni inseguebili a causa, che il dividendo è minore del divisore. Se si dovesse esprimere due canne diviso per tre si scriverebbe $\frac{2}{3}$. Ora dico che così si esprime due terzi di canna. Se si dovesse dividere 3 palmi per 7 si scriverebbe $\frac{3}{7}$ e questo esprime anche i 3 settimi di palmo.

Per provarlo ecco il ragionamento. Tanto è dividere le due canne per 3, che dividere parzialmente le due unità canne per tre: ora l'unità divisa per 3 dà la sua terza parte, dunque le due unità parzialmente divise per 3 daranno due terze parti, o due terzi della canna. Così nel secondo caso tanto è dividere i tre palmi insieme per sette, che ciascun palmo per sette, ma ogni palmo diviso per sette, dà il settimo di un palmo, dunque i tre palmi daranno tre settimi di palmo.

Dunque l'espressioni $\frac{5}{9}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{5}{8}$ riferendole alla canna ci esprimeranno i cinque noni, i sette dodicesimi, i cinque ottavi della canna.

26. Analizzando l'espressione cinque noni di canna si vede, che indica, la canna doversi dividere in 9 parti, che si chiamano noni, e doversi prendere 5 di queste parti.

Così $\frac{7}{12}$ o sette dodicesimi di palmo vuol dire, che il palmo si divide in dodici parti, che si chiamano dodicesimi, e di queste parti si prendono sette. Dunque nelle frazioni la quantità inferiore, o il divisore esprime in quante parti uguali si deve dividere l'unità, cui si riferisce la frazione, o di cui è frazione, e dà il nome a queste parti; il dividendo poi indica quante di queste parti si prendono: perciò nelle frazioni il divisore si chiama *Denominatore*, perchè dà il nome alle parti frazionarie, ed il dividendo si chiama *Numeratore*, perchè numera le parti frazionarie da prendersi.

27. Dopo ciò la frazione ancora prende l'aspetto di numero, se si consideri il denominatore come quello, che dà l'unità frazionaria, ed il numeratore quello, che la ripete. Così come cinque scudi è numero perchè ripete l'unità scu-

do, così $\frac{5}{8}$ di scudo è numero, se si considera l'ottavo di scudo come unità ripetuta cinque volte dal numeratore.

28. Ciò posto cominciamo i teoremi sulle frazioni:

I. Duplicandosi, triplicandosi il denominatore d'una frazione il suo valore diviene due, tre ec. volte più piccolo, ossia la frazione si divide per due per tre ec., perchè appunto colla divisione per 2 per 3 ec. se ne prende la metà la terza parte (§. 18.). Infatti il denominatore esprime in quante parti eguali si divide l'unità, dunque prendendone il doppio, il triplo ec. l'unità si spezza in un numero doppio triplo ec. di parti: dunque ciascuna parte diviene due, tre ec. volte più piccola, e perciò altrettante volte più piccolo diventa il valore della frazione.

II. Duplicandosi, triplicandosi ec. il numeratore di una frazione, essa diventa due, tre ec. volte maggiore, ossia la frazione è moltiplicata per due, tre ec. Infatti il numeratore indica il numero delle parti, che si prende, dunque raddoppiandosi, triplicandosi ec. si prende un numero dop-

pio triplo ec. delle stesse parti, onde si raddoppia si triplica ec. il valore della frazione.

III. Dividendo il denominatore per due per tre ec. il valore della frazione diventa due tre ec. volte maggiore, e perciò la frazione è moltiplicata per due per tre ec. Infatti dividendo il denominatore per due per tre ec., il suo valore diventa due tre ec. volte minore, dunque l'unità si spezza in un numero due tre ec. volte minore di parti, onde ciascuna diventa due tre ec. volte maggiore, e tale diventa anche la frazione.

IV. Dividendo il numeratore per due per tre ec. il valore della frazione diventa due tre ec. volte minore, e perciò la frazione si divide per due per tre ec. Ciò è chiaro perchè del numero delle stesse parti si prende la metà, il terzo ec.

29. Riunendo i due primi teoremi si ricava, che moltiplicandosi i due termini di una frazione per uno stesso numero il valore della frazione non cambia; poichè moltiplicandosi p. e. per 4 il numeratore il valore della frazione diventa quattro volte maggiore, moltiplicandosi poi per 4 il denominatore la frazione diventa quattro volte minore, con che si compensa l'errore della prima moltiplicazione.

30. Riunendo il terzo, e quarto teorema con raziocinio analogo si proverà, che il valore d'una frazione non cambia se si dividono i suoi due termini per uno stesso numero.

31. Riunendo il primo ed il quarto teorema si ricava, che in due modi si può dividere una frazione per un intero, o moltiplicando il denominatore per l'intero, o dividendo per l'intero il numeratore. Così avendosi da dividere la frazione $\frac{6}{13}$ per due si avrà $\frac{3}{13}$, dividendo cioè

il numeratore per due, o $\frac{6}{26}$ moltiplicando il denomi-

natore per due. Si avverta però, che di questi due metodi di divisione si deve scegliere il secondo, quando cioè il numeratore sia capace di esatta divisione, perchè in quel modo si semplifica la frazione, mentre che nell'altro si rende complicata.

32. Riunendo il secondo ed il terzo teorema si ricava, che in due modi si può moltiplicare una frazione per un intero, o dividendo per l'intero il denominatore, o per l'intero moltiplicando il suo numeratore. Così p. e. se si dovesse moltiplicare $\frac{5}{12}$ per 4 si potrebbe avere $\frac{20}{12}$, o $\frac{5}{3}$. Si deve preferire quando si può la divisione per la ragione addotta di sopra.

33. La seconda conseguenza (§.30.) di potersi dividere i due termini d'una frazione per uno stesso numero senza cambiamento del valore della frazione serve, quando si possa, per semplificare le frazioni. Così se fosse $\frac{27}{81}$, vedendo che i due termini sono divisibili per 27, fatta la divisione si avrebbe la semplice frazione $\frac{1}{3}$.

34. La prima conseguenza (§.29.) riguardante la moltiplicazione dei due termini d'una frazione, serve a ridurre le frazioni allo stesso denominatore. Siano p. e. le frazioni $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{5}{7}$. *Le frazioni si riducano allo stesso denominatore moltiplicando i due termini di ciascuna per tutti i denominatori delle altre.* Così i due termini 1, 2 della prima si moltiplicano per 3 per 7, d'onde viene $\frac{21}{42}$. I due termini 2, 3 della seconda si moltiplicano per 2 per 7, e così si ha $\frac{28}{42}$, ed i due termini 5, 7 si moltiplicano per 2 e per 3, e così si ha $\frac{30}{42}$.

Questo metodo riduce le frazioni allo stesso denominatore, perchè in fondo il denominatore, che viene, essendo il prodotto dell'attuale per tutti gli altri, è sempre il prodotto di tutti i denominatori.

Questo metodo poi non cambia il valore delle frazioni, perchè sempre i due termini di ciascuna si moltiplicano per lo stesso numero, che è il prodotto degli altri denominatori.

35. Il metodo dato di ridurre le frazioni allo stesso denominatore si semplifica in due casi: primo quando tutti i denominatori entrino esattamente in uno di loro; secondo quando entrino esattamente in un numero, che si può immaginare. Siano le frazioni

$$\frac{1}{3} \quad \frac{2}{7} \quad \frac{4}{21} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{13}{42}$$

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{7}{10} \quad \frac{11}{12}$$

Nella prima serie di frazioni si vede, che tutti i denominatori entrano esattamente in uno di loro, che è il 42. Nell'altra serie si vede, che i denominatori entrano nel 60. Nel primo caso ciascuna frazione si riduce allo stesso denominatore, che è il più grande, moltiplicando i suoi due termini pel quoto di questo denominatore più grande diviso pel denominatore dell'attuale frazione. Così nella prima il suo denominatore 3 entra nel più grande 42 14 volte; si moltiplichino i due termini di $\frac{1}{3}$ per 14. Nella seconda

frazione $\frac{2}{7}$ il 7 nel 42 entra 6 volte, si moltiplichino i

due termini di $\frac{2}{7}$ per 6. Così la prima serie si ridurrà a

$$\frac{14}{42}, \frac{12}{42}, \frac{8}{42}, \frac{21}{42}, \frac{13}{42}$$

Nell' altra serie si divida il numero immaginato 60 per ciascun denominatore, e per i quoti si moltiplichino i due termini delle frazioni, alli quali i detti quoti appartengono. I quoti di 60 per i denominatori 2, 5, 3, 4, 10, 12 sono 30, 12, 20, 15, 6, 5 dunque le frazioni saranno

$$\frac{30}{60}, \frac{12}{60}, \frac{40}{60}, \frac{45}{60}, \frac{42}{60}, \frac{55}{60}$$

36. La riduzione delle frazioni allo stesso denominatore serve per paragonare il loro valore, onde giudicarne la maggiore, o minore; perchè delle frazioni ridotte allo stesso denominatore la maggiore è quella, che ha più gran numeratore, e ciò perchè delle stesse unità frazionarie ne numererà più. Così dandosi le frazioni $\frac{5}{9}$ $\frac{7}{8}$ $\frac{3}{7}$, ridotte queste allo stesso denominatore abbiamo $\frac{280}{504}$, $\frac{441}{504}$, $\frac{216}{504}$, delle quali la maggiore è la seconda, dunque delle proposte la maggiore è $\frac{7}{8}$.

37. La riduzione delle frazioni allo stesso denominatore serve anche per la somma e sottrazione.

Se le frazioni sono di diverso denominatore non si possono nè sommare nè sottrarre, perchè i denominatori esprimendo le unità frazionarie (§. 27.), e non si possono sommare i numeri di diverse unità; e infatti li settimi non si possono sommare coi quarti, coi noni.

Quando poi le frazioni sono ridotte allo stesso denominatore *la somma, e la sottrazione si eseguiscono fra i numeratori, perchè questi sono veramente i numeri delle unità frazionarie da sommarsi e sottrarsi, e si scrive sotto il risultamento il denominatore comune.*

Se si dovessero sommare le frazioni di sopra proposte (§. 36.), ridotte esse allo stesso denominatore, si debbono

sommare $\frac{280}{504}$, $\frac{441}{504}$, $\frac{216}{504}$, ossia si debbano sommare

i numeri 280, 441, 216; quindi avremo $\frac{937}{504}$. Questa fra-

zione, nella quale il numeratore non è minore del denominatore si dice *frazione falsa*, o *spuria*, perchè non esprime parte dell'unità (§. 25.), ma da un'unità colla divisione del numeratore pel denominatore, che dobbiamo ricordarci (§. 25.) essere il dividendo diviso pel divisore. Fatta

questa divisione invece di $\frac{937}{504}$ avremo $1 + \frac{433}{504}$.

38. Se da $\frac{7}{8}$ si deve togliere $\frac{5}{9}$ si riducono allo stesso denominatore; ciò fatto da $\frac{63}{72}$ si dovrà togliere $\frac{40}{72}$, ed il residuo sarà $\frac{23}{72}$.

Può avvenire che nella somma o sottrazione vi sia qualche intero, allora posta l'unità sotto l'intero, e ridotto così all'aspetto frazionario, si riducono tutte le frazioni allo stesso denominatore col metodo dato. Così se 3, e $\frac{5}{7}$ si dovessero sommare, il 3 si ponga in forma frazionaria $\frac{3}{1}$, e si riduca allo stesso denominatore con $\frac{5}{7}$, avremo da sommare $\frac{21}{7}$ con $\frac{5}{7}$, e sarà $\frac{26}{7}$.

39. Nella moltiplicazione non v'è che un sol caso, cioè la moltiplicazione di una frazione per un intero, perchè non si moltiplica mai per un fratto. Infatti moltiplicare vuol dire ripetere, e non si ripete mai un numero p. e., due quinte volte; ma due, o cinque volte.

Riguardo poi alla moltiplicazione di una frazione per un intero abbiamo veduto (§. 32.), che si eseguisce in due modi,



o moltiplicando il numeratore per l'intero, o, quando si può, dividendo il denominatore per l'intero.

40. Andiamo alla divisione. Qui veramente si danno tre casi. 1.° Divisione di una frazione per un intero. 2.° Divisione di un intero per una frazione. 3.° Divisione di una frazione per una frazione.

Il primo caso si sa eseguire, e ciò in due modi, come si è veduto (§. 31.), o dividendo il numeratore, o moltiplicando il denominatore per l'intero.

41. Nel secondo caso sia da dividersi 5 per $\frac{7}{8}$. Divido il 5 per 7, ed avrò $\frac{5}{7}$; ma 7 è otto volte maggiore di $\frac{7}{8}$, che è l'ottavo di 7, dunque il 5 si è diviso per un numero otto volte maggiore del vero, dunque il quoto $\frac{5}{7}$ è otto volte più piccolo del vero. Per correggere l'errore si moltiplicherà $\frac{5}{7}$ per 8, ed il quoto sarà $\frac{40}{7}$.

42. Nel terzo caso sia da dividersi $\frac{7}{9}$ per $\frac{4}{5}$. Si divida $\frac{7}{9}$ per 4 avremo (§. 40.) $\frac{7}{36}$; ma 4 è 5 volte maggiore di $\frac{4}{5}$, dunque $\frac{7}{36}$ è 5 volte minore del vero, dunque $\frac{35}{36}$ è il giusto quoto.

43. Questi tre casi si eseguiscano con una sola regola pratica. *Se vi sarà intero gli si dia aspetto frazionario dividendolo per l'unità. S'intende poi rovesciata la frazione divisore, e si moltiplichino numeratore con numeratore, e denominatore con denominatore.* Così nel terzo caso rovesciato il divisore $\frac{4}{5}$ si moltiplicano fra loro i numeratori 7, 5, ed i denominatori 9, 4, ed il quoto delle frazioni proposte sarà $\frac{35}{36}$.

44. I due ultimi casi della divisione si possono dimostrare in altro modo stabilendo un principio, che potrà servirci in appresso. Il principio è questo. Il quoto di due numeri della stessa unità è indipendente da questa. Infatti per esempio le 5 canne entrano in 20 canne come 5 palmi in 20 palmi. Di qui viene, che il quoto di due frazioni dello stesso denominatore si trova dividendo i numeratori, perchè questo denominatore (§. 27.) esprime l'unità frazionaria comune ripetuta dai due numeratori.

Ciò posto riprendiamo i due esempi $5 : \frac{7}{8} ; \frac{7}{9} : \frac{4}{5}$.

Riduendo allo stesso denominatore in ciascun caso si dovrà dividere $\frac{40}{8}$ per $\frac{7}{8}$; $\frac{35}{45}$ per $\frac{36}{45}$, ossia si dovrà dividere 40 per 7, e 35 per 36, ed i quoti saranno $\frac{40}{7}$, $\frac{35}{36}$, come sopra.

45. I due casi eselusi della moltiplicazione di moltiplicare un intero per una frazione, ed una frazione per una frazione si riduce a prendere una frazione di una quantità. Così si dice prendere del 3 i $\frac{2}{5}$; prendere dei $\frac{6}{7}$ i $\frac{4}{9}$, è non moltiplicare 3 per $\frac{2}{5}$, o $\frac{6}{7}$ per $\frac{4}{9}$.

Eseguiamo queste operazioni. Dovendo prendere del 3 i $\frac{2}{5}$ ne prendo prima il quinto, ed avrò $\frac{3}{5}$; ma doveva prendere i due quinti, dunque debbo duplicare il risultato, ed avrò $\frac{6}{5}$. Similmente dovendo prendere $\frac{4}{9}$ di $\frac{6}{7}$; ne prendo prima il nono, ossia divido per 9, ed avrò $\frac{6}{63}$, dovendo però prendere i $\frac{4}{9}$ debbo quadruplicare il risultato, ed avrò $\frac{24}{63}$.

46. La regola pratica di prendere una frazione d'un intero, o di una frazione è; *ridotto l'intero ad aspetto frazionario con la divisione per l'unità, moltiplicate il numeratore col numeratore, ed il denominatore col denominatore.*

DELLE FRAZIONI DECIMALI.

47. Il sistema decadico della numerazione consiste in questo, che ogni unità della cifra posta a sinistra di un'altra vale 10 dell'unità di questa. Dunque viceversa ogni unità della cifra posta a dritta di un'altra è il decimo dell'unità di questa. Sia dopociò il numero 234. Giunti al 4 niuno impedisce, che si possano scrivere altre cifre, purchè si tenga lo stesso sistema decadico; dunque se dopo il numero indicato si scrive 567 ogni unità del 5 sarà il decimo dell'unità semplice, ogni unità del 6 sarà il decimo del decimo, ossia il centesimo dell'unità semplice, ogni unità del 7 sarà il decimo del centesimo, ossia il millesimo dell'unità. Da ciò si ricava, che il numero scritto appresso alle unità è una frazione valutata ed espressa con lo stesso metodo decadico degli interi. Per distinguere questa parte frazionaria si suole fra essa e l'intero segnare un punto, o una virgola; quindi il nostro numero si esprime per 234, 567. Con ciò si hanno unità frazionarie, che sono decimi, decimi di decimi ec. dell'unità intera; e per ciò queste frazioni si chiamano *frazioni decimali*. Siccome coll'andare innanzi si ha sempre più piccola unità frazionaria, qualunque frazione, che si proponga si potrà sempre valutare nella ripetizione, o numero di una piccola unità frazionaria decimale, e quindi tutte le frazioni si potranno ridurre a decimali.

48. I numeri si possono leggere in due modi, o tutti insieme, o in parti: così il numero proposto 234567 escluso per un momento il punto possiamo leggerlo. Ducentotrentaquattromila, cinquecento sessantasette unità; e du-

cento trentaquattro migliaja cinquecento sessantasette unità, o millesimi di migliaja.

Dunque il numero decimale 234,567 si può leggere duecento trenta quattro mila cinquecento sessantasette millesime dicendo le ultime unità; ovvero duecento trenta quattro interi, e cinquecento sessantasette millesimi. Se le frazioni decimali si scrivano come le comuni, si vedrà, che esse avranno per denominatore sempre l'unità con zeri. Così se fossero tre interi, e 579 millesimi si esprimerebbe nella nostra maniera decimale, con 3,579, e per mezzo delle fra-

zioni comuni con $\frac{3579}{1000}$: dove si vede, che tre sono

le cifre decimali nel nostro modo di scrivere, e tre sono i zeri del denominatore nell'altro modo delle frazioni comuni.

49. Da ciò si ricava un metodo per scrivere, e leggere i decimali con facilità. Enunciato il decimale da scriversi, si penserà al modo di scriverlo come frazione comune, con ciò si scriverà subito il numeratore, e contando colla mente i zeri, che dovrebbero essere nel denominatore, nel numero scritto da dritta a sinistra si conteranno altrettante cifre, e dopo si segnerà un punto, o virgola. Così se si dicesse 3459 millesimi, si scriverà subito il numeratore 3459, ed avvertendo che il denominatore per esprimere millesimi avrebbe tre zeri, nel numero scritto da dritta a sinistra si conteranno tre cifre, e fra il 3 ed il 4 si segnerà una virgola.

Se li zeri del denominatore superano le cifre del numeratore per segnare il punto si supplisce con tanti zeri a sinistra quanti ne abbisognano. Così se fosse da scriversi 58 centomillesimi, siccome il centomila vorrebbe cinque zeri nel denominatore, si richiedono nel numeratore 5 cifre, 2 ve ne sono, le altre 3 si suppliscano con 3 zeri, così il numero proposto si scrive 0,00058. Facile ancora dopo ciò è il leggere i decimali. Si legge il numero intero, e poi il numero, che viene dopo il punto, e per l'unità decimale

si suppone un denominatore, che sia l'unità seguita da tanti zeri quante sono le cifre dopo il punto. Se fosse il decimale 5,6798, avendosi quattro cifre decimali si ha nel denominatore l'unità seguita da 4 zeri, dunque l'unità decimale è 10 millesimi, dunque il numero si legge 5 interi, 6798 dieci millesimi. Andiamo ai teoremi sui decimali.

50. Per ogni cifra che nel numero decimale si sposta verso dritta il punto lo stesso numero decimale diventa dieci volte più grande, perchè tutte le cifre retrocedendo a sinistra di tanti posti per quante cifre si è spostato a dritta il punto le cifre stesse diventano di dieci in dieci volte più grandi (§. 5.). Così se fosse il numero 57,5676, e la virgola si spostasse di due cifre a dritta, cosicchè si avesse 5756,76 il decimale sarebbe diventato 100 volte più forte, perchè il 56 che era 56 centesimi è diventato 56 interi, e così il resto.

Viceversa per ogni cifra, che si sposta a sinistra il punto, il numero diventa 10 volte più piccolo; ciò avviene perchè di altrettanti posti si avanzano a dritta le cifre.

51. Dalla prima verità si ricava, che il decimale si moltiplica per 10 per 100 per 1000 ec. spostando verso dritta il punto di una, di due, di tre ec. cifre quanti sono i zeri del moltiplicatore. Dalla seconda verità si ricava, che un decimale si divide per 10 per 100 per 1000 ec. spostando a sinistra il punto di una, di due, di tre ec. cifre secondo il numero dei zeri del divisore.

52. Il valore del decimale non cambia mettendo dopo esso quanti zeri si vogliono. Se fosse 0,58, scrivendo dopo esso due zeri si avrebbe 0,5800. Il primo zero aggiunto esprime zero millesimi, il secondo zero esprime zero 10 millesimi, dunque nulla si è aggiunto. Ciò si può provare ancora intrinsecamente dicendo, che con l'aggiunta di due zeri si è reso cento volte più forte il numero, ma allo stesso tempo si è reso il numero cento volte minore, per-

chè dalli millesimi, che esprimeva ora esprime li 100 millesimi.

53. *I decimali si riducono allo stesso denominatore pareggiando il numero delle cifre decimali, e ciò con aggiungere dei zeri a quello, che ne ha meno.* Se fosse 5, 8, e 0,0078; si aggiungano al primo tre zeri, e il numero 5,8000 esprimerà li dieci millesimi come l'altro.

54. Dopo i teoremi vengono le operazioni sopra i decimali. *Nell'addizione, e sottrazione si scrivono i decimali uno sotto l'altro in guisa, che i punti siano in una linea verticale, perchè così nell'intero le unità saranno sotto le unità, le decime sotto le decime ec.; e nella frazione decimale le decime saranno sotto le decime, le centesime sotto le centesime, e così di seguito. Le operazioni poi si eseguiscano come negli interi, come si vede negli esempj qui annessi.*

$$\begin{array}{r}
 5, 8345 \\
 80, 4570 \\
 \hline
 6, 89345 \\
 \hline
 93, 18495
 \end{array}$$

Da questo esempio si vede, che negli interi si corrispondono in colonne le cifre dello stesso valore decadico, e nelle frazioni decimali le decime sono sotto le decime, le centesime sotto le centesime ec. Si vede ancora, che nella somma avendo 10 unità dalla somma di una colonna queste formano una unità da portarsi alla somma della colonna seguente a sinistra, perchè nelle decimali vi è il sistema decadico degli interi.

Così ancora nella sottrazione un'unità che si porta nella cifra seguente a dritta vale 10.

Ecco gli esempi di sottrazione.

700.800579	93.000000
89.457932	8.945732
611.342647	84.054268

Nella seconda sottrazione, in cui il minuendo è 93 interi abbiamo segnato un punto, e poi scritti tanti zeri quante sono le cifre decimali del minutore, perchè questi si possono mettere, come si è dimostrato (§.52.), e con ciò si rende facile la sottrazione delle cifre del minutore. Si supplirebbe pure coi zeri se non tutte mancassero le cifre decimali al minuendo, ma alcune corrispondenti ad alcune del minutore, come si vede nell'esempio

43.750000
9.894567
33.855433

nel quale dopo il 5 del minuendo si sono scritti quattro zeri.

55. La moltiplicazione dei decimali si eseguisce così. *Nei due fattori si tolgono li punti, si moltiplicano come gl'interi, e nel prodotto da dritta a sinistra si contano tante cifre, quante sono le cifre decimali dei due fattori, e dopo queste si segna un punto.*

Sia da moltiplicarsi 8.19 per 0.007. Tolti i punti si moltiplicherà 819 per 7, e nel prodotto 5733 da dritta a sinistra si conteranno 5 cifre, perchè 5 sono le cifre decimali dei due fattori, e si segnerà un punto. Per questa regola il prodotto domandato sarà 0,05733.

La ragione di ciò è questa. Tolto il punto al fattore, che era centesime è divenuto cento volte più forte, e tolto il punto all'altro che era millesime è diventato mille volte maggiore. Dunque il prodotto è 100000 volte maggiore del vero, dunque il prodotto 5733 si deve rendere 100000 volte minore, perlochè basta, che si riduca ad esprimere centomillesime, come appunto è accaduto col metodo dato. Ecco un esempio nella moltiplicazione dei due numeri $3.0007 : 0.456$:

$$\begin{array}{r}
 30007 \\
 456 \\
 \hline
 180042 \\
 150035 \\
 120028 \\
 \hline
 1,3683192
 \end{array}$$

56. Per fare la divisione dei decimali ricordiamoci del teorema (§. 44.), che due frazioni dello stesso denominatore divise fra loro danno lo stesso quoto della divisione dei soli numeratori. Dunque la divisione di due decimali dello stesso denominatore si ottiene togliendo i punti, e dividendo gl'interi, che vengono senza più pensare ai decimali, perchè i numeratori di queste frazioni sono i loro numeri tolti i punti. Dunque *per fare la divisione dei decimali si riducono prima allo stesso denominatore con la regola data di sopra (§. 53.), e poi tolti i punti la divisione si farà fra gl'interi risultanti.* Se si dovesse dividere 2,034 per 0,00059 si pareggierebbe il primo decimale col secondo per mezzo di due zeri, e tolte le virgole si dividerebbe 203400 per 59.

57. Servono i decimali per eseguire le divisioni impossibili a causa, che il dividendo è minore del divisore fino a quel punto dove il residuo si consideri così piccolo, che si possa trascurare.

Si debba dividere per es. 54 per 38. Si faccia la divisione, avremo il quoto 1 ed il residuo 16. Si vada avanti con i decimali. Dopo il 16 supposto il punto si scriva un 0, diverrà esso decimi, e decimi dovendo essere il quoto, dopo 1 si segni il punto, e poi il 4 quoto della divisione di 160 per 38. Si noti un altro zero dopo l'attuale residuo 8, che lo farà diventare centesimi. Si faccia la divisione si avrà il quoto 2, ed il residuo 4; dopo il 4 si segni 0 avremo così le millesime, ed il quoto sarà 1, ed il residuo 2. Andando così avanti si avrà un residuo sempre minore di diecimillesime, centomillesime ec.

$$\begin{array}{r}
 54 \qquad \qquad \qquad | \ 38 \\
 160 \\
 080 \\
 040 \\
 0200 \\
 10
 \end{array}$$

Secondo la questione, che si propone si arriverà ad un residuo così piccolo, che si possa trascurare: allora si potrà trascurare tanto più quanto che questo residuo dovrà essere diviso per il divisore.

58. Le successive aggiunte dei zeri ai residui sono come altrettante cifre calate dal dividendo, quindi questo dividendo viene ad essere moltiplicato successivamente per 10; ma dieci ha per fattori 2, 5, dunque lo stesso dividendo per ogni zero, che gli si aggiunge, gli si aggiungono i fattori 2, 5, i quali così auderanno ripetendosi tante volte quanti sono i detti zeri. Da ciò viene, che se il divisore sia una ripetizione dei fattori 2, o 5, o di ambedue, quando nel dividendo altrettanti vi si siano introdotti colle successive aggiunte dei zeri la divisione riuscirà esatta: ciò che non avverrà mai quando il dividendo contenga altri fattori diversi dal 2, e dal 5, o sia un numero non divisibile che per se stesso, nel qual caso si dice numero primo, eccet-

tuati i due detti numeri 2, 5, che pur sono primi, perchè non si dividono che per se stessi.

59. Quando la divisione sia indefinita arriveremo sempre ad un punto, in cui alcune cifre del quoto ritorneranno successivamente. In fatti i resti delle divisioni dovendo essere minori del divisore una volta dovrà ritornare uno dei resti antecedenti, e ciò avverrebbe al più tardi quando nei resti si fossero esauriti tutti i numeri minori del detto divisore. Tornato questo resto, aggiungendogli lo zero ritornerà un dividendo antecedente, e quindi ritornerà lo stesso quoto, e ritorneranno tutti gli altri quoti seguenti, e di nuovo lo stesso residuo di cui si è parlato, e da cui collo zero comincierebbe il periodo antecedente di quoti, e così all'infinito. Ecco l'esempio :

$$\begin{array}{r}
 8 \qquad \qquad | \ 7 \\
 10 \qquad \qquad \hline
 30 \qquad \qquad 1.1428571 \\
 20 \\
 60 \\
 40 \\
 50 \\
 10
 \end{array}$$

In questo esempio si vede che al settimo residuo ritorna il primo residuo 1, e che a questo punto ricomincia il periodo delle cifre del quoto 142857.

60. Nell'arrestarci a qualche cifra d'un decimale indefinito si deve osservare la cifra seguente, la quale se sia maggiore di 5, si aggiungerà una unità alla cifra, alla quale ci arrestiamo. Per esempio avendosi il decimale indefinito 4.5678937 se ci vogliamo arrestare alla cifra 8 dovremo aggiungergli una unità, perchè la cifra seguente è 9, ed avremo il numero 4.5679. La ragione di ciò è, che cinque unità di qualunque cifra decadica formano mezza unità della cifra prossima a sinistra, quindi se una cifra decadica nel decimale è maggiore di cinque, col trascurarla ed

aggiungere un'unità alla cifra seguente a sinistra si sbaglia per eccesso di meno di mezza unità: mentre che se questa unità non si aggiungesse si sbaglierebbe in difetto di più di mezza unità; e l'errore primo si fa anche minore se oltre la cifra trascurata vi siano nel decimale di seguito altre cifre, che si trascurano.



PARTE TERZA

APPLICAZIONI DELL'ARITMETICA AI PROBLEMI.



UNA LIBBRA DI DATA MATERIA SI È PAGATA SCUDI 21, PAOLI 3, BAJOCCHI 9, QUATTRINI 2; SI VUOL SAPERE QUANTO SI PAGHERANNO 5 DECINE, 9 LIBBRE, 7 ONCIE, 11 DENARI.

61. Questa proposizione si chiama *problema*. In questa si danno i numeri scudi 21, paoli 3, bajocchi 9, e quattrini 2, ed i numeri 5 decine, 9 libbre, 7 oncie, 11 denari con la relazione fra loro, che una libbra costi scudi 21, paoli 3, bajocchi 9, e quattrini 2, e si vuol sapere il costo delle date decine, libbre ec.: quindi *il problema è una proposizione nella quale dati alcuni numeri con relazioni fra loro si domanda un'altro numero, o altri, che si chiamano incogniti.*

Si sa che uno scudo fa 10 paoli, e perciò ogni paolo sarà il decimo dello scudo; ogni scudo fa 100 bajocchi, e perciò il bajocco è il centesimo dello scudo: dunque nel nostro problema i 3 paoli saranno 3 decimi, ed i 9 bajocchi saranno i 9 centesimi dello scudo: dunque scudi 21, paoli 3, bajocchi 9 si esprimeranno con (§.47.) 21. 39. Ogni scudo sono 500 quattrini, dunque i 2 quattrini del problema sono $\frac{2}{500}$ dello scudo: avremo dun-

que, che il costo d' una libbra del problema sarà scudi

$21.39 + \frac{2}{500}$. Si ridurrà allo stesso denominatore prima moltiplicando 21.39. per 100, ciò che si fa (§. 50.) portando il punto a dritta di due cifre, o nel nostro caso togliendolo, e poi moltiplicando per 5; avremo dunque $\frac{10695 + 2}{500}$, ossia $\frac{10697}{500}$. Si divida il numeratore per

100 scrivendo (§. 50.) 106.97, e poi dividendo per 5 coi decimali (§. 57.) avremo 21.394. Si poteva avvertire, che 21.39 è $\frac{2139}{100}$, e che per ridurlo allo stesso deno-

minatore con $\frac{2}{500}$ bastava moltiplicare i due suoi ter-

mini (§. 35.) per 5, avremmo avuto $\frac{10695}{500}$ che som-

mato con $\frac{2}{500}$ dà $\frac{10697}{500}$, ossia $\frac{106.97}{5}$, ovvero,

facendo la divisione coi decimali, 21.394. Abbiamo poi dal problema 5 decine, 9 libbre, 7 oncie, ed 11 denari. Per ridurre tutto a libbre, poichè si dà il valore d' una libbra, si avverta, che una decina è 10 libbre, dunque le 5 decine sono 50 libbre, che unite alle 9 danno 59 libbre. Ogni libbra è 12 oncie, dunque un'oncia è il dodicesimo della libbra, e le 7 oncie ne saranno $i \frac{7}{12}$. Ogni

uncia è 24 denari, dunque un denaro è $\frac{1}{24}$ dell' oncia :

ma questa è $\frac{1}{12}$ della libbra; dunque un denaro sarà $\frac{1}{24}$

di $\frac{1}{12}$ della libbra, o (§. 31.) $\frac{1}{12 \cdot 24}$, e gli 11 denari saran-

no $\frac{11}{12 \cdot 24}$ della libbra; dunque 5 decine, 9 libbre, 7

oncie, ed 11 denari sono 59 libbre, e $\frac{7}{12} + \frac{11}{12 \cdot 24}$

della libbra. Riducendo allo stesso denominatore si ridurranno alla frazione di libbra $\frac{59 \cdot 12 \cdot 24 + 7 \cdot 24 + 11}{12 \cdot 24}$,

ossia $\frac{17171}{288}$ di libbra. Una libbra costa scudi 21. 394,

ossia $\frac{21394}{1000}$; dunque libbre $\frac{17171}{288}$ costeranno

scudi $\frac{21394}{1000} \cdot \frac{17171}{288}$, ossia (§. 32, 45.) scudi $\frac{367356374}{288000}$;

e fatta la divisione si troverà, che il costo domandato sono scudi 1275. 54, e quattrino $1 + \frac{139}{288}$.

SE UN LAVORO DI 20 TESE, 4 PIEDI, 7 POLLICI, E 11 LINCE È COSTATO 140 LIRE, 13 SOLDI, E 9 DENARI. SI VUOL SAPERE IL COSTO DI UNA TESA.

62. Riduciamo le misure inferiori a frazioni di tesa. Si deve sapere, che una tesa fa 6 piedi: dunque un piede è il sesto della tesa, ed i 4 piedi ne saranno $i \frac{4}{6}$, o $\frac{2}{3}$.

Ogni piede sono 12 pollici, dunque i 7 pollici saranno $\frac{7}{12}$

del piede: ma il piede è $\frac{1}{6}$ della tesa, dunque prendendo $i \frac{7}{12}$ di $\frac{1}{6}$, avremo, che $\frac{7}{12 \cdot 6}$ sarà il valore di 7 pollici

in frazione di tesa. In ultimo ogni pollice è 12 lince, dunque le 11 linea saranno $\frac{11}{12}$ di pollice; e perciò sa-

ranno $\frac{11}{12 \cdot 12 \cdot 6}$ della tesa: dunque dovremo fare la som-

ma $20 + \frac{2}{3} + \frac{7}{12 \cdot 6} + \frac{11}{12 \cdot 12 \cdot 6}$, ossia ridotto tutto allo stesso denominatore (§. 35.) la somma sarà

$$\frac{20 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 6 + 2 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 2 + 7 \cdot 12 + 11}{12 \cdot 12 \cdot 6} \text{ ossia}$$

$$\frac{17951}{864}.$$

Nella seconda specie di quantità riducendo tutto a lire si avverta, che una lira è 20 soldi, e che ogni soldo è 12 denari; dunque le 140 lire, 13 soldi, e 9 denari in lire sono $140 + \frac{13}{20} + \frac{9}{20 \cdot 12}$, ossia semplificando l'ultima frazione (§. 33.) $140 + \frac{13}{20} + \frac{3}{20 \cdot 4}$, che dà in ultimo $\frac{11255}{80}$. La questione dunque è ridotta a questa:

$\frac{17951}{864}$ tese costano lire $\frac{11255}{80}$, si domanda quanto costa una tesa. Si vede, che questo costo si otterrà dividendo la seconda quantità per la prima. Questa divisione si esprime con (§. 43.) $\frac{11255 \cdot 864}{17951 \cdot 80}$, ossia eseguite le

moltiplicazioni $\frac{9724320}{1436080}$. Si eseguisca la divisione, ed il quoto esprimerà le lire. Si moltiplichi il resto per 20 per ridurlo a soldi, ed eseguita la divisione avremo il quoto in numero di soldi. Il nuovo residuo si moltiplichi per 12, e ridotto così a denari, il quoto di questa divisione sarà numero di denari. Nell'attual residuo si eseguisca la divisione colli decimali fino alle millesime, ed avremo che il costo del lavoro del problema sarà $6^l 15^s 5^{de} 144$.

SI SA, CHE IL METRO È PALMI ROMANI 4, 4762, SI DOMANDANO IN METRI, DECIMETRI, CENTIMETRI, EC., CANNE 27, E PALMI 6.

63. Il metro è la diecimilionesima parte del quarto del meridiano terrestre, che passa per Parigi. Il metro si suddivide in dieci, in cento, in mille parti, che si dicono *decimetri*, *centimetri*, *millimetri* in guisa, che queste misure sono in frazioni decimali.

Ciò posto nel nostro problema si riducano le 27 canne a palmi moltiplicandole per 8, avremo palmi 216, ai quali

aggiunti i 6 palmi daranno palmi, 222. Il metro è palmi 4. 4762; dunque tante volte questo numero entrerà in 222, e tanti metri avremo; e se si procederà coi decimali avremo i decimetri, i centimetri ec. Ridotta agl'interi (§. 56.) la proposta divisione divideremo 2220000 per 44762, e troveremo, che le 27 canne e 6 palmi sono prossimamente metri 49. 595, cioè 49 metri, e 595 millimetri, o anche 49 metri, 5 decimetri, 9 centimetri, 5 millimetri.

*SI SA, CHE IL CHILO GRAMMO VALE LIBBRE ROMANE 3, 9469
SI VUOL SAPERE IN PESO ROMANO IL GRAMMO.*

64. Il grammo è il peso di un centimetro cubo di acqua distillata nella sua massima densità, e si è preso questo peso per unità dei pesi. Prendendolo di dieci in dieci volte maggiore abbiamo il *decagrammo*, l'*ectogrammo*, il *chilogrammo*, il *miriogrammo*; e prendendolo di dieci in dieci volte minore abbiamo il *decigrammo*, il *centigrammo*, il *milliogrammo*. Ciò posto per risolvere il problema si dirà il grammo è il millesimo del chilogrammo; ma il chilogrammo vale libbre 3. 9469; dunque prendendo di questo numero il millesimo avremo il grammo in frazione decimale della libbra romana, che sarà 0. 0039469 (§. 50.). Per avere il peso del grammo in un numero di unità di peso di suddivisione della libbra si moltiplichi l'antecedente frazione per 12, perchè una libbra sono dodici oncie; quindi il grammo in frazione di oncia sarà (§. 55.) 0, 0473628. Si sa, che un oncia sono 24 denari; dunque moltiplicando l'antecedente frazione per 24 il numero risultante 1.1357072 indica, che il grammo è in peso romano un denaro, e prossimamente 0. 136 (§. 60.) di denaro. Se si volesse valutare questa frazione in grani basterebbe moltiplicarla, o meglio moltiplicare 0, 1357072 per 24, perchè un denaro sono 24 grani, ed il numero cercato sarà 1 denaro e grani 3. 257.

TROVARE IL FRUTTATO DI SCUDI 8457 AL 6 PER CENTO ALL'ANNO.

65. Il fruttato al 6 per cento vuol dire, che cento scudi

fruttano 6 scudi; dunque come lo scudo è il centesimo di cento scudi, così il centesimo di 6, ovvero (§. 49.) 0, 06 sarà il fruttato di uno scudo, che ripetuto per li 8457 scudi darà il loro fruttato. Si moltiplichino dunque 8457 per 0, 06, ed il prodotto (§. 55.) 507. 42, ossia scudi 507, e bajocchi 42 sarà il fruttato domandato.

TROVARE IL CAPITALE PER PRODURRE UN FRUTTO DI SCUDI 179 AL 3 PER CENTO ALL'ANNO.

66. Se 3 è il frutto di cento, il terzo di 3, o uno scudo sarà il frutto del terzo di cento, o di scudi $\frac{100}{3}$. Ora se

al frutto uno corrisponde il capitale $\frac{100}{3}$, al frutto uno scudo ripetuto 179 volte, o al frutto 179 corrisponderà il capitale $\frac{100}{3}$ ripetuto 179 volte, o $\frac{17900}{3}$. Fatta

l'operazione troveremo scudi 5966. 66, e quattrini 3 prossimamente pel capitale domandato.

PER FARE UN CENTO LAVORO SI SONO IMPIEGATI 7 GIORNI, E 59 LAVORANTI. SI DOMANDANO I LAVORANTI PER FAR FARE LO STESSO LAVORO IN 13 GIORNI.

67. I lavoranti 59 fanno il lavoro in 7 giorni; essendo essi come 59 forze ripetute per ognuno dei 7 giorni, è evidente, che se quel lavoro si volesse eseguire in un giorno bisognerebbe settuplicare i lavoranti 59. Dunque 413 lavoranti fanno il detto lavoro in un giorno. Ma si vuol, che lo stesso lavoro si faccia in 13 giorni, dunque per una ragion contraria all'antecedente si richiederà a ciò un tredicesimo dei lavoranti 413 che fanno il lavoro in un giorno; dunque i lavoranti domandati saranno $\frac{413}{13}$, ossia prossimamente 32.

UN LAVORO DI 33 CANNE SI È FATTO DA 14 OPERAI IN 7 GIORNI, LAVORANDO 15 ORE AL GIORNO, ED AVENDO CON SE 9

RAGAZZI, CHE POTEVANO FARE $\frac{2}{3}$ DEL LAVORO D'UN UOMO: CERCO IL LAVORO DI 22 OPERAI IN 17 GIORNI LAVORANDO 12 ORE AL GIORNO, ED AVENDO CON SE 11 RAGAZZI DELLA STESSA ATTIVITÀ DE' PRIMI.

68. I 9 ragazzi del primo caso lavorano ognuno $\frac{2}{3}$ del lavoro di un uomo, equivarranno dunque a $9 \cdot \frac{2}{3}$ uomini, o a 6 uomini, dunque abbiamo uomini $14 + 6$ o 20. Li 7 giorni di 15 ore di lavoro al giorno in ultimo sono 105 ore di lavoro. Ora se le 33 canne si volessero lavorate da 20 uomini non in 105 ore, ma in una ora è evidente, che vi vorrebbero uomini $20 \cdot 105$, perchè i venti operai in ore 105 sono 20 forze ripetute 105 volte: dunque potremo esprimere la prima parte del problema dicendo 33 canne sono fatte da $20 \cdot 105$, o da 2100 operai in un'ora. Ragionando allo stesso modo nella seconda parte del problema avremo, che si domanda il lavoro di 5984 operai in un'ora: quindi ecco il problema. Se 33 canne si fanno da 2100 operai, qual lavoro in canne si farà da 5984 operai.

Per trovar ciò si dica, le canne 33 sono lavorate da 2100 uomini, dunque $\frac{1}{2100}$ di 33, o $\frac{33}{2100}$, ovvero (§. 33.)

$\frac{11}{700}$ sarà il lavoro d'un uomo, che ripetuto per gli uomini 5984 darà il loro lavoro: il lavoro dunque domandato sarà $\frac{11 \cdot 5984}{700}$, ossia canne 94, 0343 prossimamente.

✓ A CIASCUNO DI 8449 SOLDATI SI VUOL DARE 3 DECINE, 7 LIBBRE, 11 ONCIE, E 15 DENARI DI PANE; SI VUOL SAPERE QUANTO PANE SI DISPENSERÀ.

69. È evidente, che si debbono moltiplicare le dette decine, libbre ec. per 8449. Invece di ricorrere alle frazioni come si è praticato nei problemi (§. 61.) si può usa-

re un metodo, che è bene sapere, e che si esprime nella seguente operazione

	dec.	lib.	onc.	de.
	3	7	11	15
8449				
25347				
li.				
5	4224	5		
li.				
2	1689	8		
on.				
6	422	4	6	
on.				
4	281	6	4	
on.				
1	70	4	1	
de.				
12	35	2	0	12
de.				
3	8	8	0	3
	dec.	lib.	onc.	de.
	32079	7	11	15

Qui si è fatto prima il prodotto di 3 decine per 8449, e si sono avute decine 25347. Si doveva in seguito moltiplicare 7 libbre per 8449. Le sette libbre si sono divise nelle parti 5, e 2 per poter dire, che moltiplicare 7 libbre per 8449 era moltiplicare mezza decina, ed un quinto di decina per questo numero, e così prendendo la metà di 8449, e poi il quinto si potessero avere tutte le decine; abbiamo così avuto i due prodotti parziali

	dec.	lib.		dec.	lib.
4224		5,	e	1689	8

Si doveva in seguito moltiplicare 11 oncie per 8449. Si è spezzato questo numero di oncie in oncie 6, 4, 1; ora 6 oncie sono la metà della libbra (§. 61.); ma se si avesse il prodotto di una libbra per 8449, basterebbe prenderne la metà per avere il prodotto di 6 oncie per lo stesso num-

dec. lib.
 mero : ma ora abbiamo avuto 1689 8 pel prodotto di 2 libbre per 8449 : dunque prendendo di questo prodotto il quarto si avrà pel prodotto cercato

	dec.	lib.	on.
422	4	6	

Le oncie 4 sono il terzo della libbra; dunque il prodotto di 4 oncie per 8449 si otterrà prendendo il sesto di

dec. lib.
 1689 8 prodotto di 2 libbre per 8449 ; dunque il prodotto cercato è

	dec.	lib.	on.
281	6	4	

Per avere il prodotto d'un oncia per 8449 in decine basterà prendere il quarto del prodotto antecedente, che è

	dec.	lib.	on.
70	4	1.	

Li 15 denari si sono divisi in 12, e 3 : dodici denari sono (§. 61.) la metà dell'oncia, e 3 denari ne sono l'ottavo: dec. lib. on.

dunque prendendo la metà, e l'ottavo di 70 4. 1, che è il prodotto di un'oncia per 8449, i risultamenti

	dec.	lib.	on.	d.	dec.	li.	on.	d.
35	2	0	12	,	8	8	0	3

daranno insieme il prodotto di 15 denari per 8449.

70. Si è fatta poi la somma per avere il prodotto to-

tale avvertendo, che se sommando i denari si è avuto 24, si è portata un'oncia nella somma delle oncie, e che per ogni 12, che si è avuto nella somma delle oncie si è portata una libbra nella colonna delle libbre.

OGNI TESA DI LAVORO COSTA LIRE 20, SOLDI 17, E DENARI 9; SI VUOL SAPERE IL COSTO DI TESE 18, PIEDI 5, POLLICI 7.

71. Ecco il prospetto dell'operazione invece di ridurre le due specie di quantità del problema a frazioni come nel (§. 62.)

	li.	so.	de.
	20	17	9
	te.	pie.	pol.
	18	5	7
	380		
so.			
10	9		
so.			
5	4	10	
so.			
2	1	16	
de.			
6	0	18	
de.			
3	0	9	
pie.			
3	10	8	$10 + \frac{1}{2}$
pie.			
2	6	19	3
pol.			
6	1	17	$3 + \frac{3}{4}$
pol.			
1	0	6	$2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$
	li.	so.	de.
	416	4	$7 + \frac{7}{8}$

li. so. de.
Qui si è moltiplicato prima 20, 17, 9 per 18, come nel problema antecedente. Dopo ciò si è moltiplicato lo

li. te. de. pie.
stesso 20 17 9 per 5. Perciò questi 5 piedi si sono divisi in 3 o 2. Li 3 piedi sono la metà della tesa (S. 62.); ma 20, 17, 9 sono il costo di una tesa, si è dunque preso la metà di questo costo, e si è avuto

li. so. d. $\frac{1}{2}$.
10, 8, 10 $+$ $\frac{1}{2}$. Li due piedi sono il terzo della tesa, si è dunque preso il terzo di 20 17 12, che è

li. so. de. li. so. de.
stato 6 19 3. Dopo ciò 20, 17, 9 si è moltiplicato per 7 pol. Questi si sono divisi in 6 pollici, ed 1 pollice. Si è detto 6 pollici sono (S. 62.) la metà del piede, dunque se si avesse il prodotto di 20 17 9 per un piede, di questo si prenderebbe la metà: ma si ha il prodotto per due piedi; dunque di questo prodotto, che è

li. so. de. li. so. de. $\frac{3}{4}$.
6 19 3, si è preso il quarto, e si è avuto 1 17 3 $+$ $\frac{3}{4}$. Finalmente si è preso $\frac{1}{6}$ di questo prodotto per avere

li. so. de.
il prodotto di 20, 17, 9 per un pollice.

72. Non si danno problemi riguardanti i numeri concreti come gli antecedenti, che si chiamano *numeri complessi* nei casi di divisione, perchè in questa operazione non v'è altro metodo che ridurli a frazioni, come si è usato nel (S. 62.), e fare la divisione delle frazioni.

73. In tutti i problemi risolti fin qui, il numero incognito risultava da operazioni fatte sopra altri numeri cognitivi. Così nel problema (S. 67.) il numero domandato degli uo-

mini proveniva dal prodotto di 59 uomini per 7, diviso questo prodotto per 13; ossia si può dire, che il numero cercato degli uomini sia uguale al prodotto di 59 per 7 diviso per 13. Indicando con y il numero incognito, e la moltiplicazione di 59 per 7 con $59 \cdot 7$, o con 59×7 , perchè il punto, ed il segno $\times$ sono adottati per indicare la moltiplicazione, e finalmente col segno $=$ indicando l'uguaglianza di due valori, potremo scrivere $y = \frac{413}{13}$, che

vuol dire appunto, che il numero domandato degli uomini è uguale al prodotto di 59 per 7 diviso per 3.

Così ancora nel problema (§. 61.) il costo domandato si potrà esprimere pel prodotto delle 5 decine, 9 libbre, 7 oncie, 11 denari moltiplicato per 21 scudi, paoli 3, bajocchi 9, e 2 quattrini scrivendo

$$x = (5^d + 9^l + 7^o + 11^d) \cdot (21^s \cdot 39 + 2^q),$$

ove la x esprime il costo domandato, che è uguale al detto prodotto. I due fattori si scrivono fra le parentesi per indicare, che tutta la somma delle prime quantità si deve moltiplicare per tutta la somma delle seconde.

74. L'espressioni antecedenti colle quali si hanno i valori dei numeri incogniti, o come si suol dire *delle incognite* si chiamano *equazioni*: quindi *l'equazione è l'espressione dell'uguaglianza di due quantità nelle quali v'è l'incognita, o le incognite*. La quantità, che si legge prima del segno $=$ si dice *primo membro dell'equazione*, e quella che si legge dopo si dice *secondo membro dell'equazione*.

Le incognite si sogliono esprimere colle ultime lettere dell'alfabeto x, y, z, u .

75. Tutti i problemi poi si esprimono per mezzo delle equazioni, perchè dovendo esprimere una data relazione di quantità, tutte queste relazioni si riducono ad una data uguaglianza, o disuguaglianza di quantità: ma la data disugua-

glianza si può sempre ridurre ad uguaglianza coll'aggiungere alla minore ciò che gli manca per arrivare alla maggiore, o togliendo alla maggiore ciò che ha di più sopra la minore. Ma non sempre i problemi si possono esprimere come gli antecedenti con una equazione, nella quale l'incognita sia sola in un membro: ma spesso avviene, che nell'equazione esprime il problema l'incognita sia unita alle cognite, e ciò anche in ambedue i membri.

Per trattare dunque i problemi in tutta la loro generalità proporremo quelli, che si esprimono con equazioni, nelle quali l'incognita sia unita alle cognite in tutte le maniere possibili, e daremo il metodo per ridurre l'equazioni alla forma delle superiori, dove cioè l'incognita sia sola in un membro, e le cognite nell'altro, onde come nelle antecedenti basti eseguire le operazioni sopra le cognite per trovare l'incognita.

76. *Isolare l'incognita in un membro di una data equazione, e ridurre le cognite nell'altro membro, è ciò che si dice risolvere un'equazione.*

Tutti i modi colli quali l'incognita può essere unita alle cognite sono le quattro operazioni, *somma, sottrazione, moltiplicazione, e divisione*. Dunque per dare il metodo di risolvere l'equazioni, si deve dare il metodo per liberare l'incognita dalle cognite a queste unità colle quattro operazioni, portando le cognite nell'altro membro.

A questo fine sia per primo il problema.

TROVARE UN NUMERO A CUI AGGIUNTO $\frac{2}{3}$ DIA $\frac{8}{9}$.

77. Il numero incognito sia x , siccome ad esso non si può aggiungere $\frac{2}{3}$ esprimeremo questa somma col segno $+$, che, come sappiamo, vuol dir più, e la somma indicata sarà $x + \frac{2}{3}$; questa somma deve dare $\frac{8}{9}$, ciò vuol dire, che dev'essere eguale a $\frac{8}{9}$; dunque $x + \frac{2}{3} = \frac{8}{9}$. Per risolvere

questa equazione ragiono così: $\frac{8}{9}$ è la somma di x con $\frac{2}{3}$, dunque $\frac{8}{9}$ è un tutto, che si compone delle due parti x , $\frac{2}{3}$: dunque da questo tutto togliendo una parte $\frac{2}{3}$ deve venir l'altra x , o il risultamento deve essere uguale a questo x . Per esprimere la sottrazione di $\frac{2}{3}$ da $\frac{8}{9}$ interporremo fra queste frazioni il segno —, che vuol dir meno, dunque $x = \frac{8}{9} - \frac{2}{3}$. Da ciò si ricava, che una cognita $\frac{2}{3}$ unita colla somma all'incognita si trasporta nell'altro membro colla sottrazione.

TROVARE UN NUMERO, CHE SUPERI DI 1 LI $\frac{5}{7}$.

78. Ciò vuol dire, che tolto $\frac{5}{7}$ dalla quantità maggiore incognita x il residuo deve essere 1; dunque $x - \frac{5}{7} = 1$ è l'espressione del problema. Qui x è il minuendo, $\frac{5}{7}$ il minutore, ed 1 il residuo: ma al residuo aggiunto il minutore (§. 13.) deve dare il minuendo; dunque $x = 1 + \frac{5}{7}$. Dunque una quantità cognita unita all'incognita colla sottrazione si trasporta all'altro membro colla somma.

DOMANDO UN NUMERO, CHE RIPETUTO 3 VOLTE DIA 5.

79. L'equazione esprime il problema sarà $3x = 5$, che dice appunto 3 volte x dà 5. In questo caso il 5 è un prodotto dei due fattori 3, x : ma (§. 24.) diviso il prodotto per un fattore deve venir l'altro; dunque $x = \frac{5}{3}$. Dun-

que una cognita, che moltiplica l'incognita si trasporta nell'altro membro colla divisione.

TROVARE UN NUMERO, NEL QUALE IL 7 ENTRI 3 VOLTE.

80. L'espressione del problema è $\frac{x}{7}=3$. Qui x è il dividendo, 7 il divisore, e 3 il quoto; ma il dividendo (§. 19.) è uguale al quoto moltiplicato pel divisore; dunque $x=3 \times 7$. Dunque una cognita, che divide l'incognita in un membro, colla moltiplicazione si trasporta nell'altro.

81. Riunendo in una sola le quattro regole date negli antecedenti problemi diremo, che per isolare l'incognita in un membro, le cognite ad essa unite si debbono trasportare nell'altro membro colle operazioni contrarie; cioè, che una cognita sommata, o sottratta nel primo membro dev'essere sottratta, o sommata nel secondo, e che una cognita, che moltiplica, o divide l'incognita deve esser portata a dividere, o moltiplicare l'altro membro. È chiaro poi, che collo stesso metodo da uno all'altro membro si trasportano le incognite.

Sia ora da risolversi l'equazione $\frac{2x}{3} - 2 + \frac{1}{5} = 1$. Si trasportino prima nel secondo membro il 2 sottratto, ed $\frac{1}{5}$ sommato, colla somma, e sottrazione, operazioni contrarie, ed avremo $\frac{2x}{3} = 1 + 2 - \frac{1}{5}$ ossia $\frac{2x}{3} = \frac{14}{5}$. Si porti il 3 divisore nel primo membro colla moltiplicazione nel secondo, avremo $2x = \frac{42}{5}$; finalmente il secondo membro si divida pel 2, che moltiplica nel primo, e sarà $x = \frac{21}{5}$, valore della x , e perciò l'equazione è risolta.

Dopo ciò sia il problema. *TROVARE UN NUMERO, I DI CUI*

$\frac{3}{5}$ SIANO AL DI SOPRA DI $\frac{1}{3}$ DI 5.

82. Se x è il numero domandato il suo quinto sarà $\frac{x}{5}$ ed i $\frac{3}{5}$ dovendo essere il triplo del quinto saranno $\frac{3x}{5}$: questo deve superare di 5 la frazione $\frac{1}{3}$: dunque la differenza fra $\frac{3x}{5}$ e $\frac{1}{3}$ dev'essere 5, ciò che si esprime con $\frac{3x}{5} - \frac{1}{3} = 5$, questa si risolve scrivendo $\frac{3x}{5} = 5 + \frac{1}{3}$, ossia $\frac{3x}{5} = \frac{16}{3}$, $3x = \frac{16}{3} \cdot 5$, o, $3x = \frac{80}{3}$; $x = \frac{80}{3} : 3$, o $x = \frac{80}{9}$, numero domandato.

Per conoscere se questo risultamento sia giusto si riprenda il problema. Del numero domandato si debbono prendere i $\frac{3}{5}$. Ora il quinto di $\frac{80}{9}$ (§. 31.) è $\frac{16}{9}$, e tre volte questo quinto è (§. 32.) $\frac{16}{3}$. La differenza fra $\frac{16}{3}$ e $\frac{1}{3}$ è $\frac{15}{3}$, o 5, come doveva essere.

TROVARE UN NUMERO, CHE DIMINUITO DI 2, I SUOI $\frac{2}{3}$

UNITI AI $\frac{3}{4}$ DELLO STESSO NUMERO AUMENTATO DI 2 DIANO 1.

83. Il numero diminuito di 2 è $x-2$, preso di esso prima il $\frac{1}{3}$ e poi il doppio ci darà $\frac{2x-4}{3}$. Questo prodotto è giusto. Infatti dovendosi prendere il doppio di $x-2$, si prenda il doppio di x sarà $2x$: ma non si doveva prendere il doppio di tutto x , ma di $x-2$, cioè di ciò, che rimaneva toltogli prima il 2; questa sottrazione non si è potuta eseguire, dunque dentro il valore di x si è lasciato un 2, che non si doveva, e col $2x$ anche questo 2 si è

moltiplicato per 2, che non si doveva: dunque il prodotto $2x$ è troppo forte di 4, quindi il giusto prodotto sarà $2x-4$.

Inoltre il numero aumentato di 2 è $x+2$, ed i suoi $\frac{3}{4}$

sono $\frac{3x+6}{4}$; questo dev' essere unito a $\frac{2x-4}{3}$

per avere 1; dunque $\frac{2x-4}{3} + \frac{3x+6}{4} = 1$. Ri-

ducendo il primo membro allo stesso denominatore sarà
 $\frac{8x-16+9x+18}{12} = 1$, ossia, riflettendo, che $8x+9x$

vuol dire 8 volte x più 9 volte x , cioè 17 volte x , o $17x$,
 $\frac{17x+2}{12} = 1$, dove togliendo il 12 dal primo membro
 avremo

$$17x + 2 = 12,$$

$$17x = 12 - 2, \quad \text{o} \quad 17x = 10,$$

$$x = \frac{10}{17}.$$

Per verificare il risultamento, secondo il problema dal
 numero trovato tolgo il 2, ed il $\frac{10}{17} - 2$ ci darà $-\frac{24}{17}$: di
 questo si deve prendere i $\frac{2}{3}$, (§.46.) avremo $-\frac{16}{17}$. Aggiungen-
 do a $\frac{10}{17}$ il 2 avremo $\frac{44}{17}$, i di cui $\frac{3}{4}$ saranno $\frac{33}{17}$, questo
 dev' essere aggiunto a $-\frac{16}{17}$, avremo dunque
 $-\frac{16}{17} + \frac{33}{17} = \frac{17}{17} = 1$, come doveva essere.

Si domanda un numero, i di cui $\frac{3}{8}$ siano di tanto al di sotto di 2, di quanto lo stesso numero è al di sopra di $\frac{1}{7}$.

84. I $\frac{3}{8}$ del numero sono $\frac{3x}{8}$, questi sono al di sotto di 2 del numero espresso da $2 - \frac{3x}{8}$. Il numero poi è al di sopra di $\frac{1}{7}$ di $x - \frac{1}{7}$, dunque l'espressione del problema sarà $2 - \frac{3x}{8} = x - \frac{1}{7}$, perchè l'espressione di tanto, di quanto vuol dire uguale.

85. In questa equazione per liberarci dalle frazioni si usi questo metodo da servirsene sempre, che in una equazione vi siano delle frazioni. *Si riducano i due membri allo stesso denominatore non scrivendo il denominatore comune.* La ragione di ciò è, che ridotti i due membri allo stesso denominatore si hanno due frazioni uguali dello stesso denominatore; ma è chiaro, che onde ciò avvenga è necessario, che siano uguali i numeratori, i quali nella nostra equazione sono i suoi due membri ridotti allo stesso denominatore, ma escluso il denominatore comune. Eseguendo ciò nell'equazione superiore avremo

$$112 - 21x = 56x - 8.$$

L'incognita dev'essere nel primo membro : dunque si trasporterà il $56x$, che è aggiunto al -8 , nel primo membro colla sottrazione (§. 81.), ed avremo

$$\begin{aligned} 112 - 21x - 56x &= -8, \\ -21x - 56x &= -8 - 112 \\ -77x &= -120, \end{aligned}$$

ed è chiaro, che sarà anche

$$77x = 120,$$

perchè se due grandezze negative sono uguali debbono essere uguali anche le positive, che sono della stessa dimensione delle prime: dunque

$$x = \frac{120}{77}.$$

I $\frac{3}{8}$ di questo numero sono $\frac{45}{77}$, questo è al di sotto di 2 di $2 - \frac{45}{77}$, o $\frac{154 - 45}{77}$, ossia di $\frac{109}{77}$. Lo stesso numero $\frac{120}{77}$ è al di sopra di $\frac{1}{7}$ di $\frac{120}{77} - \frac{1}{7} = \frac{120 - 11}{77} = \frac{109}{77}$, che è lo stesso risultamento antecedente.

SI HA DELL'ACQUA MARINA, CHE IN 32 LIBBRE CONTIENE UNA LIBBRA DI SALE; SI DOMANDA QUANTA ACQUA DOLCE GLI SI DEVE AGGIUNGERE, ONDE IN 3 LIBBRE DELLA NUOVA MESCOLANZA VI SIA $\frac{1}{8}$ DI LIBBRA DI SALE.

86. Esprima x le libbre di acqua dolce da aggiungersi alle libbre 32, avremo libbre $32+x$. In questa quantità è sparsa una libbra di sale, dunque in una libbra di questa mescolanza vi sarà di sale $\frac{1}{32+x}$; perchè se queste libbre fossero per es. 50, in esse essendo sparsa una libbra di sale, in una delle 50 vi sarebbe $\frac{1}{50}$ di libbra di sale. Ora se in una libbra della mescolanza vi è sale espresso da $\frac{1}{32+x}$, in 32 libbre vi sarà sale $\frac{1}{32+x}$ ripetuto 32 volte, ossia (§. 32.) $\frac{32}{32+x}$: ma questo sale deve essere $\frac{1}{8}$ di libbra: dunque $\frac{32}{32+x} = \frac{1}{8}$.

Riducendo allo stesso denominatore sarà (§. 85.)

$$256 = 32 + x, \text{ o } 32 + x = 256, x = 256 - 32,$$

e finalmente $x = 224$; cioè si debbono aggiungere 224 libbre di acqua dolce.

Dunque l'acqua della mescolanza sarà lib. $32 + 224$, ossia 256. In questà vi è sparsa una libbra di sale: dunque in una libbra vi sarà di sale $\frac{1}{256}$ di libbra, e nelle

32 libbre vi sarà sale $\frac{32}{256}$: in cui dividendo i due ter-

mini per 32 sarà $\frac{1}{8}$ di libbra, come voleva il problema.

UN NUMERO È COMPOSTO DI TRE CIFRE. LA SOMMA DELLE CIFRE È 11; LA CIFRA DELLE UNITÀ È DOPPIA DI QUELLA DELLE CENTINAJA; E QUANDO AL NUMERO SI AGGIUNGE 297 LA SOMMA È IL NUMERO ROVESCIATO. TROVARE IL NUMERO.

87. Sia x la cifra delle centinaja, sarà $2x$ quella delle unità, perchè questa è doppia di quella secondo il problema: dunque la somma della cifra delle unità, e di quelle delle centinaja è $2x + x$, cioè $3x$: ma la somma delle tre cifre è 11: dunque la cifra delle decine sarà $11 - 3x$. Ora se x è la cifra delle centinaja, $100x$ sarà il valore delle centinaja. Se $11 - 3x$ è la cifra delle decine, $110 - 30x$ (§. 5.) sarà il valore delle decine. Ma il nostro numero deve essere le centinaja, più le decine, più le unità; dunque il numero domandato è espresso dà

$$100x + 110 - 30x + 2x.$$

Secondo il problema se a questo si aggiunge 297 si ottiene il numero rovesciato: dunque si ottiene un numero, di cui la cifra delle centinaja è $2x$, quella delle decine è la stessa $11 - 3x$, e quella delle unità è x , ossia si ottiene il numero $200x + 110 - 30x + x$: sarà dunque

l'equazione $100x + 110 - 30x + 2x + 297 = 200x + 110 - 30x + x$. Trasportando le incognite nel primo membro, e le cognite nel secondo sarà $100x - 200x + 2x - x - 30x + 30x = 110 - 100 - 297$; e riducendo coll'avvertire, che $100x - 200x$ o cento volte x , e meno duecento volte x , superando il negativo, lascia meno cento volte x , o $-100x$, avremo $-99x = -297$, o $99x = 297$, ed $x = \frac{297}{99}$, $x = 3$. Questa è la cifra delle centinaia. Quella delle unità sarà 6, e quella delle decine sarà $11 - 9$, o 2: dunque il numero domandato sarà 326. Se a questo si aggiunga 297 avremo 623, che è il numero 326 rovesciato.

D'UN CAPITALE DI 100000 SCUDI UNA PARTE SI È IMPIEGATA AL FRUTTO DEL 5 PER 100, E L'ALTRA AL 3 PER 100. TUTTO INSIEME AVENDOSI AVUTO UN FRUTTO DI 4640 SCUDI SI VOGLIONO CONOSCERE LE DUE PARTI.

88. Sia x una parte, l'altra sarà $100000 - x$. Se 100 frutta 5, uno frutterà $\frac{5}{100}$, o $\frac{1}{20}$; dunque x frutterà $\frac{x}{20}$. Similmente 100 fruttando 3, uno frutterà $\frac{3}{100}$; dunque $100000 - x$ frutterà $\frac{300000 - 3x}{100}$: ora i due frutti insieme sono 4640: dunque

$$\frac{x}{20} + \frac{300000 - 3x}{100} = 4640,$$

e riducendo allo stesso denominatore

$$5x + 300000 - 3x = 464000,$$

$$2x = 464000 - 300000$$

$$2x = 164000, x = 82000,$$

e l'altra parte sarà 18000.

Il fruttato della prima parte sarà $\frac{1}{20} \cdot 82000$, cioè 4100,

il fruttato della seconda sarà $\frac{3}{100} \cdot 18000$, o 540, che sommato coll'antecedente darà 4640 secondo il problema.

89. Osservando il metodo tenuto per risolvere i problemi antecedenti si vede, che questo consiste in due parti. La prima è di esprimere il problema in equazione, l'altra è di risolvere l'equazione. Riguardo a questa seconda parte le regole sono fisse, e sono date, e consistono nell'isolare l'incognita (§. 81.) Riguardo poi alla prima parte di esprimere il problema in equazione, si è veduto non essersi seguita alcuna regola, ed il metodo, che si è tenuto è stato di esprimere coi segni le relazioni o espresse, o sottintese delle quantità del problema. Queste relazioni poi non erano che alcune, o tutte le quattro operazioni, e l'uguaglianza delle quantità; ad esprimere le quali abbiamo i segni. Così il $+$ esprime la somma; il $-$ la sottrazione; il $.$, o $\times$ la moltiplicazione; e la lineola orizzontale sotto il dividendo, e sopra del divisore, o i due punti verticali fra il dividendo, ed il divisore esprimono la divisione; il segno poi $=$ esprime l'uguaglianza. Per esempio nel problema (§. 84.). Le relazioni delle quantità erano espresse da tre operazioni, ma nel problema (§. 86.) le operazioni erano sottintese nella sua espressione. Così dalla libbra di sale sparsa in libbre $32+x$ di acqua si è dovuto avere l'avvedutezza di esprimere con $\frac{1}{32+x}$ il sale di una libbra, perchè ripetuto questo per 32 si potesse avere il sale di 32 libbre della mescolanza, onde poi farlo uguale ad $\frac{1}{8}$ di libbra, come voleva il problema.

90. Si stabilirà dunque, che *per mettere il problema in equazione la regola è di osservare le operazioni o espresse, o sottintese, colle quali sono collegate le quantità, e queste non essendo*

che quattro, si esprimeranno coi corrispondenti segni. Una relazione poi deve essere destinata ad esprimersi col segno dell'uguaglianza.

91. Questa espressione poi di uguaglianza si fa dopo avere espresso coi segni le operazioni, che il problema indica da farsi sulle sue quantità. Infatti o il problema darà la quantità, cui deve essere uguale l'espressione trovata delle operazioni; ovvero trovate due delle dette espressioni di operazioni il problema mostrerà, che debbono essere equivalenti. Così nel problema (§. 86.) essendosi espresse con $\frac{32}{32+x}$ le operazioni indicate dal problema è risultato, che questa era l'espressione della quantità del sale d'una libbra della mescolanza, ed il problema stesso avendo fissato, che questo sale doveva essere $\frac{1}{8}$ di libbra, si è posto subito $\frac{32}{32+x} = \frac{1}{8}$.

Nel problema poi (§. 84.) essendosi espresse con $2 - \frac{3x}{8}$, ed $x - \frac{1}{7}$ tutte le sue operazioni, il problema stesso indicava, che queste due espressioni erano equivalenti: dunque si è posto $2 - \frac{3x}{8} = x - \frac{1}{7}$.

92. Da ciò si vede, che l'espressione del problema in equazione è una vera traduzione dal linguaggio comune nel linguaggio della matematica. Li segni del linguaggio matematico sono cinque, quattro delle operazioni, ed uno dell'uguaglianza (§. 89.): all'incontro il linguaggio comune dei problemi è assai esteso. Per esempio nella sottrazione si può dire, che il 7 supera il 5 di 2; che il 5 è al di sotto di 7 di due; che la differenza fra 5 e 7 è 2; che una volta si è ricevuto 7, e poi si è speso 5, con che è rimasto 2; e tante altre espressioni consimili; mentre in matematica tutte queste espressioni equivalgono all'unica espressione della sottrazione $7 - 5$. Lo stesso si dica delle

espressioni comuni delle altre tre operazioni. Oltre che vi sono anche operazioni sottintese, o implicite. Tali erano le operazioni fatte, onde $\frac{32}{32+x}$ esprimesse il sale d'una libbra della mescolanza. Se si osservano poi i problemi risolti si vedranno i varii modi o impliciti, o espliciti di esprimere l'uguaglianza nel linguaggio comune. Quindi nell'esprimere i problemi in equazione per fare la traduzione dell'espressioni comuni nei cinque detti segni, fa duopo interpretare l'espressioni stesse per rintracciare i segni, che loro corrispondono.



PROBLEMI

CHE SI SOGLIONO PROPORRE NELLA SOCIETÀ

E TEORIA DELLE PROPORZIONI



93. Una gran parte dei problemi, che si propongono nel commercio sono della così detta *regola del tre semplice, o composta*. Si dicono problemi della regola del tre, perchè date tre quantità si vuol determinare una quarta. Queste quattro quantità tre cognite, ed una incognita formano sempre due quoti uguali: quindi cotali problemi si esprimono sempre con una equazione fra due quoti, e perciò questa equazione contenendo un incognita si potrà trovare col metodo dato di sopra (§. 81.). Per stabilire queste equazioni si debbono fissare alcune proposizioni.

I. *Il quoto delle merci è uguale al quoto dei loro prezzi.* Ciò è chiaro, perchè se una merce, per es. è doppia, tripla, o suddupla, suttripla d'un'altra, anche il prezzo della prima sarà duplo, triplo, sudduplo, suttriplo del prezzo della seconda: quindi la prima merce contenendo due, tre volte la seconda, o viceversa il suo valore essendo con-

tenuto due, tre volte nel valore della seconda, il prezzo della prima conterrà due, tre volte il prezzo della seconda, o viceversa.

II. *Il quoto dei capitali è uguale al quoto dei loro frutti nello stesso tempo tenuti a frutto.* Ciò è chiaro ragionando come innanzi.

III. *Il quoto dei lavori è uguale al quoto delle mercedi dei lavori, tutte le altre cose uguali.*

IV. *Il quoto di due truppe di lavoratori, tutte essendo le altre cose uguali, è uguale al quoto dei loro lavori.* Per esempio se una truppa di lavoratori è quintupla di un'altra, anche il lavoro dei primi sarà quintuplo del lavoro dei secondi: s'intende, che tutti lavorino colla stessa energia, nello stesso tempo, e trovando la stessa difficoltà.

V. *Il quoto delle quantità di due lavori è uguale al quoto dei due tempi, che s'impiegano:* perchè, essendo tutte le altre cose uguali, al lavoro doppio, triplo ec. corrisponde tempo doppio, triplo ec.

VI. *Il quoto di due numeri di lavoratori deve essere uguale al quoto rovesciato dei loro tempi per fare lo stesso lavoro.* Ciò è chiaro, perchè se il primo numero di lavoratori fosse per esempio sei volte il secondo, a fare lo stesso lavoro s'impiegherebbe il sesto del tempo; dunque il primo numero di lavoratori contenendo sei volte il secondo numero, non il tempo dei primi conterrebbe sei volte il tempo del secondo, ma il tempo dei secondi conterrebbe sei volte il tempo dei primi: quindi il numero dei primi lavoratori diviso pel numero dei secondi sarebbe uguale al secondo tempo diviso pel primo: ossia il quoto dei numeri de' lavoratori sarebbe uguale al quoto dei corrispondenti tempi, ma rovesciato.

VII. *Il quoto dei capitali per dare un determinato frutto è uguale al quoto inverso dei tempi, in cui i capitali sono tenuti a frutto.* In fatti più è grande il capitale di un altro,

e meno tempo di questo deve essere tenuto a frutto per produrre lo stesso fruttato. Dopo ciò siano i problemi:

TROVARE IL FRUTTATO DI SCUDI 1894 AL 5 PER CENTO ALL'ANNO.

94. Per la proposizione (II) chiamando x il fruttato sarà $\frac{x}{5} = \frac{1894}{100}$, cioè il quoto dei due fruttati uguaglia il quoto dei due capitali. L'equazione si scioglie col (§. 81.).

TROVARE IL CAPITALE, CHE DIA UN FRUTTO DI SCUDI 89 AL 4 PER 100 ALL'ANNO.

95. Avendo chiamato x il capitale per la (II) sarà

$$\frac{x}{100} = \frac{89}{4}.$$

UN CAPITALE DI SCUDI 7594 IN 7 ANNI HA DATO UN CERTO FRUTTO, SI DOMANDA IL TEMPO, CHE DEBBONO TENERSI A FRUTTO SCUDI 17579, ONDE FRUTTINO LO STESSO.

96. Qui ci dobbiamo servire della proposizione (VII): dunque esprimendo per x il tempo domandato sarà

$$\frac{x}{7} = \frac{7594}{17579}$$

dove è espresso, che il quoto dei capitali è uguale al quoto inverso dei tempi, perchè si è posto il secondo tempo diviso pel primo non uguale al secondo capitale diviso pel primo, ma al primo capitale diviso pel secondo.

SE 57 LAVORANTI HANNO FATTO UN LAVORO DI 179 CANNE, QUANTI LAVORANTI CI FORRANNO PER CANNE 1894.

97. Per la proposizione (IV) sarà

$$\frac{x}{57} = \frac{1894}{179}$$

esprimendo per x i lavoranti del secondo lavoro.

98. Si dice *regola di compagnia* il metodo per risolvere i problemi, nei quali dandosi le somme contribuite da alcuni socii, ed il frutto, che si è ricavato dall'impiego della somma totale, si vuol sapere ciò, che tocca a ciascun socio di questo frutto in ragione di ciò, che ha contribuito.

Per risolvere questi problemi si *faccia la somma delle parziali contribuzioni, allora si avrà la somma totale, ed il suo frutto. Per avere il frutto di ciascun contribuente, il quoto incognito del suo frutto e del frutto totale si farà uguale al quoto del capitale del contribuente diviso pel capitale totale*, perchè, pel (II) principio, il quoto dei frutti uguaglia quello dei capitali. Per esempio: *SIANO TRE CARATANTI, IL PRIMO DEI QUALI ABBIA CONTRIBUITO SCUDI 170, IL SECONDO SCUDI 84, IL TERZO SCUDI 250, ED IL FRUTTATO DEL NEGOZIO IN UN ANNO SIA DI SCUDI 289.*

99. Il capitale totale sarà scudi 504. Chiamando x, y, z i frutti parziali, per trovarli avremo l'equazioni

$$\frac{x}{289} = \frac{170}{504}, \quad \frac{y}{289} = \frac{84}{504}, \quad \frac{z}{289} = \frac{250}{504}$$

Se poi si volesse al quarto per 100 all'anno ha fruttato la somma si stabilirà l'equazione

$$\frac{u}{289} = \frac{100}{504}$$

ove u è il frutto di 100 in un anno essendo 289 il frutto di 504 in un anno.

100. Si dice *regola del tre composta* quando essendo date più di tre quantità si domanda un'incognita, in guisa però, che il problema si possa ridurre a quello della *regola del tre semplice*; ciò che sempre si può fare.

Sia per esempio il problema: *UN CAPITALE DI SCUDI 8579 SI VUOL TENERE A FRUTTO PER TRE ANNI ALLA RAGIONE DEL 5 PER 100; SI DOMANDA IL FRUTTO, CHE DARÀ.*

101. Se questo frutto si volesse in un anno, invece di 3, è evidente, che si dovrebbe triplicare il capitale, perchè il capitale in tre anni è ritenuto tre volte per produrre tre frutti. Questo triplo di capitale è 25737; quindi il problema è ridotto alla regola del tre semplice. Si domanda il fruttato di scudi 25737 in un anno al 5 per cento all'anno. Questo problema è espresso dall'equazione

$$\frac{x}{5} = \frac{25737}{100}$$

UN CAPITALE DI SCUDI 5742 TENUTO A FRUTTO PER 15 MESI MI HA DATO DI FRUTTATO SCUDI 857, SI DOMANDA AL QUANTO PER 100 ALL'ANNO HA FRUTTATO.

102. Affinchè lo stesso frutto 857 provenisse dal dato capitale 5742 tenuto a frutto non per 15 mesi, ma per un mese si dovrebbe ripetere 15 volte, che da 86130. Parimenti il fruttato di 100 in un anno, o in 12 mesi è il fruttato 100. 12 in un mese; il problema dunque è ridotto così alla regola del tre semplice. Si domanda il frutto di 1200 scudi sapendosi, che 86130 ha fruttato scudi 857 nello stesso tempo. Questo problema è espresso dall'equazione

$$\frac{x}{857} = \frac{1200}{86130},$$

ove la x è il fruttato di 100 in un anno.

SUPPOSTO, CHE UN CAPITALE DI SCUDI 843 DEBBA DARE UN FRUTTO DI SCUDI 403 AL 4 PER 100 ALL'ANNO, SI DOMANDA QUANTI ANNI DEVE TENERSI A FRUTTO.

103. Se x è il numero di quest'anni, secondo il problema antecedente $843x$ è il capitale, che in un anno dà il frutto 403 al 4 per 100, dunque sarà l'equazione

$$\frac{843x}{100} = \frac{403}{4},$$

la quale risolta (§. 81.) ci darà il numero x degli anni domandato.

LAVORANTI 23 IN GIORNI 13 DI 10 ORE DI LAVORO AL GIORNO CON UNA DIFFICOLTÀ COME 3 HANNO FATTO 19 CANNE DI LAVORO; DOMANDO IL LAVORO DI 15 LAVORANTI LAVORANDO 23 GIORNI DI 11 ORE AL GIORNO DI LAVORO, CON UNA DIFFICOLTÀ COME 2.

104. Queste difficoltà espresse da 3 e 2 vogliono dire, che come il 3 è una volta e mezza di 2, così una volta è mezza delle seconde difficoltà è la prima. Si riduce con facilità questo problema al caso della regola del tre semplice: dicendo; se i lavoranti, che lavorano 13 giorni per fare il dato lavoro, si volesse, che lo facessero in un solo giorno, è evidente, che si dovrebbe ripetere 13 volte il loro numero, perchè questi lavoranti in 13 giorni in fondo è la forza di questi lavoranti ripetuta 13 volte. Abbiamo dunque 299 lavoranti, che lavorano un giorno; ma questo giorno è di 10 ore di lavoro; dunque se si volesse, che lavorassero in un ora i 299 lavoranti si dovrebbero ripetere 10 volte. Abbiamo dunque lavoranti 2990 in un ora. Questi trovano una difficoltà come 3. Ora il lavoro di 19 canne ha questa difficoltà, considerando dunque questa difficoltà come tre forze da vincersi, e trovandosi queste in ciascuna delle 19 canne, saranno finalmente 19. 3 forze da vincersi, ossia 57 forze.

Andando ai secondi lavoranti, e facendo come innanzi, avremo 3795 lavoranti, che lavorano un'ora. Se x esprima le canne domandate di lavoro, avendo queste la difficoltà 2, equivarranno a forze $2x$ da vincersi. Dopo ciò il problema ridotto alla regola del tre semplice sarà: Se 2990 lavoranti fanno un lavoro di canne 57, qual lavoro $2x$ faranno lavoranti 3795: avremo dunque

$$\frac{2x}{57} = \frac{3795}{2990} .$$

Si può risolvere il proposto problema in altro modo, che può servire in tutti i casi della regola del tre composta; ed è poi bene di avvezzarsi a vedere in più modi le soluzioni degli stessi problemi.

105. Si supponga, che i giorni, le ore di lavoro e la difficoltà dei secondi lavoranti siano gli stessi dei primi; allora il problema sarà: *Se 23 lavoranti fanno 19 canne di lavoro, qual sarà il lavoro di 15 lavoranti.* Avremo

$$\frac{x}{19} = \frac{15}{23}, \text{ ed } x = \frac{15 \cdot 19}{23}.$$

Questo è un lavoro dei secondi lavoranti lavorando come i primi, cioè 13 giorni: dunque si può porre il problema.

Se $\frac{15 \cdot 19}{23}$ è il lavoro fatto dai secondi lavoranti in 13 giorni, qual sarà il lavoro, che faranno in 23 giorni; avremo dunque

$$y : \frac{15 \cdot 19}{23} = \frac{23}{13}, \text{ ed } y = \frac{15 \cdot 19 \cdot 23}{13 \cdot 23}.$$

Ma questo è il lavoro dei secondi lavoranti lavorando come i primi 10 ore al giorno: dunque diremo: *Se i secondi lavoranti lavorando 10 ore al giorno fanno il lavoro $\frac{15 \cdot 19 \cdot 23}{13 \cdot 23}$, qual lavoro faranno lavorando 11 ore al giorno: dunque*

$$y : \frac{15 \cdot 19 \cdot 23}{13 \cdot 23} = \frac{11}{10}, \text{ ed } y = \frac{15 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 11}{13 \cdot 23 \cdot 10}:$$

Ma questo lavoro incontra la difficoltà 3 dei primi lavoranti: dunque diremo: *Se incontrando la difficoltà 3 si fa dai secondi lavoranti un lavoro $\frac{15 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 11}{13 \cdot 23 \cdot 10}$, qual lavoro*

si farà incontrando la difficoltà 2. Si avverta, che il quoto dei lavori deve essere uguale al quoto rovesciato delle difficoltà, perchè se una difficoltà per es. è quintupla d'un'altra, si farà meno lavoro, che sarà il quinto del secondo lavoro corrispondente alla seconda difficoltà: sarà dunque

$$u : \frac{15. 19. 23. 11}{13. 23. 10} = \frac{3}{2}, \text{ ed } u = \frac{15. 19. 23. 11. 3}{13. 23. 10. 2},$$

ossia

$$x = \frac{216315}{5980},$$

e difatti nella soluzione antecedente (§. 104.) avevamo

$$\frac{2x}{57} = \frac{3795}{2990},$$

dalla quale (§. 81.)

$$x = \frac{3795 \cdot 57}{2990 \cdot 2}, \text{ o } x = \frac{246315}{5980}.$$

Questi problemi di società si risolvono con altro metodo, che è il *metodo delle proporzioni*. Sviluppiamolo.

106. Il quoto di due quantità si dice ragione, o rapporto geometrico delle quantità stesse; così il quoto $\frac{2}{3}$ è la ragione,

o rapporto geometrico fra 2 e 3: così anche il quoto dei valori delle merci, delli prezzi, dei lavori dicesi la ragione, o il rapporto geometrico delle merci, dei prezzi, dei lavori. *L'uguaglianza di due quoti, o di due ragioni si dice proporzione geometrica*, e le quattro quantità, che formano i due quoti uguali si dicono essere in proporzione geometrica: così il 2 al 6 avendo lo stesso rapporto del

4 al 12, questi quattro numeri sono in proporzione geometrica, che si esprime coll'uguaglianza di divisioni $\frac{2}{6} = \frac{4}{12}$, o $\frac{6}{2} = \frac{4}{12}$. Più comunemente coll'altro segno della divisione si scrive $2:6 = 4:12$, e si legge *due sta a sei, come quattro sta a dodici*, che vuol dire, che il 2 entra nel 6 tante volte quante il 4 entra nel 12. I numeri primo, e quarto si dicono *termini estremi*, o *estremi* della proporzione; i termini secondo e terzo si dicono *termini medii*, o *medii* della proporzione. Nel nostro caso i numeri 2, 12 sono gli estremi, il 6 e 4 sono i medii. Il 2 si dice *antecedente della prima ragione*, e 6 *conseguente della prima ragione*. Dei due termini 4, 12 il primo si dice *antecedente della seconda ragione*, e l'altro *conseguente della seconda ragione*.

107. Nella proporzione il prodotto degli estremi è uguale al prodotto dei medii. Infatti il primo diviso pel secondo numero è uguale al terzo diviso pel quarto. Ora se le due frazioni uguali si riducono allo stesso denominatore riescono (§.85.) i numeratori uguali: ma è evidente, che nella riduzione delle due frazioni allo stesso denominatore riesce per numeratore del primo membro il prodotto del numeratore della prima frazione pel denominatore della seconda, o il prodotto del primo termine della proporzione pel quarto, o il prodotto degli estremi della proporzione; e per numeratore del secondo membro viene il prodotto del numeratore della seconda frazione pel denominatore della prima, o il prodotto del terzo termine della proporzione pel secondo, o finalmente il prodotto dei medii della proporzione stessa: dunque in questa il prodotto degli estremi è uguale al prodotto dei medii.

Ciò si vede nella proporzione $2:6=4:12$, che è la stessa che $\frac{2}{6} = \frac{4}{12}$. Riducendo le due frazioni allo stesso de-

nominatore, il primo numeratore è 2 . 12, ed il secondo 4. 6; il primo è il prodotto degli estremi, l'altro dei medii, ed intanto questi numeratori debbono essere uguali (§. 85.), come lo sono di fatto.

108. Se una espressione ha i due termini medii uguali si dice *proporzione continua*, ed il termine comune si dice *medio proporzionale dei due estremi*. Se si ha la proporzione $5 : 15 = 15 : 45$ questa è proporzione continua, ed il 15 si dice medio proporzionale di 5, e 45.

109. In una proporzione se è incognito un estremo *esso è uguale al prodotto dei medii diviso per l'altro estremo*; ed un *medio incognito è uguale al prodotto degli estremi diviso per l'altro medio*.

Sia $x : 7 = 5 : 20$ sarà (§. 107.)

$$20 x = 7 . 5 , \quad \text{ed} \quad x = \frac{7 . 5}{20} ,$$

che è il primo teorema. Se poi $3 : x = 6 : 9$ avremo

$$6x = 3 . 9 , \quad \text{ed} \quad x = \frac{3 . 9}{6} ,$$

secondo teorema.

110. Ciò posto, nei problemi, che occorrono comunemente nella società, essendo per es. il quoto delle merci uguale al quoto dei loro prezzi, le merci si diranno essere in proporzione coi loro prezzi. Così i lavoranti saranno in proporzione coi lavori rispettivi, o proporzionali ai lavori rispettivi, e così degli altri casi.

111. Quando due quantità di una specie, per esempio due capitali, fra loro cresceranno, o decresceranno come due altre grandezze della stessa specie, e loro corrispondenti, come i fruttati dei detti capitali, allora si dirà, che le due prime quantità sono in ragione diretta delle due altre. Così nel nostro caso i capitali sono in ragione diretta dei loro fruttati; e ciò perchè il quoto dei capitali

uguaglia il quoto dei loro frutti rispettivi, e nella proporzione tra i due capitali, ed i loro frutti l'antecedente della prima ragione essendo un capitale, l'antecedente della seconda ragione sarà il suo frutto; così al conseguente della prima ragione, che è il secondo capitale, corrisponderà il suo frutto come conseguente della seconda ragione.

112. Se poi due grandezze di una stessa specie siano tali, che al crescere per esempio della prima rispetto la seconda, di due altre grandezze della stessa specie loro corrispoudenti la prima decresca rispetto la seconda, allora *le due prime grandezze si dicono essere in ragione inversa delle due altre*. Per esempio i capitali sono in ragione inversa dei tempi, nei quali debbono rimanere a frutto per dare lo stesso frutto, perchè se il primo capitale sia per esempio triplo del secondo, deve rimanere a frutto il terzo del tempo, che vi sta il secondo capitale per dare lo stesso frutto. Si dicono poi i due capitali in ragione inversa dei loro tempi, perchè si deve (§. 93, VII) uguagliare il quoto dei primi al quoto rovesciato dei secondi. In questo caso dunque si debbono invertire i due secondi termini della proporzione, e dire il primo capitale sta al secondo come il tempo del secondo sta al tempo del primo.

Dopo queste riflessioni risolviamo colle proporzioni i problemi di società della regola del tre semplice, e composta risolti di sopra per esercizio delle operazioni aritmetiche (§. 61, 62 ... 71.).

SI VOGLIA DETERMINARE AL QUANTO PER 100 HA FRUTTATO UNA SOMMA DI SCUDI 456 AVENDO DATO UN FRUTTO DI SCUDI 23.

113. Essendo i capitali in ragione diretta dei loro frutti faremo la proporzione

$$456 : 100 = 23 : x \quad \text{ed} \quad x = \frac{23 \cdot 100}{456} .$$

SE SCUDI 179 SONO STATI TENUTI A FRUTTO PER ANNI 23,

ONDE DARE UN FRUTTATO, QUANTI ANNI SI DOVRANNO TENERE A FRUTTO SCUDI 2574 PER DARE LO STESSO FRUTTATO.

I capitali (§. 112.) sono in ragione inversa dei tempi, che sono tenuti a frutto per dare lo stesso frutto: dunque nella proporzione del nostro problema si dovranno invertire i due secondi termini, ed avremo

$$179 : 2574 = x : 23, \quad \text{ed} \quad x = \frac{23 \cdot 179}{2574}.$$

114. Due numeri di misure, di pesi, di monete per equivalere l'uno all'altro sono in ragione inversa dei valori delle loro unità. Supponiamo infatti, che per es. una moneta in valore sia triplo di un'altra moneta, il numero della prima per equivalere ad un numero della seconda dovrà essere il terzo di questo, perchè tanto è più grande la prima moneta della seconda, e altrettanto minor numero della prima ci vorrà per uguagliare il numero della seconda. Dopo ciò siano i problemi.

IL PALMO DI PASSETTO ROMANO È AL PALMO MERCANTILE ROMANO PROSSIMAMENTE COME 4016 A 4476 : DOMANDO QUANTI PALMI MERCANTILI FARANNO PALMI 173 DI PASSETTO.

Porremo la proporzione

$$4476 : 4016 = 173 : x \quad \text{ed} \quad x = \frac{173 \cdot 4016}{4476}.$$

LA MONETA D'ARGENTO DI CINQUE FRANCHI È ALLA PIASTRA ROMANA NELLA RAGIONE DI 23 A 25; DOMANDO PIASTRE 179 QUANTE MONETE DI CINQUE FRANCHI DARANNO.

Porremo

$$23 : 25 = 179 : x$$

115. Nei problemi della regola di compagnia (§. 98.) il quoto del frutto di ciascuna somma dei contribuenti diviso pel frutto totale dovendo essere uguale al quoto di

ciascuna somma divisa per la somma totale, risolvendo questi problemi colle proporzioni si dirà (§. 106.) *il frutto di una somma parziale sta al frutto totale come la somma parziale sta alla somma totale.* Diamo dopo ciò problemi di regola composta di compagnia.

SI SONO UNITI TRE NEGOZianti. IL PRIMO HA DATO SCUDI 200 PER 3 ANNI, L'ALTRO SCUDI 17 PER 15 MESI, ED IL TERZO SCUDI 59 PER 13 MESI E 25 GIORNI. DAL NEGOZIATO SI È RICAVATO UN FRUTTO DI SCUDI 759; SI DOMANDA QUANTO DEVE AVERE CIASCUNO IN RAGIONE DELLA SOMMA POSTA, E DEL TEMPO, CHE L'HA TENUTA A FRUTTO.

116. È necessario di ridurre tutti i tempi a giorni. Ora il primo, che deve avere il fruttato di 200 scudi in tre anni dovrebbe avere lo stesso fruttato in un giorno se ponesse la somma $200 \cdot 1095$, o la somma 219000. Il secondo dovrebbe porre la somma di scudi 17. 450, o scudi 7650 in un giorno per avere il frutto di scudi 17 in 15 mesi. Il terzo ha il suo frutto col porre in un giorno scudi 59. 415, o scudi 24485. Ora si sommeranno i tre capitali trovati, e si dirà (§. 105.): *capitale totale sta a ciascun capitale parziale trovato, come il frutto totale al frutto parziale.* E così con tre proporzioni si troveranno i tre fruttati.

Si sono supposti tutti gli anni di 365 giorni, ed i mesi di 30 giorni.

TRE SI POSERO IN SOCIETÀ PER 3 ANNI. IL PRIMO POSE SCUDI 120, MA DOPO 7 MESI TOLSE 50. IL SECONDO POSE SCUDI 300, E DOPO 11 MESI LEVÒ SCUDI 100. IL TERZO POSE SCUDI 112, MA DOPO 15 MESI TOLSE 60. IL FRUTTATO DEL NEGOZIATO È STATO SCUDI 380. SI DOMANDA QUANTO NE TOCCA A CIASCUNO.

117. Il primo tenne a frutto scudi 120 per 7 mesi: dunque pose un capitale 120. 7 o 840 in un mese. Tolsè 50 da 120 e gli rimasero scudi 70 a fruttare nei mesi 36-7, o 29: dunque il capitale 70 fruttò in 29 mesi, come scudi 70. 29 ossia scudi 2030 fruttano in un mese. Sommando

questo con scudi 840 avremo, che il primo pose a frutto scudi 2870 in un mese. Lo stesso si faccia per gli altri due, ed avremo tre capitali parziali, dai quali ricaveremo il capitale totale. Avendo poi il frutto totale, si faranno le proporzioni come nella regola semplice di compagnia (§. 115.).

DUE SI UNIRONO IN SOCIETÀ PER 3 ANNI. IL PRIMO DETTE SCUDI 1000, E DOPO 16 MESI LEVÒ 200 SCUDI, MA DOPO 6 MESI POSE SCUDI 70. IL SECONDO DETTE SCUDI 60; DOPO 11 MESI AGGIUNSE SCUDI 40: MA DOPO 13 MESI TOLSE SCUDI 30. AVENDOSI AVUTO DAL NEGOZIATO SCUDI 380, SI DOMANDA QUANTO DEVE AVERE CIASCUNO DI QUESTO FRUTTO.

118. Il primo pose a frutto scudi 1000. 16, o 16000 in un mese. Avendo levati 200 li 800 restanti furono posti a frutto per 6 mesi; dunque pose a frutto 4800 scudi in un mese. Ponendo dopo sei mesi scudi 70 cogli 800 daranno scudi 870, i quali tenendosi a frutto per 14 mesi, per avere il frutto in un mese si dovrà impiegare la somma di scudi 12180. Raccogliendo le tre somme il primo impiega in un mese scudi 32980. Si troverà, che il secondo nello stesso tempo d'un mese impiegherà scudi 2380. Adesso il problema è ridotto alla regola semplice di compagnia.

119. Alla regola di compagnia si riducono i problemi di dividere una somma in parti, che abbiano tra loro il rapporto di dati numeri. Si proponga

DIVIDERE SCUDI 1300 TRA QUATTRO PERSONE IN GUIA, CHE LA SECONDA ABBAIA IL TRIPLO DELLA PRIMA; CHE LA TERZA ABBAIA TANTO QUANTO LA PRIMA, E LA SECONDA; E CHE LA QUARTA ABBAIA IL DOPIO DELLA PRIMA E DELLA TERZA INSIEME.

Se sia 1 la parte della prima, quella della seconda sarà 3, quella della terza sarà 4, e la quarta avrà 10. Si sommino queste parti, ed avremo 18. È evidente, che quello, che è ciascuna delle parti, 1, 3, 4, 10 rispetto il totale 18, dovrà essere ogni real parte delle quattro persone del problema rispetto la data somma 1300. Avremo dunque le proporzioni

$$18 : 1 = 1300 : x$$

$$18 : 3 = 1300 : y$$

$$18 : 4 = 1300 : z$$

$$18 : 10 = 1300 : u$$

È STATA LASCIATA UN EREDITÀ DI SCUDI 10070 A TRE PERSONE IN GUISA, CHE LA PRIMA NE ABEIA $\frac{1}{2}$, LA SECONDA $\frac{1}{4}$, LA TERZA $\frac{1}{3}$: SI DOMANDANO LE TRE PARTI.

120. Le tre frazioni ridotte allo stesso denominatore sono $\frac{6}{12}$, $\frac{3}{12}$, $\frac{4}{12}$, e la loro somma è $\frac{13}{12}$. Ora è evidente, che il rapporto delle tre frazioni $\frac{6}{12}$, $\frac{3}{12}$, $\frac{4}{12}$ al totale $\frac{13}{12}$ è il rapporto delle tre parti del problema al tutto 10070; ma i rapporti, o quoti di frazioni dello stesso denominatore è quello dei numeratori (§. 44.): dunque i rapporti dei numeri 6, 3, 4 al 13 saranno i rapporti delle parti domandate all'eredità: avremo dunque le proporzioni

$$13 : 6 = 10070 : x$$

$$13 : 3 = 10070 : y$$

$$13 : 4 = 10070 : z$$

UN TALE DÀ AD UN ALTRO UN CAPITALE DI SCUDI 1749 A PATTO, CHE GLI FRUTTI IL 5 PER 100 ALL'ANNO; SI DOMANDA QUAL SOMMA TRA CAPITALE E FRUTTO DOVRA' RICEVERE IL PRIMO DAL SECONDO ALLA FINE DELL'ANNO.

121. È certo, che se il primo avesse dato al secondo 100 scudi alla fine dell'anno tra capitale e frutto dovrebbe riscuotere 106 scudi: potremo dunque stabilire la proporzione:

$$100 : 106 = 1749 : x, \quad \text{ed} \quad x = \frac{1749 \cdot 106}{100},$$

deve dunque ricevere 1853, 94 : dunque ha guadagnato scudi 104. 94. Per vedere, che questo frutto è giusto basterà istituire la proporzione

$$100 : 6 = 1749 : x \quad \text{ed} \quad x = 104. 94.$$

UN TALE DA' AD UN ALTRO LA SOMMA DI SCUDI 143 PER 28 MESI, CON PATTO CHE GLI FRUTTI ALLA RAGIONE DEL 6 PER 100 ALL'ANNO: SI DOMANDA QUAL SOMMA DOVRÀ RIPRENDERE FRA CAPITALALE E FRUTTO DOPO IL DATO TEMPO.

122. Li 100 scudi dando il fruttato 6 in un anno lo daranno in un mese se diventeranno 100. 12, o scudi 1200. Così ancora moltiplicando il capitale 143 per 28 il risultamento 4004 sarà il capitale, che dà il frutto in un mese : dunque porremo il problema. *Se scudi 1200 dopo un mese danno un frutto 6, qual frutto daranno dopo lo stesso tempo scudi 4004 ? Porremo dunque*

$$1200 : 6 = 4004 : x \quad \text{ed} \quad x = \frac{6 \cdot 4004}{1200} = 20, 02 ,$$

Dunque il frutto è stato di scudi 20, 02. Dunque dovrà prendere tra capitale e frutti scudi 163. 02.

UN TALE DEVE AD UN ALTRO SCUDI 134 DOPO UN' ANNO. ORA IL SECONDO DICE AL PRIMO, CHE SE ORA GLI PAGA IL DEBITO GLI FA UN RIBASSO, O COME SI DICE GLI DA' UNO SCONTO DEL 4 PER 100 ALL' ANNO. CONTENTANDOSI DI CIÒ IL PRIMO QUANTO DEVE DARE AL SECONDO.

123. Qui si vede, che se alla fine dell'anno dovesse dare 104, ora deve 100 : dunque si farà la proporzione

$$104 : 100 = 134 : x \quad \text{ed} \quad x = \frac{13400}{104} .$$

UN TALE DEVE AD UN ALTRO SCUDI 129 DOPO 35 MESI : ORA SE PAGA ADESSO IL SUO DEBITO IL SECONDO OFFRE AL PRI-

NO LO SCONTO DEL 3 PER 100 ALL'ANNO; SI DOMANDA QUANTO ORA DEVE PAGARE IL PRIMO.

124. Si dirà. Se 3 è il fruttato di 100 in un anno o 12 mesi qual sarà il suo fruttato in 35 mesi. Porremo dunque la proporzione

$$12 : 3 \Rightarrow 35 : x \text{ ed } x = \frac{3 \cdot 35}{12} = \frac{35}{4} = 8.75.$$

Dunque scudi 100 dopo 35 mesi sono tra capitale, e frutto scudi 108.75 : dunque se il primo dovesse al secondo dopo 35 mesi scudi 108.75 secondo il patto, ora dovrebbe scudi 100 : dunque (§. 121.)

$$100 : 108.75 = x : 129, \text{ ed } x = \frac{12900}{108.75} = 118,62 \text{ prossimamente.}$$

125. I problemi risolti nel (§. 121, 122.) sono problemi detti in società, *quesiti di merito, o di meritare* : i problemi risolti nel (§. 123, 124.) si dicono *quesiti di scontare, o di sconto*. Si vede poi chiaro, che i secondi sono inversi dei primi; perchè nei primi da una somma attuale si vuol ricavare la somma, che si deve ricevere dopo un dato tempo, che è la prima più il frutto del dato tempo; negli altri da una somma, che si deve pagare dopo un dato tempo si vuole la somma attuale, che si deve dare, che è la prima diminuita dei frutti del tempo dell'anticipazione del pagamento.

126. Si vede poi chiaro, che il problema di sconto può servire di prova al problema di merito, e viceversa. Perchè se nel problema di merito si scambia la sorte attuale nella sorte dopo un dato tempo, e viceversa, si domanda allora non cosa diventa una somma attuale dopo un dato tempo, ma viceversa cosa è attualmente una somma che sarà tale quale ora si assegna dopo un dato tempo; lo che è problema di sconto. Allo stesso modo nei problemi di sconto se la somma pagabile dopo un dato tempo si dice

quella, che diviene la somma attuale messa a frutto nello stesso tempo avremo il problema di merito.

Per esempio se si vuol sapere cosa sarà la sorte ed il frutto di una somma di scudi 73 dopo un anno fruttando alla ragione del 5 per 100, porremo

$$100 : 105 = 73 : x \text{ e troveremo scudi } x = 76,65.$$

Adesso si dica : dovendosi dopo un anno una somma di scudi 76. 65, domando cosa si deve ora avendo uno sconto del 5 per 100. Porremo in tal caso

$$105 : 100 = 76.65 : x, \text{ ed } x = \frac{7665}{105} = 73 .$$

127. In una parola se il frutto di 100 è 5 nella regola di meritare ponendo la ragione 100 : 105 nell'altra ragione della proporzione faremo corrispondere al 100 la somma attuale data, ed al 105 la somma incognita, che diventa dopo un anno. Al contrario nella regola di sconto posto 5 lo sconto di un anno, e scritta la stessa ragione 100 : 105, nell'altra ragione della proporzione faremo corrispondere al 100 la somma attuale incognita, ed al 105 la somma data, che deve essere tale dopo un anno.

Lo stesso si dica nelle due specie di problemi se la somma è data a fruttare in più d'un anno, o si deve scontare anteriormente a più d'un anno.

LAVORANTI 7 LAVORANDO 6 GIORNI DI 8 ORE DI LAVORO AL GIORNO HANNO FATTO UNO SCAVO DI PALMI 73: SI DOMANDANO I PALMI SCAVATI DA 13 LAVORANTI LAVORANDO 11 GIORNI DI 7 ORE DI LAVORO.

128. Supponiamo, che i giorni e le ore dei secondi lavoratori siano gli stessi dei primi, allora diremo: se 7 lavoratori in 6 giorni hanno fatto uno scavo di palmi 73, domando il lavoro di 13 lavoratori nelli stessi giorni : avre-

mo dunque per la ragione diretta dei lavoranti ai lavori

$$7 : 13 = 73 : x, \text{ ed } x = \frac{13 \cdot 73}{7}$$

Adesso diremo se in 6 giorni si fa un lavoro $\frac{13 \cdot 73}{7}$

qual lavoro si farà in 11 giorni. I lavori sono in ragione diretta dei giorni, perchè più giorni, più lavoro, e viceversa : dunque

$$\frac{13 \cdot 73}{7} : x = 6 : 11, \text{ ed } x = \frac{13 \cdot 73 \cdot 11}{7 \cdot 6}$$

e questo sarà il lavoro di 13 lavoranti lavorando 11 giorni, ma di ore 8 di lavoro : dunque si può proporre il pro-

blema: se al lavoro $\frac{13 \cdot 73 \cdot 11}{7 \cdot 6}$ corrispoudono 8 ore di lavoro, qual lavoro si farà, che corrisponda a 7 ore.

Qui pure i lavori sono in ragione diretta delle ore , avremo dunque

$$\frac{13 \cdot 73 \cdot 11}{7 \cdot 6} : x = 8 : 7, \text{ ed } x = \frac{13 \cdot 73 \cdot 11 \cdot 7}{7 \cdot 6 \cdot 8} .$$

LAVORANTI 12 IN 4 GIORNI, DI 7 ORE DI LAVORO CON UNA DIFFICOLTÀ COME 5 HANNO LAVORATO CANNE 25 : DOMANDO I GIORNI DI LAVORO PER FARSI CANNE 45 DA 73 LAVORANTI LAVORANDO 9 ORE AL GIORNO, E TROVANDO UNA DIFFICOLTÀ COME 11.

129. Per i secondi lavoranti sia tutto come i primi. Allora avremo il problema. Se per lavoranti 12 si richieggono 4 giorni, quanti giorni si richiederanno per 73 lavoranti. Qui i giorni sono in ragione inversa dei lavoranti, perchè più lavoranti, e meno giorni si richieggono per fare un dato lavoro, e viceversa ; dunque sarà

$$12 : 73 = x : 4, \text{ ed } x = \frac{12 \cdot 4}{73}$$

Questi sono i giorni dei secondi lavoranti, ma lavorando 7 ore al giorno, che sono le ore dei primi. Si deve dunque trovare il numero dei giorni lavorando 9 ore al giorno. Ora li giorni di lavoro sono in ragione inversa dalle ore di lavoro giornaliero, perchè più ore si lavorano al giorno, e meno giorni si richieggono; sarà dunque:

$$\frac{12.4}{73} : x = 9 : 7, \text{ ed } x = \frac{12.4.7}{73.9}.$$

Questi giorni sono per un lavoro, che incontra la difficoltà 5 dei primi: si debbono dunque trovare i giorni, che corrisponderanno alla difficoltà 11 dei secondi. Ora le difficoltà sono in ragione diretta de'tempi, perchè più difficoltà richiede più tempo, e viceversa; avremo dunque

$$\frac{12.4.7}{73.9} : x = 5 : 11, \quad x = \frac{12.4.7.11}{73.9.5}.$$

Questi giorni sono pel lavoro dei primi di 25 canne, dunque si debbono trovare i giorni per le canne 45. Ora i lavori sono come i tempi, dunque

$$\frac{12.4.7.11}{73.9.5} : x = 25 : 45, \text{ ed } x = \frac{12.4.7.11.45}{73.9.5.25}$$

130. Questi sono metodi ragionati per risolvere i problemi della regola del tre composta: ecco poi il metodo pratico generale per consimili problemi.

PROBLEMA PRIMO (§. 128.)

pal.	pal.	lav.	lav.
x ,	73 ,	13 ,	7
		gio.	gio.
		11	6
		ore	ore
		7	8

PROBLEMA SECONDO (§. 129.)

gio.	gio.	lav.	lav.
x ,	4 ,	73 ,	12
		can.	can.
		45	25
		ore	ore
		9	7
		diff.	diff.
		11	5

131. Si scrivono, come qui sopra, l'una dopo l'altra le quantità, che si domanda, e la corrispondente quantità cognita, come sono i palmi nel primo problema, ed i giorni di lavoro nel secondo. Si scriva poi una colonna delle quantità corrispondenti all'incognita come sono nel primo problema i lavanti, i giorni, e le ore di lavoro, e poi un' altra colonna delle quantità analoghe corrispondenti alla cognita. Si osservino le quantità delle due colonne se sono in ragione diretta o inversa delle quantità incognita e cognita corrispondenti. Se siano in ragione diretta, come nel primo problema, si farà la proporzione, l'incognita sta alla cognita come il prodotto di tutte le quantità della prima colonna sta al prodotto di quelle della seconda.

Così nel primo problema stabiliremo

$$x : 73 = 13 \cdot 11 \cdot 7 : 7 \cdot 6 \cdot 8, \text{ ed } x = \frac{73 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 7}{7 \cdot 6 \cdot 8}$$

risultamento concorde con quello avuto dal ragionamento (§. 128.).

132. Se poi nelle due colonne vi siano quantità in ragione inversa dell'incognita, e cognita corrispondenti, si scriverà la proporzione. L'incognita sta alla cognita, come il prodotto di tutte le quantità in ragione diretta della prima colonna moltiplicato per tutte le quantità in ragione inversa della seconda colonna, sta al prodotto di tutte le quantità in ragione diretta della seconda colonna moltiplicato per tutte le quantità in ragione inversa della prima colonna. Per esempio nel secondo problema le quantità in ragione diretta dei giorni di lavoro sono le canne e le difficoltà del lavoro, e quelle, che sono in ragione inversa, sono gli operaj e le ore di lavoro : dunque si farà la proporzione

$$\begin{array}{ccccccc} & c. & di & lav. & or. & c. & d. & lav. & or. \\ x : 4 = & 45 & \cdot & 11 & \cdot & 12 & \cdot & 7 & : 25 \cdot 5 \cdot 73 \cdot 9, \end{array}$$

d'onde

$$x = \frac{4 \cdot 45 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 7}{25 \cdot 5 \cdot 73 \cdot 9}$$

che è lo stesso risultamento del secondo problema risoluto con ragionamento (§. 129.).

SCUDI 789 POSTI A FRUTTO PER 17 MESI HANNO FRUTTATO
SCUDI 139, DOMANDO AL QUANTO PER 100 ALL'ANNO HANNO
FRUTTATO.

133. Si faccia il prospetto (§. 131.)

frut.	frut.	cap.	cap.
$x,$	139,	100,	789
		mesi	mesi
		12,	17

I frutti sono in ragione diretta dei capitali, e del tempo: dunque (§. 131.)

$$x : 139 = 100.12 : 789.17.$$

SI DOMANDA IL CAPITALE PER DARE UN FRUTTO DI SCUDI 300 IN 8 ANNI ALLA RAGIONE DEL 5 PER 100 ALL'ANNO.

134. Qui il prospetto è

cap.	cap.	fru.	fru.
x ,	100,	300,	5
		an.	an.
		8,	1

I capitali sono in ragione diretta dei frutti (§. 111.), ed inversa dei tempi (§. 112.), dunque (§. 132.)

$$x : 100 = 300.1 : 5.8.$$

135. Supponiamo ora, che nel problema, che pone la relazione tra il capitale, il suo fruttato, ed il fruttato di un capitale 100, capitale, che si fissa comunemente nella società per norma legale dei frutti, invece dei numeri si fissassero simboli generali senza stabilire alcun particolare valore. Supponiamo, che il capitale si esprimesse per C , prima lettera della parola capitale, per F si esprimesse il suo frutto, e finalmente per f il frutto di scudi 100. Si farebbe la proporzione $C : 100 = F : f$; cioè i capitali sono come i frutti. Stabiliamo, che il prodotto delle quantità espresse da due lettere sia indicato dall'unione delle due lettere. Così il prodotto di Cf sia espresso da Cf , mentre l'indizio della moltiplicazione da farsi sia il solito $C.f$, o $C \times f$. Facendo ora il prodotto dei medii e degli estremi avremo

$$100.F = f.C, \text{ o } 100F = fC$$

L'equazione avuta $100F = fC$ senza stabilire per ogni caso la proporzione, e quindi formare l'equazione ci servirebbe subito per trovare qualunque incognita di cotali problemi. Si vede, che in questi problemi tra capitali e frutti tre sono le quantità, delle quali due si debbono dare per trovare la terza, cioè il frutto di 100, il capitale, ed il suo frutto.

Per esempio se si volesse sapere al quanto per 100 frutta una somma di scudi 187, che dà un fruttato di scudi 79, basterebbe porre nella equazione

$$C = 187, F = 79,$$

e per trovare f avremmo

$$187 \cdot f = 7900, \text{ o } (\S. 79.) f = \frac{7900}{187}$$

quantità domandata.

Se si domandasse il capitale per avere un fruttato di scudi 73 al 4 per 100, si porrebbe

$$F = 73, f = 4,$$

ed avremmo

$$100 \cdot 73 = 4C, C = \frac{7300}{4}.$$

136. Sia f il frutto di 100 in un anno, C un capitale, che frutti F in A anni; colleghiamo queste quantità. Proponiamo perciò il problema.

TROVARE IL FRUTTO F DI UN CAPITALE C TENUTO A FRUTTO ANNI A ALLA RAGIONE DI FRUTTO f PER 100.

Si farà il prospetto (§. 131.)

$$\begin{array}{cccc} F, & f, & C & 100 \\ & & A & 1 \end{array}$$

Porremo dunque

$$F : f = CA : 100$$

e $100 F = CAf$

qui date tre delle 4 quantità F , C , A , f si può trovare la quarta.

Se dato un capitale di scudi 400 si volesse il suo frutto dopo 9 anni alla ragione del 3 per 100 all'anno, si avrebbe $C = 400$, $A = 9$, $f = 3$, e quindi l'uguaglianza superiore diverrebbe $100 F = 400 \cdot 9 \cdot 3$, ed $F = 108$.

137. Colleghiamo per mezzo dei simboli generali gli elementi del problema dei lavoratori, lavori, e tempi, che s'impiegano, colle difficoltà che s'incontrano. Si dica dunque n un numero di lavoratori, g i giorni che impiegano, o le ore, che lavorano al giorno, l il lavoro che fanno, d la difficoltà che incontrano. Si ammettano poi le stesse lettere accentandole per un' altro numero di lavoratori, potremo fare lo specchio (§. 131.)

	gior.	
n , n' ,	g	g'
	ore	
o		o'
	dif.	
d		d'
	la.	
l		l'

È evidente che i numeri de' lavoratori sono in ragione diretta dei lavori delle difficoltà, ed inversa dei giorni e delle ore di lavoro, dunque (§. 132.) avremo

$$n : n' = dl'g'o : d'lgo ;$$

dunque (§. 107.)

$$nd'lgo = n'dlg'o' .$$

Con questa equazione si potrebbero subito risolvere tutti i problemi, nei quali si dessero nove delle dieci quantità, che vi entrano per sapere la decima. Ciò arreca facilità, e speditezza, perchè risparmia l'investigare le quantità in ragione diretta ed inversa, lo stabilimento della proporzione, ed il formare l'equazione per trovare l'incognita.

138. Si vede da ciò, che se tutte le quantità dei diversi problemi, e le operazioni, che le legano si esprimessero con simboli generali non sarebbe necessario di stabilire l'equazioni nei diversi problemi, che solo differissero per li diversi valori delle quantità; e supponendo ora l'una, ora l'altra delle stesse quantità come incognita si potrebbero risolvere tutti i problemi, che successivamente supponessero incognite tutte le loro quantità.

Per esempio coll'equazione antecedente si potrebbero subito trovare i valori o dei lavoranti, o dei giorni di lavoro, o delle ore in cui si lavora, o delle difficoltà, o dei lavori dell'una o dell'altra truppa di lavoranti quando si desse il valore di tutte le altre quantità.

Sia ancora per es. *SI SONO UNITI TRE MERCANTI. IL PRIMO HA DATO UNA SOMMA s , CHE HA TENUTO A FRUTTO PER MESI m , IL SECONDO HA DATO UNA SOMMA s' , CHE HA TENUTO A FRUTTO PER MESI m' ; IL TERZO HA DATO UNA SOMMA s'' , CHE HA TENUTO A FRUTTO PER MESI m'' . IL FRUTTATO DI TUTTA LA SOMMA È STATO F . COLLEGARE INSIEME TUTTE QUESTE QUANTITÀ.*

139. A questo fine si domandi il frutto di ciascuno in ragione della somma, che ha posto a frutto, e del tempo in cui l'ha tenuto a frutto. Siano f, f', f'' questi frutti parziali.

Il primo che ha posto a frutto una somma s per m mesi è lo stesso (§. 101.), che avesse posto a frutto la somma ms in un mese. Ora la somma totale è $s + s' + s''$. Ecco dunque il problema pel primo dei socii.

Una somma $s + s' + s''$ ha dato un frutto F , qual frutto f darà la somma sm . I frutti sono come i capitali (§. 111.),

dunque

$$s + s' + s'' : sm = F : f,$$

$$(s + s' + s'')f = Fsm$$

e per gli altri due socii

$$(s + s' + s'')f' = F's'm'$$

$$(s + s' + s'')f'' = F''s''m''$$

che sono l'equazioni, che collegano tutti gli elementi del problema proposto; li quali elementi essendo 10, qualora sian dati i valori di 7, colle tre equazioni superiori si potranno trovare i valori degli altri tre, che rimangono.

Per dare uno dei diversi problemi, che si potrebbero risolvere colle formole antecedenti, si supponga, che cognita la somma totale di scudi 1899 da mettersi a frutto da tre socii, ed il frutto totale di scudi 954 da ricavarli, si volesse la somma da contribuirsi da ciascuno con questo, che il primo tenga a frutto la sua somma in 3 mesi, il secondo in 5, ed il terzo in 7, ed il primo ricavi di frutto scudi 354, il secondo 200, e il terzo 400. Pel primo si prenderebbe la formola $f(s + s' + s'') = Fsm$. Qui $f = 354$, $s + s' + s'' = 1899$, $F = 954$, $m = 3$: dunque

$$354. 1899 = 954. 3. s,$$

$$\text{ed } s = \frac{354. 1899}{3. 954} = \frac{118. 211}{106} = 234, 89 \text{ prossimamente.}$$

UN CAPITALE C SI È POSTO A FRUTTO IN MESI M ALLA RAGIONE DEL FRUTTO f PER 100 ALL'ANNO, E SIA C' IL CAPITALE E FRUTTI INSIEME, CHE SI DEBBO NO RICEVERE DOPO IL DETTO TEMPO. COLLEGARE INSIEME QUESTI ELEMENTI.

140. Secondo la soluzione (§. 122.) diremo 1200 dando un frutto f dopo un mese qual frutto darà CM dopo lo stesso tempo? dunque

$$1200 : f = MC : x, \text{ ed } x = \frac{f MC}{1200} :$$

dunque il capitale ed il frutto insieme dopo il dato tempo sarà $C + \frac{f MC}{1200}$; ma questo capitale si è espresso con C' , dunque

$$C' = C + \frac{f MC}{1200}, \text{ o (§. 73.) } C' = C \left(1 + \frac{f M}{1200} \right) :$$

dove se i due termini dentro parentesi si moltiplicano per C ritornerà $C + \frac{f MC}{1200}$.

UNA SOMMA C PAGABILE DOPO MESI M SI VUOL PAGARE ORA COLLO SCONTO DI s PER CENTO ALL'ANNO: SI VUOL TROVARE LA SOMMA C' , CHE ORA SI DEVE SBORSARE.

141. Secondo il metodo usato (§. 124.) si dirà: se 100 fruttano f in 12 mesi, quanto frutteranno in mesi M : dunque sarà

$$12 : s = M : x, \text{ ed } x = \frac{s M}{12} .$$

Adesso si dirà: se dopo mesi M dovendosi dare una somma $100 + \frac{s M}{12}$, ora si dovrebbe sborsare 100; dovendosi dare realmente dopo mesi M la somma C qual somma C' ora si deve sborsare; ; dunque sarà

$$100 : 100 + \frac{s M}{12} = C' : C, \text{ e } 100C = C' \left(100 + \frac{s M}{12} \right)$$

$$\text{e } C = C' \left(1 + \frac{s M}{1200} \right).$$

Confrontando le due formole (§. 140, 141.) per li problemi di merito, e di sconto, si vede sott'occhio quello, che si disse nel (§. 125, 126.), come l'un problema si scambia nell'altro cambiando i due capitali C , C' uno attuale, e l'altro dopo mesi M nei problemi di merito; ed i capitali C' , C uno attuale, e l'altro dopo mesi M nei problemi di sconto.

Per fare una applicazione della formola dei problemi di merito $C' = C \left(1 + \frac{fM}{1200} \right)$. Si supponga di avere un capitale di scudi 500, che si vogliano tenere a frutto per 3 anni alla ragione del 3 per 100 all'anno, e si voglia ciò che sarà capitale e frutti insieme dopo questi anni. Qui il capitale attuale $C = 500$, i tre anni sono mesi $M = 36$, ed $f = 3$. Sostituendo sarà

$$\begin{aligned} C' &= 500 \left(1 + \frac{3 \times 36}{1200} \right) = 500 \left(1 + \frac{3 \times 3}{100} \right) = 500 \left(1 + \frac{9}{100} \right) \\ &= 500 (1 + 0.09) = 500 \times 1.09 = 545. \end{aligned}$$

Per fare uso della formola $C = C' \left(1 + \frac{sM}{1200} \right)$ dei problemi di sconto, e far vedere come questi verificano quelli di merito (§. 126.), si ponga, che 545 siano gli scudi da pagarsi dopo tre anni, e che con uno sconto del 3 per 100 si possa ora estinguere il debito; si domandi la somma che si deve ora pagare. Nel nostro caso $C = 545$, $M = 36$, $s = 3$; dunque

$$545 = C' \times 1.09, \quad \text{e} \quad C' = \frac{545}{1.09} = \frac{54500}{109} = 500,$$

che corrisponde agli scudi 500, che nell'antecedente quesito erano il capitale posto a frutto, il quale dopo 36 mesi sarebbe diventato 545.

Per fare un'altra applicazione della formola dei problemi di sconto si domandi *al quanto per 100 all'anno si è scontata una somma di scudi 800 pagabile dopo 40 mesi, quando ora si è soddisfatta col pagamento di scudi 600.* Nel nostro caso $C' = 600$, $C = 800$, $M = 40$; dunque per la detta formola sarà

$$800 = 600 \left(1 + \frac{40s}{1200} \right); \text{ di qui } 1 + \frac{40s}{1200} = \frac{4}{3},$$

$$\frac{s}{30} = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}, \text{ ed } s = 10.$$

Si è dunque scontato col 10 per 100.

Verifichiamo questo risultamento col problema di merito. *Affinchè una somma di scudi 600 mi diventi 800 col tenerla a frutto per mesi 40, si domanda quale deve essere il fruttato annuo di 100.* Nella detta formola

$$C = 600, C' = 800, M = 40;$$

$$\text{dunque} \quad 800 = 600 \left(1 + \frac{40f}{1200} \right),$$

che dà come innanzi $f = 10$.

Sia anche. *Tizio deve avere da Cajo scudi 259 con questo metodo: cioè dopo un anno deve 59 scudi; dopo 23 mesi 112, e dopo 32 mesi scudi 88. Ora Tizio si contenta di perdere il 6 per 100 all'anno se Cajo vuole estinguere ora il suo debito. Accordandosi Cajo, quanto ora deve dare?*

Si prenda la formola $C = C' \left(1 + \frac{sM}{1200} \right)$ dello sconto, e si dica 59 deve essere dato dopo un anno, o 12 mesi, ma si può scontare col 6 per 100, dunque

$$s = 6, M = 12, C = 59,$$

avremo dunque

$$59 = C' \left(1 + \frac{6 \times 12}{1200} \right) = C' (1 + 0.06) = C' \times 1.06,$$

$$C' = \frac{59}{1.06} = \frac{5900}{106} = 55.66 \text{ prossimamente.}$$

Si vada innanzi nel problema, e si dica: *Scudi 112 dovendosi pagare dopo 23 mesi, si domanda a che si riducano ora collo sconto del 6 per 100.*

Nel nostro caso $C = 112$, $f = 6$, $M = 23$, dunque

$$112 = C' \left(1 + \frac{6 \times 23}{1200} \right) = C' \left(1 + \frac{23}{200} \right) = \frac{223C'}{200},$$

$$C' = \frac{22400}{223} = 100.448 \text{ prossimamente.}$$

Pel terzo caso degli 88 scudi pagabili in 32 mesi avremo

$$88 = C' \left(1 + \frac{6 \times 32}{1200} \right) = C' (1 + 0.16) = 1.16 \times C',$$

$$C' = \frac{8800}{116} = \frac{2200}{29} = 75.862.$$

Si sommino questi tre risultamenti, e Tizio col pagare ora scudi 231, 97 estinguerà il debito.

Termineremo i problemi coi simboli generali dando i metodi per li cambi delle monete fra le diverse piazze. Sia dunque

UN NEGOZIANTE DI PIETROBURGO VUOL FAR PAGARE A BERLINO UNA SOMMA DI 1000 DUCATI CHE VUOL PAGARE IN RUBLI DI RUSSIA. SUPPONENDO PERÒ, CHE PIETROBURGO NON ABIA

APERTO CAMBIO CON BERLINO, IL CAMBIO SI DEBBE FARE COL-
L'INTERMEDIO DELL'OLANDA. SI DOMANDA QUANTI RUBLI DOVRÀ
DARE PER LI 1000 DUCATI.

142. Supponiamo, che il cambio di Pietroburgo coll' Olanda sia a $47 \frac{1}{2}$ cioè, che per un rublo di Pietroburgo si diano in Olanda $47 \frac{1}{2}$ stuvri. Sia poi il cambio dell'Olanda con Berlino a 142, cioè per 100 risdalli olandesi si paghino a Berlino 142 risdalli prussiani. Si sa, che in Olanda 20 stuvri fanno un fiorino, che $2 \frac{1}{2}$ fiorini fanno un risdallo olandese, e che infine il ducato di Berlino vale 3 risdalli prussiani.

Ciò posto si esprima per r il valore d'un rublo, e per s quello d'uno stuvro; per la prima condizione, che per un rublo si danno in Olanda $47 \frac{1}{2}$ stuvri, o $\frac{95}{2}$ stuvri avremo l'uguaglianza $r = \frac{95s}{2}$, o (§. 80.) $2r = 95s$.

L'altra condizione era, che per 100 risdalli olandesi si pagano a Berlino 142 risdalli prussiani, esprimendo dunque con r^o il valore del risdallo olandese, e con r^p quello del risdallo prussiano avremo $100r^o = 142r^p$. In Olanda poi 20 stuvri fanno un fiorino, esprimendo con f un fiorino, sarà $20s = f$. Dice poi, che 2 fiorini e $\frac{1}{2}$ fanno un risdallo olandese, dunque $\frac{5f}{2} = r^o$, o $5f = 2r^o$. Finalmente dice, che il ducato di Berlino vale 3 risdalli prussiani, indicando dunque con d il valore del ducato sarà $d = 3r^p$. Si vuole ora il numero dei rubli, che equivalga a 1000 ducati: indicando dunque con x questo numero avremo $xr = 1000d$. Si pongano una sotto l'altra tutte queste uguaglianze, ed avremo

- (1) $2r = 95s$
- (2) $100r^o = 142r^p$
- (3) $20s = f$
- (4) $5f = 2r^o$
- (5) $d = 3r^p$
- (6) $xr = 1000d$

Si riscrivano queste uguaglianze così disposte, che il primo membro di ognuna abbia la stessa lettera, che si trova nel secondo membro dell'uguaglianza antecedente.

Per esempio scritta la (1) $2r = 95s$ si scriva la (3) $20s = f$ che nel primo membro ha la s , lettera che è nel secondo membro della prima uguaglianza. Avremo

$$\begin{aligned} 2r &= 95s \\ 20s &= f \\ 5f &= 2r^o \\ 100r^o &= 1421^p \\ 3r^p &= d \\ 1000d &= xr \end{aligned}$$

Si moltiplichino tutte ricordandoci, che le lettere si moltiplicano unendole (§. 135.), ed avremo

$$60000000 r s f r^o r^p d = 95 \cdot 2 \cdot 142 s f r^o r^p d r x.$$

Se quantità uguali si dividano per la stessa quantità debbono dare quoti uguali. Si dividano dunque per 5 e per 4, o per 20 i numeri, e si tolgano le lettere comuni r , d , r^o , r^p , s , f , perchè come si sono unite colla moltiplicazione, colla divisione, che è l'operazione contraria, si debbono togliere, ed avremo

$$3000000 = 1349x, \text{ ed } x = \frac{3000000}{1349} = 2223^{\text{u}} . 87$$

rubli domandati.

QUANTI FIORINI CORRENTI D'AMSTERDAM DARANNO FRANCHI 3000, SUPPONENDO IL CAMBIO DEL GIORNO A 54 DENARI PER 3 FRANCHI, E L'AGIO DEL 5 PER 100; SUPPONENDO CIOÈ, CHE 100 FIORINI DI BANCO VALGANO 105 FIORINI CORRENTI, E SUPPONENDO FINALMENTE, CHE 40 DENARI DIANO UN FIORINO DI BANCO?

143. La prima condizione è, che 54 denari danno 3

franchi : esprimendo dunque con d il valore d'un denaro, e con f^r quello del franco sarà $54d = 3f^r$. L'altra condizione è che, 100 fiorini di banco valgono 105 fiorini correnti, dunque esprimendo con f_b^i il fiorino di banco, e con f_c^i il fiorino corrente, avremo $100f_b^i = 105f_c^i$.

L'ultima condizione è, che 40 denari diano un fiorino di banco : dunque indicando con d il valore del denaro sarà $40d = f_b^i$. Finalmente esprimendo con x il numero dei fiorini correnti equivalente a 3000 franchi avremo $xf_c^i = 3000f^r$. Si scrivano l'una sotto l'altra l'uguaglianze avute, e sarà

$$\begin{aligned} 54d &= 3f^r \\ 100f_b^i &= 105f_c^i \\ 40d &= f_b^i \\ xf_c^i &= 3000f^r \end{aligned}$$

Si dispongano come sopra (§. 142.), ed avremo

$$\begin{aligned} 54d &= 3f^r \\ 3000f^r &= xf_c^i \\ 105f_c^i &= 100f_b^i \\ f_b^i &= 40d \end{aligned}$$

Si moltiplichino, e da ambedue i membri si tolgano le lettere comuni, avremo

$$54 \cdot 3000 \cdot 105 = 3 \cdot 100 \cdot 40 \cdot x ;$$

e togliendo da ambedue i membri i fattori comuni 100, 10, 2, 3, lo che è dividerli ambedue per gli stessi fattori (§. 24.) sarà

$$2x = 27 \cdot 105, \text{ ed } x = 1417 \frac{1}{2},$$

cioè i 3000 franchi produrranno 1417 $\frac{1}{2}$ fiorini correnti d'Amsterdam.

SIA IL CAMBIO DI PARIGI A LONDRA DI 23 FRANCHI PER UNA LIRA STERLINA. IL CAMBIO D'AMSTERDAM A LONDRA SIA DI 11 FIORINI PER UNA LIRA STERLINA. A QUANTO ASCENDERÀ IL CAMBIO DI PARIGI AD AMSTERDAM, OSSIA QUANTI DENARI SI AVRANNO PER 3 FRANCHI, SERVENDOSI PER INTERMEDIO DELLA CAMBIALE DI LONDRA?

144. Abbiamo per prima condizione che 23 franchi valgono una lira sterlina: dunque indicando con f^r il valore del franco, e con l quello della lira sterlina sarà $23f^r = l$. L'altra condizione è, che una lira sterlina vale 11 fiorini: dunque servendoci di f^i per indicare il fiorino sarà $l = 11f^i$. Sappiamo come sopra, che 40 denari danno un fiorino; dunque $40d = f^i$. Si domanda quanti denari danno 3 franchi. Esprimendo dunque per x questo numero di denari sarà $xd = 3f^r$.

Scrivendo l'una sotto l'altra le uguaglianze abbiamo

$$\begin{aligned} 23f^r &= l \\ l &= 11f^i \\ 40d &= f^i \\ xd &= 3f^r \end{aligned}$$

e disponendole come (§. 142.)

$$\begin{aligned} 23f^r &= l \\ l &= 11f^i \\ f^i &= 40d \\ xd &= 3f^r \end{aligned}$$

Moltiplicandole, e riducendole sarà

$$23x = 1320, \text{ ed } x = 57 \frac{9}{23}.$$

Dunque il cambio di Parigi ad Amsterdam per la via di Londra è 57 denari e $\frac{9}{23}$ per 3 franchi, cioè, che 57 denari e $\frac{9}{23}$ è il rapporto, che si stabilisce per la via di Londra fra la moneta di Francia, e quella di Amsterdam.

PROPRIETA' DEI NUMERI



145. Adesso, che abbiamo introdotto, ed usato i simboli generali delle quantità, e delle relazioni colle quali possono essere collegate, possiamo dimostrare alcune proprietà generali dei numeri, dalle quali dedurremo alcune operazioni interessanti sopra i numeri stessi, che abbiamo tralasciate nell'aritmetica appunto pel bisogno, che avevamo di questi simboli.

146. Se a, b, c, d, e ec. esprimono le unità semplici, le unità di decine, le unità di centinaia, le unità di migliaia, le unità di decine di migliaia ec. di un numero, potremo esprimere questo numero con $a + 10b + 100c + 1000d + 10000e$ ec.

147. Se un numero termina col 2, o col zero è divisibile esattamente per 2; e se finisce col 5, o col zero è divisibile esattamente per 5. Infatti osservando l'espressione generale del numero (§. 146.) si vede, che tutte le parti $10b, 100c, 1000d$ ec. sono divisibili per 2, o per 5: affinché dunque tutto il numero sia divisibile per 2, o per 5 manca, che l'ultima cifra a delle unità sia divisibile per questi numeri, ora si vede, che ciò avviene, se a sia zero, o 2, o 5.

È chiaro poi, che se l'ultima cifra d'un numero non è esattamente divisibile per 2 o per 5, neppure tutto il numero è divisibile per 2 o per 5.

148. *I numeri divisibili esattamente per 2 si dicono numeri pari, e quelli, che esattamente non si dividono per 2 si chiamano numeri dispari.* Dal teorema antecedente si ricava, che i numeri terminati da 0, o dai numeri pari 2, 4, 6, 8, sono pari, e quelli che finiscono coi numeri dispari 1, 3, 5, 7, 9 sono dispari.

149. *Un numero è divisibile successivamente per tanti 2 o 5 per quanti 2 o 5 può essere successivamente deciso il numero, che risulta dall'unione di altrettante ultime cifre del dato numero.* Cioè è divisibile successivamente due, tre, quattro ec. volte per 2, o 5, se altrettante volte per 2, o 5 successivamente siano divisibili i numeri, che risultano dalle due, dalle tre, dalle quattro ec. ultime cifre del proposto numero.

Infatti osservando l'espressione generale del numero (§. 146.) si vede, che la parte $100c + 1000d + 10000e$ ec. in tutti i suoi termini è divisibile per 4 o per 25, ossia successivamente due volte per 2, e per 5: dunque affinchè il numero dato successivamente si possa dividere due volte per 2, o per 5 è necessario, che sia così divisibile il numero $a + 10b$ formato dalle ultime due cifre a, b .

Così ancora la parte $1000d + 10000e$ ec. nei suoi termini è successivamente divisibile 3 volte per 2, e per 5: dunque affinchè tutto il numero dato sia successivamente divisibile 3 volte per 2, o per 5 è necessario, che successivamente sia divisibile 3 volte per 2, o per 5 l'ultima parte $a + 10b + 100c$, che è formata dalle tre ultime cifre.

Qui ancora se le adolte condizioni non si verificano è chiaro, che il numero non è divisibile successivamente per 2 e per 5.

150. *Un numero è divisibile per 3, o per 9 se la somma delle sue cifre sia divisibile per 3, o per 9.*

Si riprenda il numero

$$a + 10b + 100c + 1000d + 10000e \text{ ec.}$$

Questo si può anche esprimere per

$$9b + 99c + 999d + 9999e \text{ ec.} \\ + a + b + c + d + e \text{ ec.}$$

Ora la prima linea è divisibile esattamente per 9 : manca dunque, affinchè tutto il numero sia divisibile per 3, o per 9, che per questi numeri sia divisibile la quantità $a+b+c+d$, ec. : ma questa è la somma delle cifre del numero proposto, dunque ec.

151. *Se sia zero, o divisibile esattamente per 11 la differenza di due somme fatte dalle cifre d'un numero prendendole una sì ed una no, cominciando prima dalle unità, e poi dalle decine, tutto il numero sarà divisibile esattamente per 11.*

Per dimostrarlo provo, che se dai numeri formati dell'unità, e numeri pari di zeri (§. 148.) si tolga uno si hanno numeri esattamente divisibili per 11 ; e se ai numeri formati dell'unità, e numeri dispari di zeri si aggiunga uno, i numeri risultanti sono divisibili esattamente per 11.

I numeri della prima specie sono 100, 10000, 1000000 ec., nei quali si vedono numeri pari di zeri. Se da questi si toglie 1 abbiamo i numeri 99, 9999, 999999 ec. esattamente divisibili per 11, perchè sono formati da coppie di 9 come 99, ed ognuna divisa per 11 dà 9 di quoto. Supponiamo ora un numero formato da 1 è numero dispari di zeri, per es. 100000. Questo si può esprimere per $10000 \cdot 10$, ed anche per $10000 \cdot 10 - 10 + 10$. Ma $10000 \cdot 10 - 10$ può indicarsi per (§. 73.) $(10000 - 1)10$, perchè facendo la moltiplicazione dei due termini dentro parentesi per 10 (§. 83.) si ottiene lo stesso numero $100000 - 10$: dunque il numero proposto si esprime da

$$(10000 - 1) 10 + 10 ,$$

ed aggiungendogli l'unità avremo

$$100000 + 1 = (10000 - 1) 10 + 11$$

Ma la quantità fra parentesi è divisibile esattamente per 11, perchè è nel caso antecedente, e la quantità appresso $+ 11$ è divisibile per 11, dunque veramente se al numero formato dell'unità, e numero dispari di zeri si aggiunga 1 viene un numero esattamente divisibile per 11.

Riprendiamo dopo ciò l'espressione d'un numero qualunque

$$a + 10b + 100c + 1000d + 10000e + 100000f \text{ ec.}$$

questo potrà anche esprimersi per

$$(10+1)b + (100-1)c + (1000+1)d + (10000-1)e + (100000+1)f \text{ ec.}$$

$$a - b + c - d + e - f \text{ ec.}$$

Nella quale espressione si vede, che ove nelle parentesi si aggiunge 1, si aggiunge di troppo la cifra, che moltiplica fuori di parentesi, e che per compenso questa cifra si toglie nella linea inferiore; ed ove l'unità si toglie dentro parentesi, con che di troppo si toglie la cifra, che moltiplica fuori, questa cifra per compenso si è aggiunta nella stessa linea inferiore. Ora la prima linea del numero trasformato è esattamente divisibile per undici, perchè formata di termini con moltiplicatori fra parentesi, che sono nei due casi antecedenti; dunque, affinchè tutto il numero sia divisibile esattamente per 11 manca, che lo sia la quantità $a - b + c - d + e - f$ ec. o $a + c + e$ ec. $- b - d - f$ ec., o che questa sia zero: ma la prima $a + c + e$ ec. è la somma delle cifre prendendole una sì, ed una no cominciando dalle unità, e l'altra è la somma sottratta delle altre cifre prendendole una sì, ed una no cominciando dalle decine; dunque, affinchè il numero sia esattamente divisibile per undici, si richiede, che sia zero, o divisibile esattamente per 11 la differenza delle due somme fatte delle cifre del numero prendendole alternativamente, una volta cominciando dalle unità, e poi dalle decine.

152. Questi teoremi di divisibilità per alcuni numeri servono per semplificare le frazioni (§. 33.). Siano le frazioni

$$\frac{70}{98}, \frac{73648}{742696}, \frac{185}{1795}, \frac{1560}{8755}, \frac{1782500}{3118125},$$

$$\frac{1251}{7218}, \frac{321}{81972}, \frac{3949}{94303}, \frac{7139}{815925}.$$

I due termini della prima frazione sono divisibili per 2 (§. 14.7): dunque si ridurrà a (§. 33.) $\frac{35}{49}$. I due termini della seconda frazione sono divisibili per 8, perchè sono tre volte successivamente divisibili per 2 (§. 149.). Ciò si conosce, perchè i numeri 648, 696 formati dalle tre ultime loro cifre sono tre volte divisibili successivamente per 2, o subito per 8 (§. 24.). Fatta la divisione dei due termini della detta frazione per 8 avremo

$$\frac{9206}{92837}.$$

Li due termini della terza, e della quarta frazione sono divisibili per 5 (§. 147.); diventeranno dunque

$$\frac{37}{359}, \frac{312}{1751}.$$

La quinta frazione è divisibile nei suoi due termini successivamente quattro volte per 5, perchè i numeri 2500, 8125, formati delle ultime loro quattro cifre, sono successivamente 4 volte divisibili per 5 (§. 149.): quindi la nostra frazione diventa

$$\frac{2852}{4989}.$$

La sesta frazione si può semplificare colla divisione per 9 e la settima colla divisione per 3 (§. 150.), il che fatto diventano

$$\frac{139}{802} , \quad \frac{107}{27324} .$$

Le due ultime frazioni si possono semplificare col 11 (§. 151.), e diventano

$$\frac{359}{8573} , \quad \frac{649}{74175} .$$

153. Ma la maniera di ridurre le frazioni alla più semplice espressione è il così detto *metodo del massimo comune divisore*. Questo metodo consiste nel rintracciare il massimo numero per cui si possano dividere i due termini di una frazione. Avendo introdotto i simboli generali delle quantità (§. 138, 139.), e quelli delle quattro operazioni (§. 89.) siamo nel caso di dare il detto metodo.

Esprimano A, B due quantità, delle quali si voglia trovare il più grande comune divisore, e sia A maggiore di B, ciò che si suol esprimere scrivendo $B < A$; e se si volesse esprimere, che B è minore di A basterebbe rovesciare l'espressione antecedente scrivendo $B < A$.

Ciò posto si divida A per B, il quoto sia q, ed il residuo R, avremo (§. 19.) $A = Bq + R$. Si divida ora B per R, il quoto sia q', ed il residuo R', sarà $B = Rq' + R'$. Di nuovo si divida R per R', il quoto sia q'', ed il residuo R'', sarà $R = R'q'' + R''$. Si divida R' per R'', il quoto sia q''', ed il residuo R''' sarà $R' = R''q''' + R'''$. Se ben si osserva l'operazione successiva si vedrà, che consiste in successive divisioni ponendo sempre il divisore per dividendo, ed il resto per divisore. Così nella prima divisione B era il divisore, ed R il resto, e nella seconda divisione B è stato il dividendo, ed R il divisore con un resto R': quindi nella terza divisione R è stato il divi-

dendo, ed R' il divisore con un resto R'' . Nella terza divisione è stato R' il dividendo, ed R'' il divisore. Poichè il resto è sempre minore del divisore (§. 23.), ed ogni resto diventa successivamente divisore, i resti dovranno continuamente decrescere, ed una volta si troverà un resto uguale all'unità, che nella seguente divisione darà un quoto esatto: dunque nelle successive divisioni superiori una volta non si troverà resto. Supponiamo dunque, che ciò avvenga dopo l'ultima divisione superiore, e che il quoto di R'' per R''' essendo q''' , sia esatto: avremo allora $R'' = R''' q'''$. Riprendiamo dopo ciò tutte l'equazioni superiori

$$\begin{aligned} A &= Bq + R \\ B &= Rq' + R' \\ R &= R'q'' + R'' \\ R' &= R''q''' + R''' \\ R'' &= R'''q'''' \end{aligned}$$

Ora se tra A , e B vi è un comune divisore r , questo deve essere comune ai termini R'' , R''' dell'ultima divisione. Infatti se r divide esattamente A , B nella prima divisione, deve anche dividere esattamente R : perchè esprimendosi la divisione della prima equazione per r con

$$\frac{A}{r} = \frac{Bq}{r} + \frac{R}{r},$$

se R non fosse divisibile per r l'intero $\frac{A}{r}$ sarebbe uguale

all'intero $\frac{Bq}{r}$, più una frazione, che verrebbe da $\frac{R}{r}$,

cosa assurda; dunque il divisore comune ad A , e B è comune a B , ed R . Nella seconda equazione $B = Rq' + R'$, facendo lo stesso ragionamento, se B ed R sono divisi esattamente da r , questo deve dividere esattamente R' , dunque il divisore co-

mune ad A e B, è comune ad R, e R'. Si proverà collo stesso raziocinio, che questo r deve essere divisore comune ad R', ed R'', e che finalmente deve essere comune ad R', ed R'', come si doveva provare: dunque il massimo divisore comune ad A, e B è il massimo divisore comune ad R', ed R''': ma il massimo divisore fra queste due quantità è la minore R'': dunque il massimo divisore comune alle due proposte quantità è il divisore dell'ultima divisione esatta.

154. Ecco dunque il metodo per trovare il massimo divisore comune a due date quantità.

Si divide la maggiore per la minore, e si noti il residuo. Si faccia passare il divisore per dividendo, ed il residuo per divisore, e si noti il nuovo resto. Si faccia passare il divisore per dividendo, ed il resto per divisore, e così successivamente, facendo sempre passare il divisore per dividendo, ed il resto per divisore, finchè una volta si giungerà ad una divisione esatta. Se l'ultimo divisore di questa divisione esatta sarà un numero diverso dall'unità, questo sarà il massimo divisore comune delle due proposte quantità. Se poi quell'ultimo divisore sarà 1, ciò vuol dire, che le due proposte quantità non hanno divisore comune.

155. Due numeri, che non hanno divisore comune fuori dell'unità si dicono *numeri primi fra loro*. Tali sono per es. 16, e 25. I numeri poi, che in se non possono essere divisi esattamente che dall'unità, si dicono *numeri primi*. Tali sono per es. 31, 47.

Sia ora proposta la frazione $\frac{1679}{2369}$ a ridursi alla più

semplice espressione col dividere i suoi due termini pel massimo comune divisore. Troviamo dunque colla regola antecedente questo massimo comune divisore dei due numeri 1679, 2369. Ecco il prospetto dell'operazione:

$$\begin{array}{r}
 1679 \\
 \hline
 2369 \quad 1 \\
 \hline
 690 \quad 2 \\
 \hline
 1679 \\
 \hline
 299 \quad 2 \\
 \hline
 690 \\
 \hline
 92 \quad 3 \\
 \hline
 299 \\
 \hline
 23 \quad 4 \\
 \hline
 92 \\
 00
 \end{array}$$

L'ultimo divisore della divisione esatta è 23, e questo è il massimo divisore cercato: divisi dunque i due termini della data frazione per 23 la sua espressione la più semplice possibile sarà $\frac{73}{103}$.

156. Per mostrare con altro esempio il vantaggio dei simboli generali delle quantità, e delle operazioni diamo un'altra prova della moltiplicazione, e della divisione chiamata *prova del nove*. Ecco in che consiste riguardo alla moltiplicazione. *Sommate le cifre dei due fattori, e togliete dalle due somme tutti i 9 che vi entrano; moltiplicate i residui, e dal prodotto togliete pure tutti i 9, che vi entrano, e notate il resto. Andate al prodotto, sommate le sue cifre, e dalla somma togliete tutti i 9, che vi entrano, il resto deve essere uguale al resto antecedente se il prodotto è giusto.*

Per esempio il prodotto di 197 per 859 è 169223. Sommando le cifre del primo fattore, e dalla somma togliendo il 9, si ha il residuo 8: facendo lo stesso nell'altro fattore si ha 4 di residuo: moltiplicando questi due residui, e dal prodotto togliendo 3 volte il 9 abbiamo 5 di residuo. Ora nel prodotto sommando le cifre, e togliendo tutti i 9 abbiamo appunto 5 di residuo: dunque il prodotto è giusto.

157. Per dimostrare la verità di questa prova della moltiplicazione si avvertirà primo, che sommare le cifre d'un numero, e dalla somma togliere tutti i nove, che vi entrano, si ha il residuo della divisione dello stesso numero per 9. Infatti si è veduto (§. 150.), che la perfetta divisibilità d'un numero per 9 dipende dalla perfetta divisibilità per 9 della somma delle sue cifre: dunque il residuo, che questa somma lascia dividendola per 9, o che è lo stesso togliendogli tutti i 9, che vi entrano, è il residuo della divisione per 9 del numero proposto. Da ciò viene, che i residui, che vengono togliendo dalla somma delle cifre dei due fattori tutti i 9, che vi entrano sono i quoti delle divisioni degli stessi fattori per 9: dunque si deve provare, che divisi i due fattori per 9, il prodotto dei residui spogliato del 9 è il residuo del prodotto toltegli i 9.

Siano A , e A' i due fattori della moltiplicazione. Dividiamo ambedue per 9, i quoti siano q , q' , ed i residui r , r' ; avremo come sopra (§. 19.) $A=9q+r$, $A'=9q'+r'$. Se moltiplichiamo le due prime quantità uguali A , $9q+r$ per le altre due uguali A' , $9q'+r'$ verranno prodotti uguali. Ora per moltiplicare $9q+r$ per $9q'+r'$ basterà primo moltiplicare i due termini $9q$, r di $9q+r$ per $9q'$, e poi moltiplicarli per r' . Ricordiamoci, che i prodotti delle lettere si fanno unendole senza segno, e ciò per convenzione: dunque i prodotti di $9q$, r per $9q'$ saranno $81qq'$, $9rq'$, e quelli di $9q$, r per r' saranno $9qr'+rr'$, dunque il prodotto di $9q+r$ per $9q'+r'$ sarà

$$81qq' + 9rq' + 9r'q + rr';$$

dunque i prodotti uguali detti di sopra saranno espressi dall'uguaglianza

$$AA' = 81qq' + 9rq' + 9r'q + rr'.$$

Ora tutta la parte $81qq' + 9rq' + 9r'q$ è divisibile esattamente per 9: dunque il residuo del secondo membro, o perciò del primo diviso per 9 sarà quello, che viene dalla divisione per 9 di rr' , o del prodotto dei residui dei due fattori. Ma il primo membro è il prodotto dei due fattori: dunque veramente fatto il prodotto dei due residui provenienti dal dividere i due fattori per 9, ed anche questo prodotto diviso per 9, dà lo stesso residuo del prodotto dei due fattori diviso per 9.

Diamo la prova del nove per la divisione.

158. Il dividendo è uguale al divisore moltiplicato per il quoto più il residuo (§. 19.). Esprimendo per D il dividendo e per q ed r il quoto, ed il residuo sarà $D = qd + r$. Dividendo D per 9, per avere il residuo basterà spogliarlo del 9, o (§. 157.) spogliare del 9 la somma delle sue cifre: ora è chiaro dall'autecedente equazione, che deve venire un resto, che sarà il residuo spogliando il prodotto qd del 9 col metodo antecedente de' prodotti, aggiugnendogli il residuo, che viene dallo spogliare del 9 il resto r , ed alla somma di questi residui togliendo pure il 9 quante volte si può. Per es. dividendo 37 per 7 abbiamo il quoto 5, ed il residuo 2. Ora spogliando il 37 del 9 abbiamo di residuo 1: i due fattori 7, e 5, cioè divisore e quoto non possono essere spogliati del 9, ma il loro prodotto privo del 9, è 8, cui aggiugnendo il residuo 2, che non può essere spogliato del 9, abbiamo 10, cui tolto il 9 abbiamo lo stesso residuo antecedente 1.

Dopo ciò ecco la prova del 9 per la divisione.

159. *Spogliate del 9 il divisore ed il quoto; moltiplicate i residui, e dal prodotto togliete il 9 quante volte vi entra; il residuo aggiungetelo a ciò che vi viene spogliando del 9 il resto della divisione, e la somma spogliata del 9 vi deve dare un residuo uguale a quello, che si ha spogliando il dividendo del 9. Ci ricorderemo sempre, che si spoglia un numero del 9 togliendo il 9 tutte le volte che si può dalla somma delle sue cifre.*

Questa prova può essere falsa. Infatti si vede, che in essa si valutano i residui, che vengono dallo spogliare la somma delle cifre dei numeri del 9: ora è evidente, che questo residuo è lo stesso se nei numeri si sia scritto un zero invece del 9, o viceversa; se avendosi errato in una cifra scrivendo poco, in un'altra si sia compensato l'errore, o viceversa; e se siano state traslocate le cifre. Essendo però questi errori, che richieggono una certa precisione, non tanto facili ad accadere, non ci tolgono di servirci della prova del 9 tanto pregevole per la speditezza, specialmente nella fretta di dover eseguire la moltiplicazione, o la divisione.



PROBLEMI

DA RISOLVERSI PER ESERCIZIO DELL'ARITMETICA.



PER ESERCIZIO IMMEDIATO DELLE OPERAZIONI DELL'ARITMETICA.

Una canna di panno costa 65 lire, 17 soldi, 11 denari.

Si domanda il costo di canne 39 e $\frac{7}{8}$.

SOLUZIONE. Il costo è 2627 $\frac{1}{8}$ lir., 11 sol., 11 den.

Si determini il prezzo di un lavoro di tese 69, piedi 4, pollici 11, supponendo, che la tesa costi 25 lire, 19 soldi, 5 denari.

SOLUZIONE. Il prezzo è lire 1813, 5 soldi, denari 4 $\frac{43}{72}$.

Per una lira si può fare un lavoro di 69 tese, 4 piedi, 11 pollici. Si domanda il numero di tese, che si può fare eseguire con 25 lire, 19 soldi, 5 denari.

SOLUZIONE. Il lavoro è di 1813^{tes.}, 1^{pie.}, 7^{pol.}, 4^{lir.}

$$\frac{11}{20}$$

Si domanda il prezzo della tesa d'un certo lavoro supponendo, che si paghi 25469 lire, 19 soldi, 11 denari per 568 tese dello stesso lavoro.

SOLUZIONE. Il prezzo della tesa è 44 lire, 16 soldi, 9 denari $\frac{551}{568}$.

Si sono comprate libbre 258, marco 1, oncie 7, grossi 5 di una certa mercanzia per la somma di lire 3259, soldi 17, denari 10. Si domanda il costo d'una libbra.

SOLUZIONE. In Francia la libbra è 2 marchi, il marco 8 oncie, l'oncia 8 grossi, ed il grosso 70 grani. Una libbra costa 12^{lir.}, 11^{sol.}, 9^{den.} $\frac{743}{33149}$.

La tesa costa 47 lire, 19 soldi, 5 denari. Si domanda il numero delle tese, che si può fare eseguire con 2728 lir. 17 soldi, 10 denaro.

SOLUZIONE. 56^{te.}, 5^{pie.}, 3^{po.}, 9^{li.} $\frac{10539}{11513}$.

Si ponga 1 lira per 15 tes. 4 pie. 7 poll. di un lavoro: si domanda la somma, che si deve impiegare per 329 tes. 5 pie. 11 poll. 8 lin.

SOLUZIONE. 20 lir. 18 sol. 8 den. $\frac{16}{227}$.

Una vasca si riempie da tre bocche d'acqua versando successivamente l'una in 2 ore, l'altra in $\frac{2}{5}$ del tempo della prima, e la terza nel triplo del tempo della seconda. Si domanda in quanto tempo si riempirà dalle tre bocche versando insieme.

SOLUZIONE. Si riempirà in minuti 27 $\frac{9}{13}$.

Quattro lavoranti possono fare un lavoro, il primo in un ora, il secondo in $2 \frac{1}{4}$, il terzo in 3 ore $\frac{3}{4}$, il quarto in 5 ore $\frac{1}{2}$. Si domanda il tempo per eseguirsi il lavoro da questi lavoranti lavorando insieme.

SOLUZIONE. Mezz'ora, e minuti 3,394 prossimamente.

Si domanda un numero, cui aggiunto il suo terzo, poi il suo quarto, ed il suo dodicesimo dia 7.

SOLUZIONE. Il numero è $\frac{21}{5}$.

Trovare due numeri tali, che, se si aggiunge 21 al primo, la somma risultante sia quintupla del secondo, e che, se si aggiunge 21 al secondo, la somma risultante sia tripla del primo.

SOLUZIONE. Il primo è 9, ed il secondo 6.

Se 48 franchi valgono 52 scillinghi d'Inghilterra, 15 scillinghi valgono 6 forini di Germania, 50 forini di Germania danno 7 ducati d'Amburgo, e 14 ducati d'Amburgo danno 40 rubli di Russia: si domanda quanti rubli daranno franchi 2500.

SOLUZIONE. Servendosi della teoria delle frazioni di frazioni avremo rubli $433 \frac{1}{3}$.

Un francese vuol pagare 1200 lire sterline a Londra, ne dà la commissione ad un banchiere di Parigi col patto, che gli darà l'uno per 100 sulla somma totale, che sborserà. Si domanda il numero di franchi, che dovrà sborsare al banchiere supponendo, che 26 lire sterline facciano 150 rubli; 75 rubli 30 ducati d'Amburgo; 20 ducati d'Amburgo 42 piastre di Spagna; e 12 piastre di Spagna 65 franchi.

SOLUZIONE. Facendo uso della stessa teoria delle frazioni di frazioni si troverà, che dovrà dare al banchiere franchi 31815.

Si hanno 4 sorte di vini, una di 250 fogliette a 5 bajocchi la foglietta; l'altra di 400 fogliette a 3 bajocchi la foglietta; la

terza di 1000 fogliette a bajocchi 4 la foglietta; e la quarta di 259 fogliette a 7 bajocchi la foglietta. Mescolando questi vini si vuol sapere quanto costerà la foglietta della mescolanza.

SOLUZIONE. È evidente, che in questo e negli altri consimili problemi di alligazione si moltiplicheranno li diversi numeri delle unità da mescolarsi per i prezzi delle unità stesse, si sommeranno i prodotti, ed il prezzo totale della mescolanza si dividerà per la somma delli numeri parziali delle unità.

Si moltiplicherà 250 per 5, 400 per 3, 1000 per 4, 259 per 7, ed i prodotti 1250, 1200, 4000, 1813 sommati ci daranno 8263 pel prezzo della mescolanza, che diviso per 1909 somma delle tre specie di vini ci darà il prezzo d'una foglietta della mescolanza.

N. B. S'intende, che in queste mescolanze le cose mescolate ritengano il pregio, che hanno disunite, cosicchè delli loro prezzi parziali si formi un totale prezzo nella mescolanza.

SOLUZIONE. Il prezzo è 4 bajocchi, e due quattrini circa.



PROBLEMI

PER ESERCIZIO DI ESPRIMERLI IN EQUAZIONI,
E RESOLVERE L'EQUAZIONI.

Si hanno due specie di vino, l'uno a 10 bajocchi la foglietta, l'atra a $12 \frac{1}{2}$: si domanda quante fogliette si debbono prendere dell'uno e dell'altro per fare 1000 fogliette, che costino 100 scudi.

SOLUZIONE. Questo problema differisce dall'antecedente, che in quello sono date le quantità da mescolarsi, e si vuole il costo della mescolanza. Nel nostro problema è dato il prezzo della mescolanza, e si vogliono conoscere le quantità da mescolarsi. I problemi della prima specie si sciolgono immediatamente coll'Aritmetica; i consimili al nostro richiedono l'equazioni. Si troverà, che deve prendere 1000 fogliette della prima specie, e niente della seconda.

Si hanno delle piastre nella mano dritta, e sinistra. Se la dritta ne dà una alla sinistra hanno ugal numero di piastre, ma se la sinistra ne dà una alla dritta questa ne ha il doppio della sinistra.

SOLUZIONE. La dritta ha 7 piastre, e la sinistra 5.

Due corrieri portano all'istesso istante da due punti distanti 1000 miglia per venirsi incontro. L' uno fa miglia 8 all' ora, e l' altro ne fa $6\frac{1}{3}$: si domanda dove, e a qual tempo s'incontreranno.

SOLUZIONE. S' incontreranno alla distanza di miglia $558\frac{6}{43}$ da quello che fa 8 miglia all' ora, ed impiegheranno ore $69\frac{33}{43}$.

Compro alcune canne di panno a ragione di 7 scudi per 5 canne; ricendo questo panno a ragione di 11 scudi per 9 canne, e guadagno 100 scudi sopra la total somma. Si domanda quante canne di panno ho comprato.

SOLUZIONE. Comprò canne $583 + \frac{1}{3}$, che sono state comprate per scudi $816 + \frac{2}{3}$, e sono state rivendute per scudi $916 + \frac{2}{3}$.

Un tale compra delle canne di panno, e dice che tre canne gli costano tanto al di là di 4 paoli, che 4 gli costano al di là di 10 paoli: si domanda il costo delle canne.

SOLUZIONE. Il costo di ognuna è paoli 6.

Un tale ha due vasi d'argento con un solo coperchio per tutti e due. Il primo vaso pesa 12 oncie, e se vi si mette il coperchio pesa due volte più dell'altro vaso: ma se il coperchio si pone sul secondo vaso, questo pesa 3 volte il primo. Si domanda il peso del secondo vaso, e del coperchio.

SOLUZIONE. Il coperchio pesa 20 oncie, ed il secondo vaso 16 oncie.

Un banchiere ha due specie di monete; si richiegono 10 della prima specie per fare una lira sterlina, e 20 dell'altra per fare pure una lira sterlina. Ora uno dà una lira sterlina per avere 19 monete del banchiere; quante monete riceverà dell'una, e dell'altra specie?

SOLUZIONE. Della prima specie ne riceverà 3, della seconda 14.

Spezzare il 48 in 9 parti tali, che ciascuna superi l'antecedente di $\frac{1}{3}$. Si domandano queste parti.

SOLUZIONE. La prima è $3 + \frac{1}{3}$.

Spezzare il 32 in 2 parti tali, che il sesto della prima aggiunto al quinto della seconda dia 6.

SOLUZIONE. Le due parti sono 12 e 20.

Trovare un tal dividendo, ed un tal divisore, che il secondo superando di $\frac{3}{5}$ il primo il quoto sia $\frac{3}{8}$.

SOLUZIONE. Il dividendo è $\frac{9}{25}$.

Trovare un numero tale, che presone il quintuplo il prodotto sia di tanto al disotto di 40 di quanto l'istesso numero è al disotto di 12.

SOLUZIONE. Il numero è 7.

Un tale si mantenne per 3 anni spendendo 50 lire in ogni anno; ed in ciascuno di questi anni aumentava la parte della sua rendita, che non era spesa del suo terzo; al fine delli 3 anni trovò duplicata la sua somma primitiva. Quale fu questa?

SOLUZIONE. Al principio aveva 740 lire.

Una lepre fu inseguita da un levriere quando da questo era distante di 60 dei suoi salti. La lepre fa 9 salti mentre che il levriere ne fa 6; ma 3 salti del levriere valgono 7 salti della lepre; Quanti salti farà il levriere per raggiungere la lepre?

SOLUZIONE. Il levriere dovrà fare 72 salti per arrivare la lepre: in questo tempo la lepre farà 108 salti.

Un padre, che ha 3 figli, ordina nel suo testamento, che l'eredità sia così distribuita. Il primo deve avere una somma di 10000 franchi più il quinto del resto. Il secondo una somma di 20000 franchi più il quinto di ciò, che resta dopo aver tolta la prima parte, e li 20000 franchi. Il terzo finalmente deve avere 30000 franchi, più il quinto di ciò che resta tolte le due parti, e li 30000 mila franchi. Restando così completamente divisa l'eredità si domanda questa.

SOLUZIONE. L'eredità è 81875.

Essendo uno partito da Roma verso Bologna, un' ora e mezza dopo gli è stato spedito un'altro a raggiungerlo. Il primo fa 7 miglia e $\frac{3}{4}$ all'ora, e l'altro ne fa $8 + \frac{5}{7}$: si domanda dopo quante miglia lo raggiungerà.

SOLUZIONE. Lo incontrerà dopo miglia $105 + \frac{1}{18}$.

Un tale è indietro d'un altro di 4 miglia e $\frac{3}{8}$. Ambedue partono all'istesso istante, quello indietro per raggiungere quello innanzi. Il primo fa 12 miglia all'ora, e l'altro ne fa 8 : si domanda il tempo, ed il luogo ove s'incontreranno.

SOLUZIONE. S'incontreranno a 8 miglia e $\frac{3}{4}$ dal luogo di partenza del secondo, a 13 miglia ed $\frac{1}{8}$ dal luogo di partenza del primo, e dopo un'ora e $\frac{3}{32}$ dal momento di partenza comune.

Due sono partiti all'istesso istante alla distanza reciproca di 500 passi e $\frac{5}{4}$ del primo per incontrarsi passeggiando. Il primo fa 23 passi in $\frac{1}{4}$ d'ora, ed il secondo ne fa $17 \frac{1}{2}$. La ragione fra l'estensione del passo del primo, e del

secondo è quella di $3 \text{ a } 5 + \frac{3}{4}$. Si domanda dove s'incontreranno.

SOLUZIONE. S'incontreranno a passi $203 + \frac{1219}{1357}$ del primo.

Uno aveva 6 lire quando tirò il salario di 5 mesi: dopo 2 mesi aveva speso $\frac{3}{4}$ del suo denaro, ma riscosso il salario di questi due mesi si trovò con 99 lire. Quanto aveva al mese?

SOLUZIONE. Lire 30.

Uno ha lasciato ai nepoti 120000 scudi, cioè 12000 a ciascun maschio; e 9000 a ciascuna femmina. Se avesse lasciato 9000 ai maschi, e 12000 alle femmine sarebbero avanzati 9000 scudi. Quanti sono gli uni, e le altre?

SOLUZIONE. 7 maschi, e 4 femmine.

Un mercante compra della roba, che poi rivende per 2000 scudi di più di quello che l'ha pagata. In questa vendita guadagna il 10 per 100. Quale è il costo primitivo?

SOLUZIONE. 18000.

Dando 5 soldi per uno a dei poveri mi mancano 31 soldi, ma dandone 2 me ne avanzano 2. Quanti sono i soldi ed i poveri.

SOLUZIONE. Soldi 24, e poveri 11.

Un contadino porta delle uova al mercato, ed al primo avventore ne vende la metà più $\frac{1}{2}$, ad un secondo la metà delle rimanenti ed $\frac{1}{2}$, ad un terzo la metà delle rimanenti ed $\frac{1}{2}$: dopo di che non gli restano che 2. Quante uova aveva al principio?

SOLUZIONE. Ne aveva 23.



PROBLEMI

PER ESERCIZIO DELLE PROPORZIONI, E DELLE FORMOLE GENERALI
DA QUESTE RICAVATE.

Un tale morendo lasciò 140000 scudi avendo la moglie incinta, e dispose, che nascendo un maschio avesse $\frac{2}{3}$ dell'eredità, e l'altro terzo la madre; nascendo una femmina avesse $\frac{2}{3}$ la madre, od un terzo la figlia. Accade, che nascono insieme un maschio ed una femmina. Come distribuireste l'eredità?

SOLUZIONE. Al maschio 80000 scudi: alla femmina 20000: alla madre 40000.

Francesco impiegò il 3 agosto un capitale di scudi 3695 presso un banchiere alla ragione del 5 per 100 all'anno con patto di ritirarlo il dì 15 di dicembre dello stesso anno. Si vuol sapere quanto abbia fruttato in tal tempo, e quanto Francesco abbia ritirato in fine tra capitale e frutto.

SOLUZIONE. Il frutto è stato di scudi 1360. 99 in circa.

Un negoziante a Roma dovendo rimettere a Parigi franchi 4789, e soldi 12 al cambio di Roma a $108 \frac{1}{2}$, domanda quanti scudi romani pagherà?

SOLUZIONE. Il franco si divide in 100 centesimi: ma si divide anche in 20 soldi, ed il soldo in 5 decimi. Si dice, che il cambio di Roma è $108 \frac{1}{2}$ con Parigi: ciò vuol dire, che Roma dà 1 scudo per avere soldi $108 \frac{1}{2}$, o 108. 5. Per risolvere il problema coi metodi dati si dirà. Un franco fa 20 soldi, 108. 5 soldi fanno uno scudo. Ciò fissato si troverà che a Roma dovrà pagare scudi 882. 87.

Un negoziante a Roma dovendo pagare a Vienna fiorini 3475 correnti al cambio di Roma con Vienna a bajocchi $47 \frac{1}{2}$ o 47.5, domanda quanti scudi pagherà.

SOLUZIONE. Il cambio di Roma a 47. 5 vuol dire, che

a Roma si danno bajocchi 47. 5 per un fiorino corrente: si stabilirà dunque, che 1 fiorino fa bajocchi 47. 5, e 100 bajocchi fanno uno scudo. Ciò posto dovrà pagare scudi 1650. 62 in circa.

Al contrario uno di Vienna vuol pagare in Roma 4635 scudi supposto il cambio di Vienna con Roma di 47. 8 bajocchi romani. Si domanda quanti fiorini correnti pagherà a Vienna.

SOLUZIONE. Fiorini 9696, e carantani 39. Il fiorino si divide in 60 carantani.

Si hanno 1200 cavalli da distribuirsi a tre reggimenti di dragoni in ragione dei loro numeri. Ora il numero del primo reggimento è a quello del secondo come 11 a 8, ed il numero del primo reggimento è a quello del terzo come 9 a 7. Si domanda quanti cavalli toccheranno a ciascun reggimento.

SOLUZIONE. Pel primo reggimento cavalli $479 \frac{1}{31}$, pel secondo $348 \frac{12}{31}$, pel terzo $372 \frac{18}{31}$.

Distribuire 21375 cartucce da fucile a tre distaccamenti in ragione dei loro numeri, che sono come 3, 5, 11.

SOLUZIONE. Al primo cartucce 3375, al secondo 5625, al terzo 12375.

Qual deve essere il numero dei mesi onde la ragione fra capitale al principio di questi mesi, ed il capitale e frutti al termine di questi sia $3 \frac{3}{10}$, supponendo, che il frutto sia alla ragione del $4 \div \frac{1}{5}$ per 100 all'anno.

SOLUZIONE. Mesi $657 \frac{1}{7}$.

Qual deve essere il capitale e frutti alla fine di 27 mesi, onde il frutto di 1200 scudi sia alla ragione di $\frac{1}{36}$ per 100 all'anno.

SOLUZIONE. Deve essere il capitale e frutti scudi 1200.75.

Avendosi un capitale di scudi 1300, si domanda qual debba essere il suo frutto, onde $\frac{2}{3}$ del frutto di 100 sia inferiore di esso di scudi 73.

SOLUZIONE. Il frutto del detto capitale deve essere scudi 76 $\frac{35}{37}$.

Due socii contribuiscono somme, che sono nella ragione di 3 a 7: si domanda la ragione dei mesi, che debbono essere tenuti a frutto, onde siano uguali i loro frutti parziali.

SOLUZIONE. La ragione è quella di 7 a 3.

Essendo 3 la ragione dei frutti parziali di due socii, e 5 quella dei mesi, in cui tengono a frutto i loro capitali, si domandano i due capitali contribuiti nell'ipotesi, che $\frac{5}{8}$ del capitale del primo superi di $\frac{1}{5}$ il capitale del secondo.

SOLUZIONE. Il primo capitale è $\frac{24}{67}$.

Un padre ha 40 anni, ed il figlio 12; si domanda in qual tempo il padre avrà il triplo dell'età del figlio.

SOLUZIONE dopo 4 anni.

Molti associati, che indicherò per A, B, C ec. avendo guadagnato una somma se la dividono così fra loro, che il primo prende 10 scudi, ed il sesto di ciò che resta: il secondo 20 scudi, ed il sesto di ciò, che resta tolta la porzione del primo ed i 30 scudi: il terzo prende 30 scudi, ed il sesto di ciò che resta tolte le porzioni degli altri due, ed i 30 scudi, e così di seguito. Ora trovandosi tutti con porzioni uguali si vuol sapere la somma totale, ciò che è toccato a ciascuno, e quanti sono i socii.

SOLUZIONE. La somma è 250 scudi, la porzione di ciascuno è 50, e gli associati sono 5.



EQUAZIONI DA RISOLVERSI PER ESERCIZIO.

~~XXXX~~

$$\frac{x+1}{2} + \frac{x+2}{3} = 14 + \frac{5-x}{4}, \quad x = 13$$

$$\frac{x}{2} - \frac{5x+4}{3} = \frac{4x-9}{3}, \quad x = \frac{2}{3}$$

$$\frac{4x-21}{7} + 7 + \frac{3}{4} + \frac{7x-28}{3} =$$

$$x + 3 + \frac{3}{4} - \frac{9+7x}{8}, \quad x = 7$$

$$\frac{x-1-\frac{25}{26}}{2} - \frac{2+6x}{13} = x - \frac{5x+\frac{1}{4}(10-3x)}{39}$$

$$x = 11$$

$$\frac{2x - \frac{3x}{4} + 1}{2x + \frac{1}{5}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad x = \frac{21}{35}$$

$$\frac{x + \frac{1}{2} + xx}{2x + \frac{1}{4}} = \frac{x}{2} + 1 \quad x = \frac{2}{9}$$

$$\frac{2x-7}{8} : \frac{7-89x}{9} = \frac{3}{5}, \quad x = \frac{161}{742}$$

$$0.15x + 0.2 - 0.875x + 0.375 = 0.0625x - 1, \quad x = 2$$

$$\frac{x+6}{4} + \frac{16-3x}{12} = \frac{x+9}{6}, \quad x = 8$$

$$\frac{x+1}{2} + \frac{x+2}{3} = 16 - \frac{5x+1}{4}, \quad x = 7.$$

~~XXXX~~



ARITMETICA GENERALE

—•••••—

1. Abbiamo veduto il vantaggio, che si ricava (A. §. 135, 136 ...) dall'esprimere le quantità, e le operazioni coi segni generali; egli è dunque necessario un trattato dove si calcolino le grandezze senza fissare i loro valori, e coi simboli generali, onde poi risolvere in tutta la loro estensione i problemi nei quali eziandio non è fissato il valore delle quantità. Questo trattato è chiamato da noi *Aritmetica generale*, perchè le quantità si considerano nelle generalità, o illimitazione dei loro valori.

2. Per far ciò si è veduto, che le quantità si rappresentano colle lettere dell'alfabeto latino, e di qualunque altro alfabeto, se le prime non bastino; perchè appunto questi simboli non indicano alcuna grandezza determinata. Così si dirà *a danarī, c canne, d leghe* ec., le quali espressioni vogliono dire *un numero qualunque di denari, di canne, di leghe*, a differenza dell'*Aritmetica*, che dice per es. 7 scudi, 8 canne, 9 leghe ec., determinando sempre l'estensione della grandezza.

3. Le quattro operazioni si esprimono coi dati segni (A. §. 89.) $+$ per la somma, $-$ per la sottrazione, $.$ o $\times$ per la moltiplicazione, e la linea sotto il dividendo, e sopra il di-

visore, o i due punti verticali fra l'uno e l'altro nella divisione.

Così $a + b$ esprime la somma di a con b ; $a - b$ la sottrazione di b da a ; $a \cdot b$, $a \times b$ la moltiplicazione da farsi dei due fattori a , b ; e finalmente $\frac{a}{b}$, $a : b$ indicano la divisione di a per b .

4, Quando una lettera si debba ripetere un certo numero di volte gli si pone innanzi immediatamente questo numero. Così se a dovesse ripetersi nove volte si scriverebbe $9a$; e $3a$, $5a$, esprimono, che a è ripetuta 3 e 5 volte. Il numero posto innanzi la lettera si dice il suo *coefficiente*; così in $5a$ il 5 è coefficiente di a .

5. Di queste quantità altre sono *omogenee*, ed altre *eterogenee*. Le omogenee sono quelle le quali riferendosi alla stessa unità sono espresse dalla stessa lettera; tali sono $3a$ franchi, $5a$ franchi. Se poi siano espresse da lettere differenti si chiamano eterogenee come $8a$, $7b$.

Eseguiamo le quattro operazioni sulle espressioni dell'Aritmetica generale.



CAPO PRIMO

DELLE OPERAZIONI SULLE QUANTITÀ INTERE DELL' ARITMETICA GENERALE.



ADDIZIONE

6. In questa operazione le quantità, che si debbono aggiungere o sono omogenee, o eterogenee (§. 5.). Nel primo caso si riducono ad una sola coll'addizione de'coeffi-

cienti scrivendo dopo il numero risultante la lettera comune. Così l'addizione delle quantità $3a$, $7a$, $2a$ sarà $12a$.

7. Se le quantità saranno eterogenee si scriveranno l'una dopo l'altra col segno dell'addizione; quindi la somma delle tre quantità $2a$, $3b$, $5c$ sarà $2a + 3b + 5c$.

8. Può avvenire, che le quantità da sommarsi contengono anche il segno meno. Se si dicesse, che un tale aveva $5a$ franchi, ma ne spese $7b$; che in un'altra circostanza, avendo $9b$ franchi, ne ha spesi $4a$, ma che poi gli furono dati $6c$ franchi; finalmente, che in un terzo caso avendo $5c$ ne ha spesi $7a$, e $4b$, e si volesse l'espressione di ciò che ha totalmente: è evidente, che i tre averi sarebbero espressi da $5a - 7b$, $- 4a + 9b + 6c$, $- 7a - 4b + 5c$, e si dovrebbero sommare queste 3 quantità.

9. Queste tre quantità si chiamano *polinomi*, perchè per *polinomio* s'intende una quantità formata di diversi termini separati dal segno $+$ o $-$, mentre i parziali termini si chiamano *monomi*.

10. Per sommare i dati polinomi, si scrivono l'uno sotto l'altro facendo corrispondere in linee verticali i monomi omogenei. Ecco l'esempio.

$$\begin{array}{r}
 5a - 7b \\
 - 4a + 9b + 6c \\
 - 7a - 4b + 5c \\
 \hline
 - 6a - 2b + 11c
 \end{array}$$

Ciò fatto si sommi ciascuna linea facendo una riduzione de' coefficienti, e scrivendo il numero dopo la lettera comune. Così nella prima linea del coefficiente 5 si leverà 4, e dal risultamento 1 si toglierà il terzo coefficiente 7: dunque la riduzione dei tre coefficienti ci darà -6 , appresso al quale scritto a avremo $-6a$. S'intende sempre il segno più quando altro segno non si scrive nel primo termine del polinomio.

Nella seconda linea abbiamo i coefficienti $-7, +9, -4$, che ridotti danno -2 : dunque il risultamento è $-2b$, e così per l'ultima linea avremo $+11c$. Da ciò si vede chiaro, che nell'addizione dell'aritmetica generale non sempre si fa l'addizione, o l'aggiunta, perchè vi accade anche la sottrazione; quindi più propriamente si dovrebbe chiamare *riduzione*.

11. Dopo ciò possiamo dare la seguente regola per la somma dei polinomii. *Disposti gli uni sotto gli altri in guisa da formar colonne dei monomii omogenei o della stessa lettera. Se i monomii siano eterogenei nel luogo della somma si scrivono l'uno appresso all'altro coi loro segni. Se poi siano omogenei si fa la riduzione dei coefficienti scrivendo dopo il numero risultante la lettera comune.* ..

12. Da ciò, che abbiamo stabilito si ricava, che la somma della nostra aritmetica generale differisce dalla somma dell'aritmetica, che in questa si sommano quantità della stessa natura, per esempio o tutti crediti, o tutti debiti: nella somma poi coi simboli generali si possono sommare quantità di relazioni opposte, come sono per esempio crediti e debiti (§. 8.). Ciò proviene dalla indeterminazione delle grandezze, per cui prima di fare la somma non si possono eseguire le riduzioni delle quantità di segno contrario. Per esempio nel (§. 8.) si diceva, che uno aveva $5a$ franchi, ma poi spese $7b$ franchi, ed in un'altra circostanza avendo $9b$ franchi ha spesi $4a$ franchi, e poi ha ricevuto $6c$ franchi. Se invece di queste indeterminazioni di quantità si fosse detto, che in una circostanza aveva 12 franchi, e poi ne spese 7 : ed in un'altra avendo franchi 15 ne spese 9 , e poi ricevette 5 . Prima di fare la somma dei suoi averi si farebbero tutte le riduzioni dei detti numeri dicendo Nella prima circostanza aveva 12 e spese 7 , dunque gli rimasero 5 . Nell'altra avendo 15 spese 9 , dunque rimase con 6 , a cui aggiunti i 5 dopo ricevuti, aveva tutto insieme 11 . Dopo ciò si sarebbe sommato il

5 coll' 11, e si sarebbe detto, che questo tale in ultimo aveva tutto insieme 16 franchi. E qui l'ultima operazione sarebbe stata di somma. Ma potrebbe essere anche di sottrazione.

Se si dicesse un tale avendo 13 scudi ne ha spesi 17: ed in un'altra circostanza avendo speso 11 scudi, ne ha ricevuti 20. Nel primo caso gli sarebbero rimasti 4 scudi di debito, e nel secondo 9 scudi di credito, dunque per avere l'ultimo risultamento si sarebbe dovuto togliere 4 da 9, ed il 5 avrebbe indicato, che in ultimo avrebbe avuto 5 scudi.

13. Perchè poi nella somma colle lettere prima di farla non si possono eseguire le sottrazioni indicate nei diversi polinomii, perciò la somma è mista di somma, e sottrazione. Nell'esempio (§. 10.) il $-4a$ si sommava col $-7a$, ma il $-11a$ risultante si è poi sottratto da $5a$.

14. Un'altra differenza fra la somma dell'aritmetica, e la somma dell'aritmetica generale è, che in quella di necessità tal' operazione si eseguisce sommando le colonne da dritta a sinistra: nell'altra somma poi si può cominciare dove si vuole, anche dal mezzo, e ciò perchè nelle colonne numeriche dieci unità danno un'unità da portarsi nella colonna seguente a sinistra. Fra le colonne poi delle lettere non essendovi alcuna relazione, non si limita l'ordine dell'operazione. Si suole però cominciare dalla prima colonna a sinistra, perchè l'operazione proceda come presso noi si legge, e si scrive.

SOTTRAZIONE

15. *La sottrazione è un'operazione per la quale si cerca la differenza fra due quantità. È evidente, che la sottrazione di b da a sarà espressa da $a - b$. Se si volesse la sottrazione nelle due quantità a , $-b$ si dovrebbe ragionare così. Con questa sottrazione si vuol trovare di quanto $-b$ è*

al di sotto di a , ossia cosa gli si deve aggiungere per arrivare ad a : ora è evidente, che gli si deve aggiungere prima il $+b$, onde togliere $-b$, e poi aggiungere a : dunque il risultamento della sottrazione sarà $a+b$.

16. Finalmente si debba fare la sottrazione fra le due quantità $a, c-b$. Incomincio a togliere il c da a , ed avrò $a-c$: ma non si doveva togliere tutto il c , ma $c-b$, cioè il c diminuito di b , dunque si è tolto troppo, e si è tolto troppo la quantità b : dunque il residuo $a-c$ si deve crescere di b , e perciò il risultamento della sottrazione esattamente sarà $a-c+b$.

17. Osservando questi tre casi, in cui si comprendono gli altri, si vedrà, che nella sottrazione *si debbono mutare i segni al minutore, ed allora l'operazione si riduce alla somma*. Per es. quando la sottrazione si faceva tra $a, -b$ abbiamo avuto $a+b$: ma se si muta il segno al $-b$, ed il b risultante si somma colla quantità a , avremo appunto $a+b$.

Nel terzo caso, in cui la sottrazione era tra le quantità $a, c-b$, mutando i segni al minutore $c-b$, avremo $-c+b$, che aggiunto al minuendo a ci darà $a-c+b$, come abbiamo avuto.

18. Dunque la regola della sottrazione è: *mutate i segni al minutore scrivendo i segni contrarii al di sotto de' segni proprii e poi del minuendo, e del minutore fate la somma colla regola data (§. 11.). Ecco gli esempi.*

ESEMPIO 1.º

$$\begin{array}{r}
 5a - 7b + 12c - r \\
 - 3a - 4b + 6c - d \\
 + \quad + \quad - \quad + \\
 \hline
 8a - 3b + 6c + d - r
 \end{array}$$

ESEMPIO 2.^o

$$\begin{array}{r}
 - 13m + 5n - 6r + 8u \\
 - 7m - 2n - 4r + 3u \\
 + \quad + \quad + \quad - \\
 \hline
 - 6m + 7n - 2r + 5u
 \end{array}$$

Nel primo esempio, cambiati i segni del minutore, si dovrà sommare $5a$ con $3a$, dunque avremo $8a$; inoltre si deve sommare $-7b$ con $4b$, dunque sarà $-3b$. Poi si debbono sommare $12c$, $-6c$, ed abbiamo $+6c$. Finalmente la somma di $+d$ con $-r$ si esprimerà scrivendo $+d-r$.

19. La detta mutazione di segni può provarsi anche così. Si domandi la differenza fra a , e $c-b$: si esprima questa differenza per x . Se $c-b$ si supponga minore di a , la x sarà quanto va aggiunto alla quantità minore $c-b$ onde ottenere la maggiore a : dunque $x+c-b=a$, ed (Ar. §. 81.) $x=a-c+b$, dove il risultamento x della sottrazione è dato come innanzi (§. 16.).

Se $c=0$ x sarà la differenza fra a , $c-b$, e dalla equazione antecedente avremo $x=a+b$ come nel secondo caso della sottrazione (§. 15.).

20. Ecco anche un'altra prova della mutazione dei segni nella sottrazione. Fissiamo, che il residuo della sottrazione rimane lo stesso se al minuendo, ed al minutore si aggiunge la stessa quantità, perchè nel togliersi il minutore dal minuendo si annullano le quantità uguali ad essi aggiunte. Ciò posto si debbe sottrarre $b-c$ da a . Si aggiunga ad ambedue queste quantità la quantità $-b+c$, diventeranno $b-c-b+c$, $a-b+c$: ma la prima è evidentemente zero; dunque si deve sottrarre zero da $a-b+c$, dunque questo è il residuo. Se $b=0$ il risultamento della sottrazione fra $a-b$, sarà $a+b$.

21. Osservando questo risultamento si vede, che il re-

siduo di questa sottrazione è maggiore del minuendo: quindi non si deve dire il residuo del togliersi il $-b$ da a ; ma piuttosto si deve dire la differenza, che passa fra a , e b , che in questo caso deve essere maggiore della stessa a . Infatti il domandare di quanto a supera $-b$ è domandare di quanto per es. è più ricco uno, che ha scudi a di credito di un altro, che ha scudi b di debito: ora è evidente, che il primo è più ricco del secondo di $a + b$, perchè il secondo per arrivare al primo deve avere denaro b per estinguere il suo debito $-b$, e di più deve avere a , onde arrivare al credito a . Quindi l'aritmetica generale ci dà idea più estesa della sottrazione: perchè nell'aritmetica semplice sempre da un numero si toglie un altro, e quindi il residuo è sempre minore del minuendo; ciò, che, come abbiamo veduto, non avviene sempre nella sottrazione dell'aritmetica generale. Perciò la definizione che si deve dare della sottrazione dell'aritmetica generale è quella data (§. 15.). *È una operazione per la quale si domanda la differenza fra due quantità.* Se queste saranno dello stesso segno l'operazione sarà un vero togliere, ed il residuo sarà minore del minuendo: se poi saranno di segno differente la sottrazione sarà un aggiungere il minutore al minuendo, e perciò il residuo sarà maggiore di questo.

MOLTIPLICAZIONE

22. *La moltiplicazione delle lettere per convenzione si eseguisce unendole senza segno.* Così il prodotto di a , b , c , si esprime con abc . Se le lettere abbiano coefficienti si eseguisce la loro moltiplicazione come nei numeri: quindi il prodotto delle quantità $2a$, $3m$, $5n$ sarà $30amn$.

23. Se si debbono moltiplicare i monomii $2a$, $3a$, $4a$, $5a$, si avrà $120aaaa$. Si sogliono semplificare questi prodotti, che contengono la stessa lettera ripetuta, col porre nel vertice di una un numero, che esprima quante volte dovrebbe

essere ripetuta. Nel caso antecedente si scriverebbe $120a^4$. Così invece dei prodotti $aaaaa$, bb , ccc , si scriverebbe a^5 , b^2 , c^3 , che si leggono *a a cinque*, *b a due*, *c a tre*, o semplicemente *a cinque*, *b due*, *c tre*.

24. Il numero, che si pone nel vertice della lettera si chiama il suo esponente: dunque *l'esponente di una lettera esprime quante volte la lettera deve essere ripetuto per mezzo della moltiplicazione*. Si vede poi chiaro, che questo esponente supera di una unità il numero delle moltiplicazioni, che si debbono fare della lettera sottoposta nella sua ripetizione, perchè nella prima moltiplicazione impiegandosi due volte la lettera avviene, che si debba fare una moltiplicazione di meno del numero delle ripetizioni. Così a^5 mostra, che la lettera *a* deve essere ripetuta cinque volte come fattore, mentre che in queste ripetizioni non si fanno che quattro moltiplicazioni espresse dai 4 punti in $a.a.a.a.a$.

25. Confrontando le destinazioni dei coefficienti (§. 4.) e degli esponenti (§. 23.) si vede, che gli uni, e gli altri ripetono le lettere appresso o sottoposte, ma il coefficiente ripete la sua lettera colla operazione di somma, mentre l'esponente ripete la sua lettera colla moltiplicazione.

26. *Se le quantità coll'esponente si debbano moltiplicare si vegga se abbiano la stessa lettera, o lettera differente. In questo secondo caso per la regola generale (§. 22.) si uniranno senza segni.* Così a^3 da moltiplicarsi per b^5 darà $a^3 b^5$. *Se poi abbiano la stessa lettera, si scriverà questa una sola volta dandogli per esponente la somma degli esponenti de' fattori.* Sia a^5 da moltiplicarsi per a^3 . Il prodotto sarà a^8 . I prodotti di a^m per a^n , di a^m per a^2 , di a per a^r saranno a^{m+n} , a^{m+2} , a^{r+1} . La regola generale della moltiplicazione è di unire tutte le lettere senza segno (§. 22.): ma in a^5 ci sono cinque *a*, in a^3 ci sono tre *a*; dunque nel prodotto vi dovranno essere otto *a*, ossia *a* ripetuta otto volte come fattore, ciò che si esprime con a^8 (§. 23.); dove si vede, che nel prodotto si è scritta la lettera co-

mune a dandogli per esponente la somma degli esponenti de' fattori.

27. Vediamo ora come si moltiplicano i polinomiali. La moltiplicazione dei polinomiali s'indica facendo uso delle parentesi. Così $a + b - 2c$ da moltiplicarsi per a si esprime con $(a + b - 2c)a$; ed $a - 4b + 5c$ da moltiplicarsi per $m - 2r + p$ si esprime con $(a - 4b + 5c)(m - 2r + p)$. Si chindono fra parentesi per indicare, che tutti i monomiali dentro parentesi si debbono moltiplicare per le quantità fuori.

Se poi un polinomio fosse moltiplicato per una quantità, questa si porta fuori di parentesi scrivendo dentro la somma de'suoi moltiplicatori: così $a^3b^2 - a^6b + 5a^2c = a^2(ab^2 - a^4b + 5c)$.

Sia ora da moltiplicarsi $a - b$ per $c - d$. Si moltiplichì a per c , secondo la regola data avremo ac : ma non si deve moltiplicare tutto a per c , ma a diminuito di b per c : dunque dentro a si è lasciato il valore b , che si doveva togliere, e quindi si è moltiplicato implicitamente per c : dunque il prodotto ac è troppo forte di bc : dunque $ac - bc$ sarà il giusto prodotto di $a - b$ per c . Ma non si deve moltiplicare $a - b$ per tutto c , ma per c diminuito di d : dunque dentro c si è lasciato questo valore d , pel quale si è moltiplicato $a - b$, che non si doveva: per correggere dunque l'errore si moltiplicherà $a - b$ per d , ed il prodotto si sottrarrà da $ac - bc$: ma $a - b$ moltiplicato per c , ha dato $ac - bc$: dunque $a - b$ moltiplicato per d darà $ad - bd$: questo si deve togliere da $ac - bc$, dunque mutati i segni, come richiede la sottrazione (§. 18.), sarà $ac - bc - ad + bd$ il prodotto domandato di $a - b$ per $c - d$.

28. Diamo un'altra dimostrazione di questa moltiplicazione de' polinomiali. Si ponga $x + b = a$, sarà $x = a - b$. Si moltiplichì la prima equazione per c avremo $xc + bc = ac$, ed $xc = ac - bc$. Si moltiplichì la seconda equazione per c , indicando l'operazione del secondo membro, ed avremo $xc = (a - b)c$: dunque $(a - b)c$, ed $ac - bc$ hanno lo

stesso valore xc : dunque sono uguali, e perciò sarà $(a - b) c = ac - bc$.

29. Si ponga ora $x + b = a$, $y + d = c$ dalle quali $x = a - b$, $y = c - d$. Si moltiplichino le prime equazioni fra loro, è evidente che per moltiplicare $x + b$ per $y + d$, prima si moltiplicheranno i due termini di $x + b$ per y , e poi per d : avremo dunque il prodotto $xy + by + xd + db$: dunque le due prime equazioni moltiplicate ci danno $xy + by + dx + db = ac$. Si sostituiscano ora in by , e dx i valori di y , e di x ricavati dalle due equazioni $y = c - d$, $x = a - b$, ed avremo $b(c - d)$, $d(a - b)$, ora (§. 28.) fatti in queste espressioni i prodotti avremo $bc - bd$, $ad - bd$: dunque sarà $xy + bc - bd + ad - bd + bd = ac$, ossia riducendo, e trasportando $xy = ac - bc - ad + bd$: ma esprimendo la moltiplicazione delle due equazioni $x = a - b$, $y = c - d$ abbiamo $xy = (a - b)(c - d)$: dunque $(a - b)(c - d) = ac - bc - ad + bd$, come sopra (§. 27.)

30. Osservando questo risultamento della moltiplicazione de' polinomii si conosce il metodo da tenersi. Prescindendo dai segni, i monomii del moltiplicando si sono moltiplicati successivamente per i monomii del moltiplicatore. Così a , b si sono moltiplicati prima per c , poi per d , e si sono avuti i prodotti ac , bc , ad , bd . Riguardo ai segni, nella moltiplicazione dei monomii di segni simili $+e+$; $-e-$ si è avuto $+$, e di segni dissimili $-$, $+$; $+$, $-$ si è avuto $-$. Infatti $+a$, $+c$, $-b$, $-d$, hanno dato i prodotti positivi ac , bd ; e $-b$, $+c$; $+a$, $-d$ hanno dato i prodotti negativi $-bc$, $-ad$.

31. Ecco dunque la regola per la moltiplicazione dei polinomii. *Tutti i monomii del moltiplicando si moltiplicano successivamente per tutti i monomii del moltiplicatore, avvertendo, che i monomii di segni simili daranno il positivo, ed i monomii di segni dissimili daranno il segno negativo.* Si suol dire dai mattematici, che i segni simili moltiplicati fra loro

danno il positivo, ed i segni dissimili moltiplicati danno il negativo.

32. Questa espressione si può tenere in pratica, ma come suona non è vera, perchè se si ritorna sulla moltiplicazione di $a - b$ per $c - d$ fatta di sopra (§. 27.) col ragionamento si vedrà, che non si è fatta mai una moltiplicazione di segni, ma i segni del risultamento sono venuti da correzioni di errori commessi per necessità. Così non si è moltiplicato mai $-b$ per $+c$, ma non essendosi potuto togliere il b da a prima di moltiplicare questa quantità per c il prodotto ac si è trovato troppo forte del prodotto bc , dunque questo si è sottratto, e si è avuto $ac - bc$. Così ancora non si è moltiplicato $+a$ per $-d$, nè $-b$ per $-d$: ma non essendosi potuto togliere il d da c prima di moltiplicare $a - b$ per c , quindi questo prodotto di $a - b$ per c si è trovato più grande del vero del prodotto di $a - b$ per d : quindi abbiamo trovato questo prodotto $ad - ba$, e l'abbiamo sottratto dall'antecedente $ac - bc$ mutando i segni come richiede la sottrazione, e così abbiamo avuto con queste correzioni il vero prodotto non moltiplicando mai i segni, ma solo le lettere.

33. Di qui si vede, che la moltiplicazione nell'aritmetica generale differisce dalla moltiplicazione nell'aritmetica per i segni dei termini, e che questa differenza viene sempre come nella somma, e sottrazione dalla indeterminazione dei valori delle quantità, per cui non si possono eseguire le sottrazioni nei due fattori prima di fare la moltiplicazione. In ultimo proponiamo un esempio.

$$\begin{array}{r}
 3a^2 - 4ab^2 - b^3 \\
 - 4a^2 - 5ab^2 + 2b^3 \\
 \hline
 - 12a^4 + 16a^3b^2 + 4a^2b^3 \\
 \quad 15a^3b^2 - 20a^2b^4 + 5ab^5 \\
 \quad \quad + 6a^2b^3 - 8ab^5 - 2b^6 \\
 \hline
 - 12a^4 + 31a^3b^2 + 10a^2b^3 - 3ab^5 - 2b^6 \\
 \quad - 20a^2b^4
 \end{array}$$

Osservando l'operazione si vede, che prima si è moltiplicato il moltiplicando per $-4a^2$, poi per $-5ab^2$ ed in ultimo per $2b^3$: cioè si è moltiplicato il moltiplicando successivamente per tutti i termini del moltiplicatore.

Moltiplicando $3a^2$ per $-4a^2$ si è avuto il segno — perchè i due fattori hanno segno differente. I coefficienti si sono moltiplicati come i numeri, e si è avuto 12; gli esponenti poi di a^2 si sono sommati, e si è avuto a^4 , e così innanzi.

DIVISIONE

34. La divisione nelle lettere si eseguisce togliendo le lettere comuni al dividendo, ed al divisore, così $\frac{abc}{ac} = b$ togliendo le lettere a , c comuni. I coefficienti si dividono come i numeri: così $\frac{8ac}{4c} = 2c$. Ciò è chiaro, perchè dividendo un prodotto per un fattore deve venire l'altro (A. §.24.); ciò che è lo stesso di dire, che la divisione di un prodotto per un fattore si ottiene togliendolo dal prodotto stesso: ora quando si dà a dividere $8ac$ per $4c$ essendo $8 = 4 \cdot 2$ nel coefficiente 8 si deve togliere il fattore 4, ed in ac il fattore c .

35. Riguardo alle lettere cogli esponenti, se queste sono differenti la divisione si esprime non potendosi eseguire: quindi la divisione di a^3 per b^5 si esprime con $\frac{a^3}{b^5}$.

Se poi abbiano la stessa lettera si scrive questa nel quoto dandogli per esponente l'esponente del dividendo meno quello del divisore. Così $\frac{a^7}{a^4} = a^3$. Infatti si è detto (§. 34.), che nella divisione si debbono togliere le lettere comuni: ora in a^7 , ed a^4 vi sono quattro a comuni, togliendole ve ne rimangono tre; dunque il quoto sarà a^3 .

$$\text{Dopo ciò } \frac{16a^9 b^7 c^5 d}{4a^5 b^4 c^3 d} = 4a^4 b^3 c^2.$$

$$\text{Così ancora } \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \frac{a^m}{a^3} = a^{m-3}, \frac{a^m}{a} = a^{m-1}.$$

36. Passiamo alla divisione dei polinomi. Il dividendo ed il divisore si scrivono come nella divisione aritmetica avvertendo però di ordinarli per una stessa lettera. Due polinomi si dicono ordinati per la stessa lettera, quando in ambedue s'incominci dai monomi, nei quali la lettera ha il più alto esponente, e poi si scrivono i monomi, nei quali la stessa lettera ha esponenti sempre minori. Ordinati così il dividendo, ed il divisore si divide il primo termine del dividendo pel primo termine del divisore, e si segna il quoto avuto nel posto del quoto, non vedendo, come si fa nell'Aritmetica, se i successivi monomi del dividendo divisi per i successivi del divisore diano lo stesso quoto avuto. Nell'Aritmetica si usa quell'avvertenza, perchè la più alta cifra del dividendo non è sempre il solo prodotto della più alta cifra del divisore per la più alta del quoto: ma talvolta quel prodotto è cresciuto forte dai prodotti delle altre cifre del divisore per la più alta del quoto, e per le altre seguenti, donde può avvenire, che la più alta cifra del divisore può entrare più del dovere nella più alta del dividendo. Nell'aritmetica generale però ciò non può avvenire; perchè, se si osservino in questa le moltiplicazioni (§. 33.) si vedrà, che i prodotti parziali così si sottopongono l'uno all'altro onde poterli sommare, che nulla si aggiunge ai prodotti a sinistra, e che anzi vanno ad aumentare le colonne a diritta, in guisa, che si può stabilire, che la lettera col più alto esponente del dividendo non proviene che dal prodotto del primo monomio del divisore moltiplicato del primo monomio del quoto, e quindi divisa quella lettera col più alto esponente del dividendo per la stessa lettera col più alto esponente del di-

visore non può venire che giustamente la stessa lettera col più alto esponente del quoto.

37. Quando si sia notato il quoto, come nell'aritmetica, per questo si moltiplichino il divisore, ed il prodotto si scriva sotto il dividendo per sottrarlo ricordandoci di mutare prima i segni. Scritto il residuo e calata accanto a questo ciò che rimane del dividendo, come innanzi si dividerà il suo primo monomio pel primo del divisore, e notato al suo luogo il quoto si farà come innanzi; per questo si moltiplicherà il divisore, ed il prodotto si sottrarrà dal dividendo per procedere innanzi collo stesso metodo nella divisione.

38. Da ciò si vede, che *la divisione nell'aritmetica generale si eseguisce allo stesso modo dell'aritmetica, con queste sole due avvertenze di ordinare i due polinomi prima della divisione, ed in ogni divisione di dividere il solo primo termine del dividendo pel primo termine del divisore.*

39. Abbiamo trovato (§. 27.) che il prodotto di $a - b$ per $c - d$ è $ac - bc - ad + bd$: dunque se si divide questo prodotto per $a - b$, il quoto è $c - d$; e dividendosi per $c - d$ il quoto è $a - b$ (§. 34.). Facciamo la divisione per $a - b$, o piuttosto per $-b + a$. Ordinando il prodotto per b che è la prima lettera del divisore sarà $-bc + bd + ac - ad$. Dovendo il quoto essere $c - d$ è chiaro, che dividendo $-bc$ per $-b$ il quoto deve essere $+c$. Si moltiplichino $-b + a$ divisore pel quoto c , ed il prodotto $-bc + ac$ si tolga dal dividendo col mutare i segni, ed aggiungere (§. 18.); il residuo sarà $bd - ad$. Si divida ora bd per $-b$, ed il quoto deve essere $-d$, perchè abbiamo detto che il quoto totale è $c - d$. Moltiplicato $-b + a$ divisore per $-d$ il prodotto deve essere $bd - ad$ onde tolto dal dividendo dia zero di residuo.

40. Riandando l'operazione fatta si vede, che dividendo $-bc$ per $-b$ doveva venire $+c$: dunque *nella divisione la quantità negativa divisa per un'altra negativa deve dare un quoto positivo.* Si vede ancora, che diviso $+bd$ per $-b$ il

In questo esempio prima della divisione si veggono ordinati per la lettera a i due polinomii proposti (A), (B) ponendo nel dividendo prima il termine che contiene a^6 , poi quello che contiene a^5 , in seguito il termine che ha a^4 , e così di seguito. Lo stesso si è fatto nel divisore, chè prima si è scritto il termine avente a^3 , poi quello con a^2 , e finalmente quello privo di a .

Poi il primo termine $12a^6$ del dividendo si è diviso per $-4a^3$ del divisore, ed il quoto $-3a^3$ segnato al suo posto si è moltiplicato pel divisore, ed il prodotto $12a^6 - 6a^5b - 3a^3b^2$ scritto sotto il dividendo da esso si è sottratto colla mutazione de' segni. Accanto al residuo $-16a^5b + 8a^4b^2 + 12a^3b^2$ si è calata l'altra parte del dividendo $-2a^2b^3 - 3b^4$, e di nuovo il primo termine $-16a^5b$ del dividendo si è diviso pel primo termine $-4a^3$ del divisore. Il quoto $4a^2b$ si è scritto al suo posto, per esso si è moltiplicato il divisore, ed il prodotto $-16a^5b + 8a^4b^2 + 4a^2b^3$ si è sottratto dal dividendo, e si è avuto il residuo $12a^3b^2 - 6a^2b^3$, accanto al quale si è calata l'ultima parte $-3b^4$ del dividendo. Finalmente si è diviso il primo termine $12a^3b^2$ pel primo $-4a^3$, ed il quoto $-3b^2$ moltiplicato pel divisore ha dato $12a^3b^2 - 6a^2b^3 - 3b^4$, che tolto dal dividendo non avendo lasciato nulla di residuo la divisione è compita.

44. Per esercizio della MOLTIPLICAZIONE si moltiplicherà

$3x + 2y$ per $2x + 3y$; e $2ab - 3b^2$ per $3ab + 4b^2$,
e si troveranno i prodotti

$$6x^2 + 13xy + 6y^2, \quad 6a^2b^2 - ab^3 - 12b^4.$$

Moltiplicate $1 + x + x^4 + x^5$ per $1 - x + x^2 - x^3$,
e troverete $1 - x^8$.

Dimostrare che

$$(a^2 + ab + b^2)(a^3 - a^2b + b^3)(a - b) = a^6 - a^5b + a^2b^4 - b^6.$$

A.G.

Dimostrare, che il prodotto delle quattro quantità

$$a + b, a - b, a^2 + ab + b^2, a^2 - ab + b^2 \text{ è } a^6 - b^6$$

Dimostrare, che

$$\begin{aligned} (x-a)(x-b)(x-c)(x-d) = & x^4 - (a+b+c+d)x^3 \\ & + (ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2 - (abc+abd+acd+bcd)x \\ & + abcd. \end{aligned}$$

Riducete alla più semplice espressione la quantità

$$(x+a)(x+b)(x+c) - (a+b+c)(x+a)(x+b) + (a^2+ab+b^2)(x+a)$$

l'espressione è $x^3 + a^3$.

Provate, che è zero la quantità

$$(a-b)(a+b-c) + (b-c)(b+c-a) + (c-a)(a+c-b).$$

Se $a = n^2 - 1$, $b = 2n$, **e** $c = n^2 + 1$.

Verificate l'uguaglianza

$$(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) = 4a^2b^2.$$

45. Per esercizio della DIVISIONE dividete $x^4 - 9x^2 - 6xy - y^2$
per $x^2 + 3x + y$, **ed** $x^4 - 6x^3y + 9x^2y^2 - 4y^4$
per $x^2 - 3xy + 2y^2$, **i quoti saranno** $x^2 - 3x - y$, $x^2 - 3xy - 2y^2$.

Dividete $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$ per $x^2 - 2x + 1$,
ed $x^4 - 2a^3x^2 + 16a^3x - 15a^4$ per $x^2 + 2ax - 3a^2$
i quoti saranno $x^2 - 2x + 1$, $x^2 - 2ax + 5a^2$.

Dividete $a^6 - b^6$ per $a^3 - 2a^2b + 2ab^2 - b^3$, **ed**
 $1 - 5x + 10x^2 - 10x^3 + 5x^4 - x^5$ per $1 - 3x + 3x^2 - x^3$,
e troverete

$$a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3, \text{ ed } 1 - 2x + x^2.$$

Dividete $x^3 - nax^2 + na^2x - a^3$ per $x - a$, **e trove-**
rete $x^2 - (n-1)ax + a^2$

Il quoto di

$$a^5 + (a-1)x^2 + (a-1)x^3 + (a-1)x^4 - x^5 \text{ per } a - x$$

è $a + x + x^2 + x^3 + x^4.$

Il quoto di

$$a + (a+b)x + (a+b+c)x^2 + (a+b+c)x^3 + (b+c)x^4 + cx^5$$

per $a + bx + cx^2$ è $1 + x + x^2 + x^3.$

Il quoto di

$$x^4 - (a+b+c+d)x^3 + (ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2 - (abc+abd+acd+bcd) + abcd$$

per $x^2 - (a+c)x + ac$ è $x^2 - (b+d)x + bd.$

Il quoto di

$$x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s \text{ per } x - a$$

è $x^3 + (a-p)x^2 + (a^2-ap+q)x + a^3 - pa^2 + qa - r$
con un residuo $a^4 - pa^3 + qa^2 - ra + s.$

Provate le seguenti equazioni

$$\frac{1}{1-2x+x^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 \text{ ec.}$$

$$\frac{1-x}{1+x-x^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 5x^3 \text{ ec.}$$

$$\frac{a^6 - b^6}{a - b} = a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5.$$



CAPO SECONDO

PROPRIETÀ DELLE QUANTITÀ INTERE.



46. *Il prodotto di due quantità non cambia benché l'una quantità si cambi nell'altra.*

Così i prodotti AB , BA delle due quantità A , B sono uguali.

Per dimostrarlo si supponga $A > B$, e si ponga $A = B + C$. Moltiplicandosi A per B in questa uguaglianza dovrà moltiplicarsi $B + C$ per B ; dunque $AB = BB + CB$. Se ora moltiplichiamo B per A , dobbiamo moltiplicare B per $B + C$, dunque avremo $BA = BB + BC$. Da queste due uguaglianze si ricava, che si dimostreranno uguali i prodotti AB , BA se si dimostreranno uguali i prodotti CB , BC . Ora operando in questi, come innanzi, collo spezzare una delle due quantità C , B , che è maggiore dell'altra, in questa più la differenza, si farà dipendere l'uguaglianza dei due prodotti AB , BA dall'uguaglianza de' prodotti per es. CD , DC nei quali $D < B$. Andando così innanzi collo spezzamento della quantità maggiore, è chiaro, che arriveremo a due prodotti, che avranno o i due fattori uguali, e questi evidentemente saranno uguali, o a due prodotti uno de' quali sarà l'unità, come $M. 1$, ed $1. M$: ora questi sono uguali, dunque sono uguali i prodotti AB , BA .

47. *Tanto è moltiplicare una quantità subito pel prodotto di due altre, che moltiplicarla successivamente per queste.*

Così tanto è moltiplicare A per BC , tanto è moltiplicare prima A per B , e poi per C : cosicchè $A \times BC = AB \times C$. Per dimostrarlo si avverta, che il prodotto BC , è la somma $B + B + B + B$ ec. ove la B è ripetuta C volte: dunque moltiplicare A per BC , è lo stesso che moltiplicare A per $B + B + B + B$ ec., il che dà $AB + AB + AB + AB$ ec.

Ora questo prodotto è AB ripetuto C volte, o $AB \times C$; dunque $A \times BC = AB \times C$.

48. *Qualunque numero intero P , che divide il prodotto AB , e non divide il fattore A deve dividere l'altro fattore B .*

Per dimostrar ciò ricordiamoci (A. 154.) primo, che il massimo divisore di due quantità, che sono prime fra loro (§. 155.) è l'unità: secondo, che il massimo divisore fra due quantità è il residuo della penultima divisione, che si eseguisce nell'usare il metodo del massimo divisore, e che quindi il divisore di due proposte quantità dovendo dividere tutti i resti delle successive divisioni del detto metodo, deve dividere l'ultimo resto, o dividere il massimo divisore; cioè il divisore comune alle due quantità A , B deve essere comune al loro massimo divisore.

Ciò posto essendo pel nostro teorema enunciato prime fra loro le quantità A , P , il loro massimo divisore sarà 1, che sarà il residuo della penultima divisione nell'eseguire il metodo del massimo comune divisore. Se ora sono R , R' , R'' , $R''' \dots 1$ i successivi residui di questo metodo, è evidente, che se si trovi non più il massimo divisore fra A , e P ma fra AB , e BP , i quoti del detto metodo rimarranno gli stessi, ma i residui saranno BR , BR' , BR'' , $BR''' + \dots B$; ma per ipotesi AB è divisibile per B , BP lo è evidentemente: dunque P che è divisore comune di AB , e BP : dovrà essere divisore del massimo divisore di AB , e BP : ma se il massimo divisore fra A , e P è 1, evidentemente il massimo divisore fra AB , e BP è B , dunque P divisore di AB , BP sarà divisore di B : ciò, che doveva dimostrarsi.

49. *Qualunque numero primo, che non divide niuno dei due fattori d'un prodotto, non può dividere il prodotto stesso.*

Siano A , B i due fattori d'un prodotto AB , ed un numero primo P che non divida nè A , nè B ; dico, che non può dividere AB .

Se è possibile lo divida. Dividendo A per P il quoto (che può essere zero) sia q , ed il residuo A' , avremo $A = Pq + A'$. Dividiamo anche B per P , il quoto sia q' , ed il residuo B' , avremo $B = Pq' + B'$. Si moltiplichino queste due uguaglianze ed avremo

$$AB = PPqq' + PA'q' + B'Pq + A'B'.$$

In questa uguaglianza per ipotesi il primo membro è divisibile per P , ed i tre primi termini del secondo membro sono divisibili per P , dunque per questa quantità deve essere divisibile l'ultimo termine $A'B'$: dunque porremo $A'B' = CP$. Ora 1.° Niuno dei due fattori A' , B' può essere zero altrimenti il corrispondente fattore A , o B sarebbe divisibile esattamente per P contro l'ipotesi. 2.° Niuno dei due A' , B' può essere 1, perchè nell'uguaglianza $A'B' = CP$ se per es. fosse $A' = 1$ si avrebbe $B' = CP$, mentre che B' residuo della divisione per P deve essere minore di questa quantità.

Abbiamo dunque due quantità A' , B' esistenti, ambedue maggiori dell'unità, ambedue minori di P , e tali che $A'B' = CP$. Essendo A' minore di P si divida P per A' , il quoto sia q'' , ed il residuo A'' , avremo $P = A'q'' + A''$, e moltiplicando per B' sarà $B'P = A'B'q'' + B'A''$: ma $B'P$ è divisibile per P , ed anche $A'B'$ è divisibile per P , perchè $A'B' = CP$, dunque $B'A''$ deve essere divisibile per P .

La quantità A'' non può essere zero, altrimenti P sarebbe divisibile per A' , che non essendo uno, non sarebbe P numero primo contro l'ipotesi: d'altronde essendo A'' residuo della divisione per A' deve essere minore di questa quantità, dunque dal prodotto $A'B'$ divisibile per P siamo andati al prodotto $A''B'$ non zero, minore dell'antecedente, e divisibile per P . Andando così innanzi si procederebbe a prodotti mai zero, e di più in più piccoli tutti divisibili per P : si giungerebbe dunque ad un prodotto non zero, ma così piccolo, che sarebbe minore di P , ed allo

stesso tempo divisibile esattamente per P , ciò che è assurdo: dunque è assurdo, che un numero primo P , che non divide due quantità A , B , divida il loro prodotto AB .

50. Una espressione come $a+bx+cx^2+dx^3+ex^4$ ec. si dice ordinata secondo gli esponenti della x , perchè tutti i suoi termini contengono questa lettera coi successivi suoi esponenti.

L'espressione $a+bx+cx^2+dx^3+ex^3+fx^4+gx^4+hx^4+ec.$ non sarebbe ordinata secondo gli esponenti della x , perchè alcuni suoi termini contengono la x collo stesso esponente, e per ordinarla si debbono chiudere fra parentesi i coefficienti della x collo stesso esponente; quindi l'espressione superiore sarebbe ordinata scrivendo

$$a + bx + (c + d)x^2 + ex^3 + (f + g + h)x^4 + ec.$$

51. Se due espressioni essendo ordinate per gli esponenti di una quantità di qualunque valore sono uguali, i coefficienti delle quantità cogli stessi esponenti in ambedue i membri debbono essere uguali.

Siano le due espressioni

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 \text{ ec.}$$

$$a' + b'x + c'x^2 + d'x^3 + e'x^4 + f'x^5 \text{ ec.}$$

uguali, dimostro, che deve essere

$$a = a', \quad b = b', \quad c = c', \quad d = d' \text{ ec.}$$

Infatti avendosi

$$a+bx+cx^2+dx^3+ex^4 \text{ ec.} = a'+b'x+c'x^2+d'x^3+e'x^4 \text{ ec.}$$

avremo ancora

$$a-a'+bx-b'x+c x^2-c' x^2+dx^3-d' x^3+ex^4-e' x^4+ \text{ ec.} = 0,$$

$$\text{ed } (a-a')+(b-b')x+(c-c')x^2+(d-d')x^3+(e-e')x^4 \text{ ec.} = 0.$$

Ora la quantità, che è nel primo membro può essere zero in due modi, o perchè la somma dei termini negativi uguaglia la somma dei positivi, o perchè i diversi termini sono zero. Nel primo caso si dice, che *la quantità del primo membro si annulla per compenso, nel secondo caso, che si annulla per identità.*

Ma la nostra quantità non può annullarsi per compenso, perchè se per un valore della x la somma delle quantità positive uguaglia la somma delle negative, per infiniti altri l'una delle due somme sarà superiore: dunque la detta quantità s'annulla perchè sono zero i suoi termini: ma la x generalmente non è zero, dunque debbono essere zero i coefficienti della x avente i diversi esponenti, dunque $a - a' = 0$, $b - b' = 0$, $c - c' = 0$, $d - d' = 0$ ec., dalle quali $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$, $d = d'$ ec., che è il teorema enunciato.

52. *Se il dividendo è ordinato per una lettera, che non si trova nel divisore, affinchè la divisione riesca esatta, i coefficienti della lettera avente i diversi esponenti debbono dividersi esattamente pel divisore.*

Sia il dividendo $Aa^4 + Ba^3 + Ca^2 + Da + E$, ed il divisore M , che non contenga a . Se la divisione deve essere esatta il quoto deve contenere la a cogli stessi esponenti del dividendo, e con i coefficienti interi relativamente alle lettere, affinchè moltiplicato pel divisore dia lo stesso dividendo: dunque il quoto sarà della forma $A'a^4 + B'a^3 + C'a^2 + D'a + E'$, ove A' , B' , C' ec. sono coefficienti interi relativamente alle lettere: dunque sarà

$$Aa^4 + Ba^3 + Ca^2 + Da + E =$$

$$MA'a^4 + MB'a^3 + MC'a^2 + MD'a + ME':$$

dunque pel teorema antecedente

$$A = MA', B = MB', C = MC', D = MD', E = ME',$$

e quindi

$$\frac{A}{M} = A', \quad \frac{B}{M} = B', \quad \frac{C}{M} = C', \quad \frac{D}{M} = D', \quad \frac{E}{M} = E' :$$

nelle quali $A', B', C',$ ec. essendo valori interi, A, B ec. saranno divisibili esattamente per M ; cioè affinchè il nostro dividendo sia divisibile esattamente pel divisore è necessario, che i coefficienti della lettera non comune al divisore elevata a diversi esponenti siano esattamente divisibili pel divisore stesso.

53. Una quantità coll'esponente 2 si dice il quadrato delle quantità. Così a^2, m^2 si dicono i quadrati di a , di m .

54. La somma di due quantità moltiplicata per la loro differenza dà la differenza dei quadrati delle quantità stesse.

Siano a, b , il teorema è evidentemente espresso dalla uguaglianza $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$: questa uguaglianza poi si verifica coll'eseguire la moltiplicazione di $a + b$ per $a - b$.

Questo teorema può essere utile in molti casi per la decomposizione dei polinomii nei loro fattori. Se fosse $4a^2b^2 - 9c^4$: vedendo che $4a^2b^2, 9c^4$ sono i quadrati di $2ab, 3c^2$, perchè ripetuti due volte come fattori danno $4a^2b^2, 9c^4$, potremo porre $4a^2b^2 - 9c^4 = (2ab + 3c^2)(2ab - 3c^2)$. Così ancora $a^8b^{16} - m^4n^{12} = (a^4b^8 + m^2n^6)(a^4b^8 - m^2n^6) = (a^4b^8 + m^2n^6)(a^2b^4 + mn^3)(a^2b^4 - mn^3)$.

55. Il quadrato della somma, o della differenza di due quantità è uguale alla somma dei quadrati delle quantità stesse più, o meno due volte il loro prodotto.

Il teorema è espresso dall'uguaglianza

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2, \text{ il segno } \pm \text{ vuol dire } + \text{ o } -;$$

si prova poi col moltiplicare $a + b$ per $a + b$, ed $a - b$ per $a - b$.

56. Con questi due teoremi si possono fare delle decomposizioni dei polinomii nei loro fattori, per es.

$$1 - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2ab} = (\S. 55.)$$

$$\frac{c^2 - (a - b)^2}{2ab} = (\S. 54.) \frac{(c + a - b)(c - a + b)}{2ab}$$

$$b^2 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right)^2 = \left(b + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right)\left(b - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right) =$$

$$\left(\frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right)\left(\frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2c}\right) = \frac{((b+c)^2 - a^2)(a^2 - (b-c)^2)}{4c^2} =$$

$$\frac{(b + c + a)(b + c - a)(a + b - c)(a - b + c)}{4c^2}.$$

|||



CAPO TERZO

OPERAZIONI SULLE QUANTITÀ GENERALI FRATTE.



57. Per *frazione nell'aritmetica generale* s'intende l'espressione d'una divisione ineseguibile a causa, che il divisore non è fattore del dividendo: quindi sono frazioni l'espressioni

$$\frac{a}{b}, \frac{a+b}{c-d}, \frac{a^2 + a + 1}{a^3 + a^2 + a + 2}.$$

Le frazioni nell'aritmetica erano quelle nelle quali il dividendo era minore del divisore: nell'aritmetica generale però non si parla di valore, e quindi il numeratore può essere in valore anche maggiore del denominatore.

58. Malgrado questa diversità fra le frazioni numeriche, e quelle espresse con lettere, per dimostrare le proprietà di queste, ed eseguire sopra di esse le operazioni, come nell'aritmetica, riterremo, che l'unità si spezzi in un numero di parti, e che un numero di queste appartenga alla frazione. Se i valori, che nei casi particolari si daranno alle lettere, renderanno la frazione mista, talchè contenga qualche unità, il numero delle parti competenti alla frazione supererà il numero delle parti dell'unità; nel caso poi, che sia vera frazione questo numero sarà inferiore a quello delle parti dell'unità.

59. Ciò posto sia $\frac{a}{b}$ una frazione; sia d il numero delle parti nelle quali si spezza l'unità ripetuta dal numeratore della frazione, e sia z il valore di una di queste parti, sarà $dz = 1$. Supponendo ora, che di queste parti z ne competano n alla frazione, e che il suo valore sia espresso da u avremo $u = nz$. Si moltiplichì questa per l'uguaglianza $dz = 1$, ed avremo $udz = nz$, da cui, dividendo ambedue i membri per z , avremo $ud = n$, e da questa $u = \frac{n}{d}$.

60. Da questa uguaglianza si ricava, che il valore d'ogni frazione si può rappresentare da una divisione, il di cui divisore esprime in quante parti uguali d si divide l'unità, cui si riferisce la frazione, ed il dividendo quante parti n competono alla frazione.

Tuttociò combina coll'aritmetica (A. 24.), il perchè anche nell'aritmetica generale il divisore si chiama il denominatore della frazione, ed il dividendo si dice il numeratore.

61. Dall'uguaglianza (§. 59.) $ud = n$ si ricava, che il valore della frazione moltiplicato pel denominatore è uguale al numeratore.

62. Dall'uguaglianza $ud = n$, moltiplicando ambedue i membri per r , abbiamo $udr = nr$, e dividendo per dr

sarà $u = \frac{nr}{dr}$: ma avevamo (§. 59.) $u = \frac{n}{d}$: dunque $\frac{n}{d} = \frac{nr}{dr}$: dunque il numeratore, ed il denominatore di una frazione si possono moltiplicare per una stessa quantità r senza che la frazione cambi di valore.

63. Se si inverte l' antecedente uguaglianza abbiamo $\frac{nr}{dr} = \frac{n}{d}$: dunque da $\frac{nr}{dr}$ senza cambiare il valore della frazione si può ottenere $\frac{n}{d}$ col dividere numeratore e denominatore per la stessa quantità r .

64. Eseguiamo ora le quattro operazioni sopra le frazioni, e prima la somma. O le frazioni da sommarsi hanno lo stesso denominatore, o hanno denominatore diverso. Nel primo caso siano le frazioni $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{b}$, $\frac{d}{b}$, si pongano u, u', u'' i loro valori, avremo $u = \frac{a}{b}$, $u' = \frac{c}{b}$, $u'' = \frac{d}{b}$, ed (§. 61.) $ub = a$, $u'b = c$, $u''b = d$, e sommando $ub + u'b + u''b = a + c + d$, e dividendo per b , $u + u' + u'' = \frac{a + c + d}{b}$, e ponendo per u, u', u'' i loro valori sarà $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} + \frac{d}{b} = \frac{a + c + d}{b}$: dunque la somma delle frazioni dello stesso denominatore si eseguisce sommando i numeratori, e dividendo la somma pel denominatore comune.

65. Siano da sommarsi le frazioni $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{m}{n}$, $\frac{r}{s}$ di diverso denominatore. Si esprimano i loro valori da u, u', u'', u''' , sarà $u = \frac{a}{b}$, $u' = \frac{c}{d}$, $u'' = \frac{m}{n}$, $u''' = \frac{r}{s}$, ed $ub = a$, $u'd = c$, $u''n = m$, $u'''s = r$. Affinchè u, u' ec. abbiano lo stesso moltiplicatore in queste uguaglianze è ne-

cessario di moltiplicare ognuna di essi per i moltiplicatori degli altri: la moltiplicazione poi si farà in ambedue i membri; avremo dunque $ubdns = adns$, $u'bds = cbns$, $u''bds = bdms$, $u'''bds = bdnr$, sommando sarà $ubdns + u'bds + u''bds + u'''bds = adns + cbns + mbds + bdnr$, e dividendo per bds sarà

$$u + u' + u'' + u''' = \frac{adns + cbns + mbds + bdnr}{bds}$$

ossia sostituendo i valori di u, u', u'', u''' .

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{m}{n} + \frac{r}{s} = \frac{adns + cbns + mbds + bdnr}{bds}$$

Ora si riducano allo stesso denominatore le frazioni

$$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{m}{n}, \frac{r}{s}$$

col metodo dell'Aritmetica, cioè che non cambia il loro valore, avremo

$$\frac{adns}{bds}, \frac{cbns}{bds}, \frac{mbds}{bds}, \frac{bdnr}{bds} :$$

nelle quali se si sommano i numeratori, ed alla somma si dà per denominatore il denominatore comune avremo il risultamento antecedente; dunque nella nostra aritmetica generale per fare la somma delle frazioni si riducono allo stesso denominatore, si sommano i numeratori, ed alla somma si dà il denominatore comune.

66. Nella sottrazione se le frazioni abbiano lo stesso denominatore, dal numeratore del minuendo si toglie il numeratore del minutore, ed al residuo si dà per denominatore il denominatore comune. Infatti si debba togliere $\frac{c}{b}$ da $\frac{a}{b}$. Si

ponga $u = \frac{a}{b}$, ed $u' = \frac{c}{b}$ avremo $ub = a$, $u'b = c$:
 togliendo dalla prima la seconda uguaglianza sarà $ub - u'b =$
 $a - c$, e dividendo per b , $u - u' = \frac{a-c}{b}$, ossia
 $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$, che è il teorema.

67. Se le due frazioni abbiano diversi denominatori si ridur-
 ranno allo stesso denominatore, come nell'aritmetica, e poi si
 seguirà la regola antecedente. Se si abbia $u = \frac{a}{b}$, $u' = \frac{c}{d}$,
 sarà $ub = a$, $u'd = c$, ed $ubd = ad$, $u'bd = bc$, $ubd - u'bd =$
 $ad - bc$, ed $u - u' = \frac{ad - bc}{bd}$, $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$,
 che è la regola ora data.

68. Riguardo alla moltiplicazione sia da moltiplicarsi $\frac{a}{b}$
 per $\frac{c}{d}$. Si ponga $u = \frac{a}{b}$, $u' = \frac{c}{d}$, avremo $ub = a$,
 $u'd = c$, e moltiplicando queste uguaglianze sarà $uu'db = ac$,
 e dividendo per bd , $uu' = \frac{ac}{bd}$, ossia $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

Se si farà $b = 1$ avremo il caso di un intero moltip-
 licato per una frazione, la quale se, assegnati i valori nu-
 merici alle lettere, sarà vera, sarà il caso di prendersi una
 frazione di un intero; se sarà mista, cioè mista d'intero, e
 di frazione, sarà il caso, che l'intero sarà moltiplicato per
 la parte intera della frazione, e poi dell'intero sarà presa
 una frazione. In secondo luogo se $d = 1$ nell'uguaglianza
 superiore sarà il caso di una frazione moltiplicata per un
 intero.

Finalmente se si ritengono ambedue le frazioni $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$
 in questo caso o $\frac{c}{d}$, coi valori numerici di c , e di d , sarà

una vera frazione, ed allora della frazione $\frac{a}{b}$ si prenderà una frazione; o sarà frazione mista, ed allora $\frac{a}{b}$ prima si moltiplicherà per la parte intera di questa frazione mista, e poi se ne prenderà una frazione.

Comunque sia l'equazione $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ ci dice, che ridotto l'intero ad aspetto frazionario la moltiplicazione fra $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ o il prendere frazione di una quantità si eseguisce moltiplicando numeratore con numeratore, e denominatore con denominatore.

69. Finalmente si debba dividere $\frac{a}{b}$ per $\frac{c}{d}$. Sia $u = \frac{a}{b}$, $u' = \frac{c}{d}$ sarà $ub = a$, $u'd = c$, ossia $c = u'd$, che moltiplicate per $ub = a$ sarà $ubc = u'ad$, e dividendo per $u'bc$ sarà $\frac{u}{u'} = \frac{ad}{bc}$, o $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$.

Se $b = 1$ avremo la divisione d'un intero per una frazione, e se $d = 1$ avremo la divisione d'una frazione per un intero. In qualunque di questi casi dato all'intero, se vi è, l'aspetto frazionario, si rovescerà la frazione divisore, e si moltiplicherà numeratore con numeratore, e denominatore con denominatore.



ESERCIZII SULLE FRAZIONI.

~~ESERCIZIO~~

Sommate $\frac{a}{a+x}$ ed $\frac{x}{a-x}$, e troverete $\frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}$.

Semplificate quanto si può l'espressione

$$\frac{1}{4a^3(a+x)} + \frac{1}{4a^3(a-x)} + \frac{1}{2a^2(a^2+x^2)}, \text{ troverete } \frac{1}{a^4 - x^4}.$$

Sottraete $\frac{x-y}{x+y}$ da $\frac{x+y}{x-y}$, troverete $\frac{4xy}{x^2 - y^2}$.

Esprimete nel modo il più semplice la quantità

$$\frac{x+y}{y} - \frac{2x}{x+y} + \frac{x^3 - x^2y}{y^3 - x^2y}, \text{ e troverete } \frac{y}{x+y}.$$

Moltiplicate $\frac{ax}{(a-x)^2}$ per $\frac{a^2 - x^2}{ab}$, e troverete

$$\frac{ax + x^2}{ab - bx}.$$

Moltiplicate $\frac{a}{x} + \frac{b}{y}$ per $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, e troverete

$$\frac{x}{a} + \frac{bx^2}{a^2y} + \frac{ay^2}{b^2x} + \frac{y}{b}.$$

Dividete $\frac{2ax - x^2}{c^2 - x^2}$ per $\frac{2a - x}{(c-x)^2}$, e troverete

$$\frac{cx - x^2}{c^2 + cx + x^2}.$$

Dividete $\frac{8ab}{9x^2} + 2 + \frac{9x^2}{8ab}$ per $\frac{4a}{3x} + \frac{3x}{2b}$ e troverete

$$\frac{2b}{3x} + \frac{3x}{4a}.$$

70. Anche le frazioni dell'aritmetica generale si semplificano col dividere i loro due termini pel massimo comune divisore, e la dimostrazione, ed il metodo dato per trovarlo (A. §. 153, 154.) serve anche nella nostra aritmetica, perchè la dimostrazione e metodo fu dato con tutta la possibile generalità.—

Nell'aritmetica però le divisioni richieste dal detto metodo si possono sempre eseguire. Quando poi questo metodo si vuol adoperare nelle lettere spesso avviene, che il primo termine del dividendo non possa dividersi pel primo del divisore, perchè gli manca un fattore di questo. Ora dimostro, che quando ciò accade, nel dividendo si può introdurre questo fattore col moltiplicare per questo tutto il dividendo stesso, purchè non sia fattore del divisore, ossia non moltiplichi tutto il divisore. Ora ciò è evidente. Siano infatti le due quantità AB, CB nelle quali A, B siano prime fra loro; è evidente, che il loro massimo divisore è B. Ora questo massimo divisore non si altera se una delle due per es. AB si moltiplica per M, purchè M non sia fattore, o non contenga fattore comune all'altro CB, perchè se contenesse fattore comune a CB, il divisore comune crescerebbe di questo. Così ancora senza alterare il comune divisore fra due quantità potrò togliere ad una un fattore, che non sia comune all'altra, perchè ciò non scema il comune divisore.

71. Posto ciò si userà il metodo dato nell'aritmetica per trovare il massimo divisore comune a due polinomii. *Nel nostro caso però se uno dei due polinomii nelle successive divisioni si troverà avere un fattore non comune all'altro, si toglierà, e l'operazione sarà più semplice; e quando il primo termine d'un dividendo non possa dividersi pel primo termine del suo divisore, perchè gli manca un fattore, quando questo non sia comune a tutto il divisore, per questo moltiplicate tutto il dividendo, ed eseguite la divisione.*

72. Dopo ciò sia proposto di trovare il massimo divisore comune ai due polinomii

$$12x^3 + 4x^2 - 3x - 1, \text{ e } 8x^3 - 4x^2 - 2x + 1.$$

Ecco il prospetto dell'operazione :

$$\begin{array}{r}
 12x^3 + 4x^2 - 3x - 1 \quad | \quad 8x^3 - 4x^2 - 2x + 1 \\
 24x^3 + 8x^2 - 6x - 2 \quad \quad \quad 3 \\
 \hline
 24x^3 - 12x^2 - 6x + 3 \\
 - \quad + \quad + \quad - \\
 \hline
 20x^2 - 5 \\
 \\
 8x^3 - 4x^2 - 2x + 1 \quad | \quad 4x^2 - 1 \\
 8x^3 \quad \quad - 2x \quad \quad \quad 2x - 1 \\
 + \quad \quad \quad + \\
 \hline
 - 4x^2 + 1 \\
 - 4x^2 + 1 \\
 \hline
 = =
 \end{array}$$

Posto il polinomio $12x^3 + 4x^2$ ec. per dividendo, e l'altro per divisore, si trova, che il 12 non si può dividere per 8, ma si può, se si moltiplica per 2; e si vede, che il 2 non moltiplica tutto il divisore: dunque sul dividendo si eseguisca questa moltiplicazione. Fatta la divisione si trova un residuo $20x^2 - 5$, che deve diventare divisore. Avendo però esso un fattore 5 non comune al divisore, che deve diventare dividendo, questo fattore si sopprime, e si divide $8x^3 - 4x^2 - 2x + 1$ per $4x^2 - 1$; la divisione riesce esatta, dunque $4x^2 - 1$ è il massimo divisore cercato.

73. Si debba trovare il massimo divisore comune nelle due espressioni

$$\begin{array}{l}
 2x^5 - 4x^4 + 8x^3 - 12x^2 + 6x \\
 3x^5 - 3x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 3x
 \end{array}$$

poste queste nell'aspetto

$$2x(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 3)$$

$$3x(x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 1)$$

si vede, che x è un fattore comune, e che 2, 3 essendo due fattori delle due quantità date, non hanno divisore comune: dunque 2, e 3 si trascureranno, perchè non fanno parte del comun divisore, e la x si terrà a conto, perchè trovato il massimo divisore delle quantità dentro le parentesi, questo si moltiplicherà per x . Che se i due dati polinomii, essendo i termini di una frazione, debbano essere divisi pel divisore massimo, onde semplificare la frazione, si rigetterà la x , si divideranno i due polinomii dentro parentesi pel divisore comune trovato, ed i quoti si moltiplicheranno per 2, e 3.

Ecco il prospetto dell'operazione.

$$x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 1 \quad | \quad x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 3$$

1

$$\begin{array}{r} x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 3 \\ - \quad + \quad - \quad + \quad - \\ \hline x^3 - 6x^2 + 9x - 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} | \quad x^3 - 6x^2 + 9x - 4 \\ \hline x + 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 3 \\ x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 4x \\ - \quad + \quad - \quad + \\ \hline 4x^3 - 5x^2 - 2x + 3 \\ 4x^3 - 24x^2 + 36x - 16 \\ - \quad + \quad - \quad + \\ \hline \end{array}$$

$$19x^2 - 38x + 19 \quad (a)$$

$$\begin{array}{r} | \quad x^2 - 2x + 1 \\ \hline x - 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 6x^2 + 9x - 4 \\ x^3 - 2x^2 + x \\ - \quad + \quad - \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (b) \quad -4x^2 + 8x - 4 \\ - \quad x^2 + 2x - 1 \\ - \quad x^2 + 2x - 1 \\ + \quad - \quad + \\ \hline = \quad = \end{array}$$

In questo esempio si vede, che nei residui (a), (b) si sono rigettati i fattori 19, e 4, che non erano comuni all'altro polinomio, col quale si eseguiva la divisione.

74. Alle volte la destrezza di saper decomporre i polinomi ne' loro fattori può far scoprire il loro comune divisore massimo, senza far ricorso al metodo dato. Siccome l'addestrarsi a trovare i fattori dei polinomi è molto utile, di ciò, che abbiain detto daremo qualche esempio. Siano i due polinomi

$$9x^3 - 3xy - 6x + 2y, \quad 6x^4 - 4x^3 - 3xy^2 + 2y^2$$

Ecco l'operazione sul primo

$$\begin{aligned} 9x^3 - 3xy - 6x + 2y &= 9x^3 - 3xy - (6x - 2y) = \\ 3x(3x - y) - 2(3x - y) &= (3x - 2)(3x - y), \end{aligned}$$

perchè il $3x - y$ si è trovato moltiplicare il $3x$, e -2 .
Nell'altro polinomio

$$\begin{aligned} 6x^4 - 4x^3 - 3xy^2 + 2y^2 &= 6x^4 - 4x^3 - (3xy^2 - 2y^2) = \\ 2x^3(3x - 2) - y^2(3x - 2) &= (2x^3 - y^2)(3x - 2): \end{aligned}$$

dunque il massimo divisore dei due polinomi dati è $3x - 2$.
Siano anche i polinomi

$$3bcz + 5mxz + 30mx + 18bc, \quad 4adz - 7vrz + 24ad - 42vr$$

Il primo si può esprimere con

$$3be(z + 6) + 5mx(z + 6) = (3bc + 5mx)(z + 6);$$

il secondo darà

$$4ad(z + 6) - 7vr(z + 6) = (4ad - 7vr)(z + 6):$$

dunque il massimo divisore comune è $z + 6$.

Siano anche

$$a^3 + a^2b - ab^2 - b^3$$

$$a^3 - a^2b - ab^2 + b^3$$

il primo ci dà

$$a^2(a+b) - b^2(a+b) = (a^2 - b^2)(a+b)$$

l'altro

$$a^2(a-b) - b^2(a-b) = (a^2 - b^2)(a-b):$$

dunque il massimo divisore comune è $a^2 - b^2$.

75. Per trovare il massimo comune divisore di più di due quantità si supponga, che si voglia il divisore massimo comune fra le quantità a, b, c . Si trovi il divisore massimo fra a e b , e sia d ; è evidente, che il massimo divisore delle tre proposte quantità deve essere comune a c, d ; si trovi dunque il massimo divisore fra d e c , e questo sarà il comune alle tre.

Sia proposto di trovare il massimo divisore delli tre polinomii

$$a^3 + a^2b - ab^2 - b^3$$

$$a^3 - 2a^2b - ab^2 + 2b^3$$

$$a^3 - 3ab^2 + 2b^3.$$

Si troverà il massimo divisore delle due prime essere $a^2 - b^2$; cercando il massimo divisore di $a^2 - b^2$, e la terza, si trova $a - b$; dunque questo è il massimo divisore delle tre proposte quantità.

Avendo ora esposto tutte le operazioni sulle espressioni delle quantità per mezzo delle lettere, proporremo degli esercizi di calcolo, che non si raccomandano mai abbastanza, senza i quali non si progredisce bene alle teorie universali, ed estratte.

76. E qui si avverta, che come nei prodotti delle quantità

colla stessa lettera si sommano gli esponenti, così si sommano gli esponenti dei polinomii identici : quindi

$$(a+b)(a+b) = (a+b)^2, (a+b)(a+b)(a+b) = (a+b)^3$$

$$(a+b)^3(a+b)^2 = (a+b)^5$$

e ciò per i binomii, cioè per li polinomii di due monomii: ma si fa lo stesso per li trinomii, quadrinomii, ec. ossia per li polinomii di tre, di quattro ec. monomii. Così per es. nelli quadrinomii

$$(a+b+c+d)(a+b+c+d) = (a+b+c+d)^2.$$

Ciò posto trovate

$$(a+b)^2 c^2 + (a-b)^2 c^2 = 2(a^2 + b^2) c^2,$$

$$(a+b)^2 c^2 - (a-b)^2 c^2 = 4abc^2,$$

$$(x+y)^2 + (x-y)^2 + 2z^2 = 2(x^2 + y^2 + z^2),$$

$$(ax+by)^2 + (ay-bx)^2 + c^2 x^2 + c^2 y^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2),$$

$$(ax+by)^2 + (cx+dy)^2 + (ay-bx)^2 + (cy-dx)^2 = \\ (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2),$$

$$[(ac+bd)x + (ad-bc)y]^2 + [(ac-bd)y - (ad-bc)x]^2 = \\ (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)(x^2 + y^2),$$

$$a^4 - (b^2 - c^2)^2 + b^4 - (a^2 - c^2)^2 + c^4 - (a^2 - b^2)^2 = \\ (a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a),$$

$$(ab-cd)^2 - (a+b-c-d)[ab(c+d) - cd(a+b)] = \\ (a-c)(a-d)(b-c)(b-d),$$

$$a^2 - 6ax + 17x^2 - 16x^3 \frac{(2a+x)}{(a+x)^2} = \frac{(a-x)^4}{(a+x)^2},$$

Se
$$x^2 = \frac{(c^2 + d^2)ab - (a^2 + b^2)cd}{ab - cd}$$

dimostrate l'uguaglianza

$$1 - \left(\frac{a^2 + b^2 - x^2}{2ab} \right)^2 = \frac{(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a+c-b-d)(b+c-a-d)}{4(ab-cd)^2},$$

Provate la riduzione alla più semplice espressione nelli seguenti casi

$$\frac{x^2 + (a-b)x - ab}{x^2 - (a+b)x + ab} = \frac{x+a}{x-a},$$

$$\frac{6x^5 + 15x^4y - 4x^3z^2 - 10x^2yz^2}{9x^3y - 27x^2yz - 6xyz^2 + 18yz^3} = \frac{x^2(2x+5y)}{3y(x-3z)},$$

$$\frac{a^4 + a^3b + ab^3 + b^4}{a^4 - 3a^3b + 4a^2b^2 - 3ab^3 + b^4} = \left(\frac{a+b}{a-b} \right)^2,$$

$$\frac{a^2 - acx + (ac - b^2 + bc)x^2 - bcx^3}{a^2 + abx + (ac - c^2 + bc)x^2 + c^2x^3} = \frac{a - bx}{a + cx},$$

$$\frac{(ab-1)^2 + (a+b-2)(a+b-2ab)}{(ab+1)^2 - (a+b)^2} = \frac{(a-1)(b-1)}{(a+1)(b+1)},$$

$$\frac{(a^2-1)(b^2-1)ab + 4a^2b^2 - (a^2+b^2)(1+a^2b^2)}{(a^2+1)(b^2+1)ab - 4a^2b^2 - (a^2+b^2)(1+a^2b^2)} = \left(\frac{ab+1}{ab-1} \right)^2,$$

Provate le seguenti uguaglianze

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)(x+a)} - \frac{1}{(a-b)(b-c)(x+b)} + \frac{1}{(a-c)(b-c)(x+c)} = \frac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)},$$

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)(x+a)} - \frac{b^2}{(a-b)(b-c)(x+b)} + \frac{c^2}{(a-c)(b-c)(x+c)} = \frac{x^2}{(x+a)(x+b)(x+c)},$$

$$\left(a + \frac{ax}{a-x}\right) \left(a - \frac{ax}{a+x}\right) \times \frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2} = \frac{a^4}{a^2 + x^2}$$

Il massimo comun divisore di

$$x^4 + ax^3 - 9a^2x^2 + 11a^3x - 4a^4, \text{ e di } x^4 - ax^3 - 3a^2x^2 + 5a^3x - 2a^4$$

è $(x - a)^3,$

$$\text{di } 3x^4 - 10x^3 + 9x^2 - 2x, \text{ e di } 2x^4 - 7x^3 + 2x^2 + 8x$$

è $x^2 - 2x,$

$$\text{di } 6a^4 + 4a^3b - 9a^2b^2 - 3ab^3 + 2b^4,$$

e di $4a^4 - 4a^2b^2 + 4ab^3 - b^4$ è $2a^2 + 2ab - b^2,$

$$\text{di } 3x^2 - (4a + 2b)x + a^2 + 2ab,$$

e di $x^3 - (2a + b)x^2 + (a + 2b)ax - a^2b$ è $x - a,$

$$\text{di } x^4 - 2a(a - b)x^2 + (a^2 + b^2)(a - b)x - a^2b^2,$$

e di $x^4 - (a - b)x^3 + (a - b)b^2x - b^4$ è $x^2 - (a - b)x + b^2,$

$$\text{di } a^3 + (a + 1)ay + y^3, \text{ e di } a^4 - a^2(y^2 - y) - y^3$$

è $a^3 + a^2y + ay + y^2,$

e delli tre polinomii

$$a^3 + 5a^2x + 7ax^2 + 3x^3, \quad a^3 + 3a^2x - ax^2 - 3x^3,$$

$$a^3 + a^2x - 5ax^2 + 3x^3 \quad \text{è} \quad a + 3x.$$



CAPO QUARTO

DELLE FRAZIONI CONTINUE.

-308-

Le frazioni continue formano una specie di quantità dotate di proprietà rimarchevoli, e molto utili, e che in conseguenza meritano di essere trattate.

77. Per *frazione continua* s'intende una frazione, il di cui denominatore è un numero intero più una frazione, ed il denominatore di questa un numero intero più una frazione, e così innanzi.

L'espressioni

$$a + \frac{1}{\frac{b}{c} + 1} = \frac{a + \frac{1}{c}}{\frac{b}{c} + 1} = \frac{ac + 1}{b + c} \text{ ec.}$$

$$a + \frac{b'}{\frac{b}{c} + \frac{c'}{d} + 1} = \frac{a + \frac{b'}{\frac{c}{d} + 1}}{\frac{b}{c} + \frac{c'}{d} + 1} = \frac{a + \frac{b'd}{c + d}}{\frac{b}{c} + \frac{c'}{d} + 1} \text{ ec.}$$

sono frazioni continue. Noi tratteremo delle frazioni continue della prima forma, perchè sono più di uso, e perchè dalla cognizione delle loro proprietà si ricavano quelle delle frazioni della seconda forma. Vediamo ora come la frazione continua si possa ridurre a più frazioni comuni arrestandoci ai successivi denominatori.

78. Abbiamo dunque

$$a = a$$

$$a + \frac{1}{b} = \frac{ab + 1}{b}$$

$$a + \frac{1}{\frac{b}{c} + 1} = \frac{abc + c + a}{bc + 1} = \frac{(ab + 1)c + a}{bc + 1}$$

$$\frac{a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d}}}}{\quad} = \frac{abcd + cd + ad + ab + 1}{bcd + d + b} = \frac{(abc + c + a)d + ab + 1}{(bc + 1)d + b}.$$

$$\frac{a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \frac{1}{e}}}}}{\quad} = \frac{abcde + cde + ade + abe + e + abc + c + a}{bcde + de + be + bc + 1} = \frac{(abcd + cd + ad + ab + 1)e + abc + c + a}{(bcd + d + b)e + bc + 1}.$$

79. Se si osservano queste diverse frazioni comuni avute dall'arrestarci ai successivi denominatori della frazione continua, si vede, che ogni numeratore è il numeratore antecedente moltiplicato pel denominatore attuale, dove ci arrestiamo, più il numeratore della penultima frazione, e che la stessa legge vale pel denominatore. Dopo ciò se diciamo A l'intero della frazione continua, A' il suo denominatore, B, C, D, E, ec. i numeratori delle successive frazioni, alle quali ci conduce la frazione continua, e B', C', D', E' ec. i denominatori corrispondenti, sarà

$$\begin{array}{ll} A = a & A' = 1 \\ B = Ab + 1 & B' = b \\ C = Bc + A & C' = B'c + A' \\ D = Cd + B & D' = C'd + B' \\ E = De + C & E' = D'e + C' \\ \text{ec.} & \text{ec.} \end{array}$$

Ora egli è facile dimostrare, che questa legge sussisterà sempre. Supponiamo infatti, che valga fino alla $\frac{D}{D'}$, dico che vale

anche per la frazione $\frac{E}{E'}$. Infatti abbiamo dalle antecedenti

uguaglianze $\frac{D}{D'} = \frac{Cd + B}{C'd + B'}$; ora è evidente, che $\frac{D}{D'}$ si

cangia in $\frac{E}{E'}$, se nel suo valore si cambia la d in $d + \frac{1}{e}$:
 dunque

$$\frac{E}{E'} = \frac{C\left(d + \frac{1}{e}\right) + B}{C'\left(d + \frac{1}{e}\right) + B'} = \frac{e(Cd + B) + C}{e(C'd + B') + C'};$$

ove ponendo invece di $Cd+B$ il D , ed invece di $C'd+B'$ il D' sarà $\frac{E}{E'} = \frac{De + C}{D'e + C'}$, che mostra la legge per ipotesi sussistente fino a $\frac{D}{D'}$.

80. Vediamo ora come le frazioni si possono ridurre a frazioni continue.

Sia $\frac{M}{N}$ una frazione. Si supponga che a sia l'intero il più prossimo ad $\frac{M}{N}$ talchè la differenza $\frac{M}{N} - a$ sia una frazione $\frac{M'}{N}$. Si rovesci questa, e sia b l'intero il più prossimo ad $\frac{N}{M'}$, cosicchè $\frac{N}{M'} - b$ sia una frazione $\frac{N'}{M'}$. Si trovi ora un intero il più prossimo a $\frac{M'}{N'}$, e questo sia c , e si proceda così innanzi. Dal nostro calcolo si ricava

$$\frac{M}{N} - a = \frac{M'}{N}, \quad \frac{N}{M'} - b = \frac{N'}{M'}, \quad \frac{M'}{N'} - c = \frac{M''}{N'},$$

$$\frac{N'}{M''} - d = \frac{N''}{M''} \text{ ec.}$$

dalla prima abbiamo

$$\frac{M}{N} = a + \frac{M'}{N} = a + \frac{1}{\frac{N}{M'}}$$

ma dalla seconda $\frac{N}{M'} = b + \frac{N'}{M'}$;

dunque sostituendo $\frac{M}{N} = a + \frac{1}{b + \frac{N'}{M'}} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{\frac{M'}{N'}}}$:

ma per la terza $\frac{M'}{N'} = c + \frac{M''}{N'}$:

dunque $\frac{M}{N} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{M''}{N'}}}$ ec.

81. Osservando come si sono ottenute le quantità a, b, c , ec. si vedrà, che sono i quoti ottenuti col metodo del massimo comune divisore fra M ed N , perchè dividendo M per N si ha per quoto a , intero più prossimo a $\frac{M}{N}$, la differenza poi fra a ed $\frac{M}{N}$ è il residuo M' della divisione diviso pel divisore N . Il rovesciarsi poi di $\frac{M'}{N}$, ed il trovare l'intero b prossimo di $\frac{N}{M'}$ è far passare il divisore N per dividendo, ed il residuo M' per divisore, e trovare il quoto della divisione, e così innanzi; d'onde si vede, che la frazione continua sarà terminata, quando saranno terminate le divisioni nel metodo del massimo divisore, il che si è veduto dover sempre avvenire. Se la frazione proposta sarà vera frazione, l'operazione si comincerà dal rovesciarla, ed applicare alla frazione proveniente il metodo del massimo divisore, ed in questo caso la frazione continua non avrà intero, ma comincerà dall'unità divisa pel

primo quoto del detto metodo più una frazione, che sarà parimenti l'unità divisa pel secondo quoto più una frazione simile all' antecedente, e così di seguito.

82. Sia la frazione $\frac{123}{87}$ da ridursi a frazione continua.

Trovati i quoti usando del metodo del massimo divisore fra 123, ed 87 questi saranno 1, 2, 2, 2, 2; dunque avremo

$$\frac{123}{87} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}$$

Adoperando il detto metodo del massimo divisore nella vera frazione $\frac{65}{149}$ si troveranno i quoti 2, 3, 2, 2, 1, 2; dunque

$$\frac{65}{149} = \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}}}$$

Dimostriamo ora le principali proprietà delle frazioni continue.

83. PRIMA PROPRIETÀ'. *Le frazioni comuni dedotte dalla frazione continua sono ridotte alla più semplice espressione.*

Abbiamo avuto (§. 79.)

$A = a$	$A' = 1$
$B = Ab + 1$	$B' = b$
$C = Bc + A$	$C' = B'c + A'$
$D = Cd + B$	$D' = C'd + B'$
ec.	ec.

essendo le successive frazioni ridotte

$$\frac{A}{A'}, \frac{B}{B'}, \frac{C}{C'}, \frac{D}{D'} \text{ ec.}$$

Se sottraggiamo da ogni frazione l'antecedente, avendole prima ridotte allo stesso denominatore, riteniamo solo le differenze dei numeratori, ed in queste sostituiamo i valori dei fattori ricavati dalle eguaglianze antecedenti, avremo

$$BA' - B'A = 1$$

$$CB' - C'B = B'A - BA' = -1$$

$$DC' - D'C = BC' - B'C = 1$$

$$ED' - E'D = -1.$$

Ora i due termini di ciascuna frazione dedotta non si può dividere per alcuna quantità; per es. C , C' non possono dividersi per un fattore comune, perchè questo fattore dovrebbe dividere l'uguaglianza $CB' - C'B = -1$, cosa impossibile a causa dell'unità del secondo membro.

84. SECONDA PROPRIETÀ'. *Le differenze fra le frazioni consecutive dedotte vanno sempre diminuendo; e la differenza fra due frazioni consecutive è così piccola, che tra esse non può cadere un'altra frazione con denominatore minore delli denominatori delle due, e quindi di termini minori, e perciò più semplice.*

Osservando l'uguaglianza (§. 83.) si vede, che A, B, C ec. vanno crescendo, e lo stesso accade ai denominatori A', B', C' . Se ora, come innanzi, da ogni frazione si toglie l'antecedente ridotta allo stesso denominatore, si troverà per i risultamenti della differenza dei numeratori $1, -1, +1, -1$ ec. come abbiamo dalle uguaglianze ultime (§. 83.); dunque

$$\frac{B}{B'} - \frac{A}{A'} = \frac{1}{A'B'}, \frac{C}{C'} - \frac{B}{B'} = -\frac{1}{B'C'}, \frac{D}{D'} - \frac{C}{C'} = \frac{1}{C'D'} \text{ ec.}$$

nelle quali i denominatori $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$ ec. andando crescendo, le differenze fra le frazioni decresceranno continuamente.

Sia poi, se è possibile, la frazione $\frac{m}{n}$ compresa, per es. fra $\frac{C}{C'}$, e $\frac{D}{D'}$, ed il denominatore n sia minore di C' , e di D' . La differenza fra $\frac{C}{C'}$ e $\frac{m}{n}$ ossia $\frac{Cm - C'n}{nC'}$ dovrà essere minore della differenza fra $\frac{C}{C'}$, e $\frac{D}{D'}$ cioè minore di $\frac{1}{C'D'}$, ed a più forte ragione dovrà essere minore di $\frac{1}{nC'}$, se si supponga n più piccolo di D' ; ma ciò non può essere, perchè la differenza $C'm - C'n$ non può essere zero altrimenti $\frac{m}{n} = \frac{C}{C'}$ contro l'ipotesi; essendo dunque questa differenza sussistente, ed intera, almeno sarà 1, e perciò la frazione $\frac{Cm - C'n}{nC'}$ non potrà essere minore di $\frac{1}{nC'}$. Similmente la differenza fra $\frac{D}{D'}$ ed $\frac{m}{n}$, cioè $\frac{Dn - D'm}{nD'}$ dovrà essere minore della differenza fra $\frac{C}{C'}$, e $\frac{D}{D'}$ o di $\frac{1}{C'D'}$, ed a più forte ragione dovrà essere minore di $\frac{1}{nD'}$, se n è minore di C' : ma col discorso antecedente si prova, che $\frac{Dn - D'm}{nD'}$ non può essere minore di $\frac{1}{nD'}$, perchè $Dn - D'm$ almeno sarà uno: dunque è vera la proprietà enunciata, che una frazione $\frac{m}{n}$ non può es-

sere compresa fra due frazioni dedotte consecutive, quando si supponga il suo denominatore n minore dei denominatori di queste.

85. TERZA PROPRIETÀ'. *Le successive frazioni dedotte sono alternativamente minori, e maggiori della frazione continua, ed indefinitamente gli si vanno accostando.*

Sia X il valore della frazione continua, ed a sia l'intero a lei prossimamente inferiore, cosicchè $X - a$ sia una frazione; allora $\frac{1}{X - a} = X'$ sarà una frazione mista, quindi esprimendo per b l'intero prossimamente inferiore ad X' , $X' - b$ sarà ancora una frazione, ed $\frac{1}{X' - b} = X''$ sarà una frazione mista, di cui diremo c l'intero prossimamente inferiore, e così di seguito. Ora dall'uguaglianza

$$\frac{1}{X - a} = X' \text{ ricaveremo } X - a = \frac{1}{X'}, \text{ ed } X = a + \frac{1}{X'}.$$

$$\text{Similmente da } \frac{1}{X' - b} = X'' \text{ ricavandosi } X' = b + \frac{1}{X''}$$

sostituendo questo valore in quello di X , sarà

$$X = a + \frac{1}{b + \frac{1}{X''}}.$$

ove ponendo invece di X'' il suo valore $c + \frac{1}{X'''}$ ricavato da $\frac{1}{X'' - c} = X'''$, sarà $X = 1 + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{X'''}}}$

ec. ec.

Da questa avremo le frazioni dedotte

$$X = \frac{aX' + 1}{X'}$$

$$X = \frac{(ab + 1)X'' + a}{bX'' + 1}$$

$$X = \frac{[(ab + 1)c + a]X''' + ab + 1}{(bc + 1)X''' + b}$$

ec. ec.

nelle quali ponendo A, A', B, B' ec. invece de' loro valori, sarà

$$X = \frac{AX' + 1}{A'X'}$$

$$X = \frac{BX'' + A}{B'X'' + A'}$$

$$X = \frac{CX''' + B}{C'X''' + B'}$$

ec. ec.

e da queste

$$X = \frac{A}{A'} + \frac{1}{A'X'}$$

$$X = \frac{B}{B'} - \frac{1}{B'(B'X'' + A')}$$

$$X = \frac{C}{C'} + \frac{1}{C'(C'X''' + B')}$$

ec. ec.

Da queste si ricava, che le successive frazioni dedotte $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$, $\frac{C}{C'}$, $\frac{D}{D'}$ sono alternativamente minori, e maggiori della frazione continua X , perchè nella prima uguaglianza si deve aggiungere $\frac{1}{A'X'}$ ad $\frac{A}{A'}$, onde avere X , e nella seconda si deve togliere $\frac{1}{B'(B'X'' + A')}$ da $\frac{B}{B'}$ per avere X , e così di seguito. Ora è facile il vedere, che queste differenze fra le frazioni dedotte, e la continua vanno indefinitamente decrescendo.

Infatti essendo $X' > b$, $X'' > c$, $X''' > d$ ec. sarà $X' > B$, $B'X'' + A' > B'C + A' > C'$, $C'X''' + B > C'd + B' > D'$ ec.:

dunque la prima differenza $\frac{1}{A'X'}$ sarà minore di $\frac{1}{A'B'}$, perchè nelli denominatori hanno di comune A' , ma X' nel primo denominatore è maggiore di B' , come si è stabilito.

Allo stesso modo la seconda differenza $\frac{1}{B'(B'X'' + A')}$ è

minore di $\frac{1}{B'C'}$, perchè i denominatori hanno di comune B' , ma nel primo vi è $B'X'' + A' > C'$: dunque le frazioni dedotte successive differiscono dal valore della frazione continua di quantità, che sono rispettivamente minori di $\frac{1}{A'B'}$, $\frac{1}{B'C'}$, $\frac{1}{C'D'}$ ec., ma queste vanno sempre diminuendo, perchè ognuno dei denominatori di queste frazioni avendo un fattore comune all'antecedente denominatore ha l'altro maggiore, dunque pur continuamente diminuiscono le differenze fra le successive frazioni dedotte, e la frazione continua.

Essendo le frazioni $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$, $\frac{C}{C'}$, ec. alternativamente minori, e maggiori della frazione continua, questa sarà

compresa fra due di quelle frazioni. E siccome abbiamo veduto, che fra due frazioni consecutive non può essere contenuta alcuna frazione, che abbia il denominatore minore di ciascuno di quelli delle due frazioni, ne segue, che ognuna delle frazioni $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$, $\frac{C}{C'}$ ec. esprimerà il va-

lore di X più accuratamente di qualunque frazione con denominatore minore, o con termini più piccoli. Da ciò può risolversi il problema seguente: *data una frazione di termini molto grandi, trovare le frazioni espresse in numeri minori, le quali si avvicinino tanto al valore della frazione data, che non sia possibile d'accostarvisi di più senza adoperare frazioni di termini maggiori.*

Si riduca la frazione proposta in frazione continua, e da essa si determinino le frazioni dedotte $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$, $\frac{C}{C'}$ ec. l'ultima delle quali sarà la frazione proposta, e sarà sciolto il problema, perchè ciascuna di queste frazioni esprimerà più accuratamente il valore della proposta di qualunque altra frazione formata di termini più semplici.

86. QUARTA PROPRIETÀ'. *L'errore che si commette nell'assumere una frazione qualunque dedotta invece della proposta o della frazione continua è sempre minore di una frazione, che abbia per numeratore l'unità e per denominatore il prodotto dei denominatori dell'attuale frazione, e della frazione seguente: è minore di una frazione, che abbia per numeratore l'unità, e per denominatore il prodotto del denominatore attuale nella somma dei denominatori attuale, e della frazione antecedente; e, con meno prossimità, è minore di una frazione, che abbia per numeratore l'unità, e per denominatore il quadrato del denominatore della frazione attuale.*

Infatti si è veduto (§. 84.), che la differenza fra due frazioni consecutive dedotte è una frazione, che ha per numeratore l'unità, e per denominatore il prodotto dei denominatori delle due dette frazioni. Per esempio abbiamo

trovato, che la differenza fra $\frac{C}{C'}$, e $\frac{B}{B'}$ è $\frac{1}{B'C'}$, perchè

$$\frac{C}{C'} - \frac{B}{B'} = -\frac{1}{B'C'} : \text{ma si è veduto (§. 85.)}, \text{ che la pro-}$$

posta frazione, o la frazione continua è compresa fra due frazioni dedotte consecutive, perchè di una di queste è maggiore, e dell'altra è minore : dunque la differenza fra la proposta, e qualunque frazione dedotta è minore della frazione, che ha per numeratore l'unità, e per denominatore il prodotto dei denominatori l'uno dell'attuale frazione dedotta, e l'altro della seguente. Inoltre abbiamo veduto (§. 85.), che le differenze fra le frazioni dedotte, e la

proposta sono successivamente $\frac{1}{B'(B'X''+A')}$, $\frac{1}{C'(C'X''' + B')}$

ec. Ora X'' , X''' ec. sono (§. 85.) frazioni miste, dunque sono maggiori di 1 : dunque le dette differenze sono mi-

nor di $\frac{1}{B'(B' + A')}$, $\frac{1}{C'(C' + B')}$ ec., perchè in queste si sono resi minori i loro denominatori col fare $X''=1$, $X'''=1$:

dunque veramente le differenze per es. fra $\frac{B}{B'}$, e la pro-

posta, fra $\frac{C}{C'}$, e la proposta sono minori di $\frac{1}{B'(B'+A')}$, di

$\frac{1}{C'(C'+B')}$, ossia la differenza fra qualunque frazione dedotta, e la proposta è sempre minore di una frazione, il di cui numeratore è l'unità, ed il denominatore il prodotto del denominatore attuale nella somma di questo denominatore, e del denominatore dell'antecedente frazione.

Se poi nelle frazioni $\frac{1}{B'(B'+A')}$, $\frac{1}{C'(C'+B')}$ si trascurano le quantità A' , B' si avranno frazioni più forti $\frac{1}{B'^2}$, $\frac{1}{C'^2}$, e quindi la detta differenza fra una frazione

qualunque dedotta, e la proposta sarà a più forte ragione minore, comechè con meno vicinanza, di una frazione, il di cui numeratore è l'unità, ed il denominatore è il quadrato del denominatore della frazione attuale.

87. Diamo qualche applicazione. Se il diametro è 1, la circonferenza è 3, 141592. Si riduca questa a frazione continua, e si troveranno i denominatori 7, 15, 1, 25 ec., e da questi si troveranno le frazioni convergenti verso il vero valore $\frac{3}{1}$, $\frac{22}{7}$, $\frac{333}{106}$, $\frac{355}{113}$, $\frac{9208}{2931}$ ec. le quali alternativamente saranno minori, e maggiori della frazione data, ed esprimeranno più da vicino il suo valore di qualunque altra frazione con termini più piccoli.

88. La frazione dedotta $\frac{22}{7}$ è quella fissata da Archimede, il quale ha stabilito, che la circonferenza sta al diametro nel rapporto $\frac{22}{7}$, ossia 22 a 7.

Adriano Mezio nella nostra serie delle frazioni dedotte ha fissato la quarta $\frac{355}{113}$ pel rapporto della circonferenza al diametro.

Nel (§. 85.) abbiamo veduto, che delle frazioni dedotte $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$, $\frac{C}{C'}$ ec. quelle che sono in posto pari sono maggiori della frazione continua, o della proposta frazione, e quelle che sono in posto dispari sono minori: dunque i due detti rapporti di Archimede, e di Mezio della circonferenza al diametro, che nella serie delle frazioni dedotte sono in posto pari, sono ambedue maggiori del rapporto dato in decimali, e che abbiamo sviluppato in frazione continua. Col metodo dato nel (§. 86.) si può apprezzare di quanto questi due rapporti differiscano dal dato. Prendendo per es. il secondo, la sua differenza dal dato preso in tutta la sua estensione, perchè il decimale è indefinito, è minore

di $\frac{1}{113 \times 2931}$, che è minore di 0,00001: ma il dato rapporto 3,14159 differisce dal vero valore di meno di 0,00001, perchè il valore decimale che verrebbe appresso a questo rapporto non può dare 0,00001, dunque la frazione $\frac{355}{113}$ differisce dal rapporto dato quasi di tanto, di quanto questo differisce dal vero rapporto fra la circonferenza, ed il diametro; ed intanto questo rapporto è espresso in termini più piccoli colle frazione $\frac{355}{113}$ che colla 3,141592.

89. Le frazioni continue servono anche a risolvere il problema del calendario. Sapendosi, che l'anno astronomico supera il civile di ore 5, minuti 48, secondi 50, 2, vedere l'intercalazione, o aggiunta in giorni, che ad ogni periodo di anni da determinarsi si deve fare, onde sia corretta l'annua trascuranza delle dette ore 5, minuti 48 ec.

A questo fine si stabilirà la proporzione

$$5^{\circ} 48' 50'', 2 : 1^{\text{a}} = 24^{\circ} : x;$$

che vuol dire: se in un anno abbiamo di aumento dell'anno astronomico sopra il civile di $5^{\circ} 48' 50'', 2$, dopo quanti anni avremo l'aumento d'un giorno? Da questa proporzione si ricaverà

$$x = \frac{24}{5,813944},$$

avendo ridotto a decimali di ore li $48' 50'', 2$.

Riducendo a frazione continua questa frazione, o l'equivalente $\frac{24000000}{5813944}$,

sarà

$$x = 4 + \frac{1}{7 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{3}}}} \text{ ec.}$$

e da questa le frazioni dedotte saranno

$$\frac{4}{1}, \frac{29}{7}, \frac{33}{8}, \frac{161}{39}, \frac{516}{125} \text{ ec.}$$

Queste frazioni ci dicono, che un giorno si deve aggiungere dopo 4 anni : un giorno si deve aggiungere dopo $\frac{29}{7}$ di anno, o al settimo di 29 anni, e che perciò si deb-

bono aggiungere 7 giorni in 29 anni : si deve aggiungere un giorno all'ottavo di 33, e perciò 8 giorni in 33 anni; e l'ultima frazione ci dice, che si debbono intercalare 125 giorni in 516 anni. E ciò è sì prossimo al vero, che in un intervallo sì lungo si produce l'errore piccolissimo di 17". Facendo ora la proporzione $516 : 125 = 400 : x$; cioè se 125 giorni si debbono intercalare in anni 516 : quanti giorni si dovranno intercalare in 400 anni. Si troverà 96,9, o prossimamente 97 giorni. E questa è l'intercalazione adottata nella riforma gregoriana del calendario contenuta nella semplicissima regola. *Dividete i numeri di anni in quaternarii di anni, ed in quaternarii di secoli. Nei quaternarii di anni si fa l'aggiunta di un giorno nel febbrajo del quarto anno : niuna aggiunta si fa al primo, al secondo, ed al terzo anno, e ciò secondo la riforma di Giulio Cesare. Nei quaternarii poi di secoli il primo, il secondo, il terzo secolo non si fanno bisestili come dovrebbero essere, se in essi si ritiene la divisione quaternaria di anni; il quarto secolo poi è bisestile. Ritenendo questa regola si vede, che in 400 anni entrano 100 quaternari di anni, e però vi dovrebbero essere 100 bisestili: ma nei detti 400 anni entrandovi 4 secoli, de'quali il primo, secondo, terzo non debbono essere bisestili, in ultimo non si aggiungono 100 giorni ma 97, come si è trovato.*



CAPO QUINTO

DEI PROBLEMI ESPRESSI DA' SIMBOLI GENERICI,
E SOLUZIONI DELLE EQUAZIONI CON UN
NUMERO QUALUNQUE D'INCOGNITE.



90. Abbiamo veduto (§. 89.) cosa è esprimere in equazione i problemi, nei quali vi è una sola incognita, e come (§. 81.) si risolve l'equazione. Ora nei problemi vi può essere più d'una incognita, e che diano più d'una equazione; e questi problemi, e l'equazioni esprimenti possono essere dati colla indeterminazione delle quantità cognite, e perciò espresse colle lettere. Per applicazione della nostra aritmetica generale ci occuperemo di cotali problemi, ed equazioni.

E cominciando da queste: qualora contengono una sola incognita, si dicono risolte (§. 81.) quando l'incognita è isolata in un membro, e tutte le cognite sono trasportate nell'altro. Si è veduto poi, che si debbono trasportare nell'altro membro colle operazioni contrarie a quelle, che le collegano nel primo membro. Quantunque la dimostrazione di questo metodo sia così generale, che valga anche quando nelle equazioni invece dei numeri vi siano le lettere, perchè queste sono numeri qualunque, pure vogliamo darne un'altra dimostrazione.

91. Si avverta, che nella nostra aritmetica generale ritenendosi, che le quantità incognite siano espresse colle ultime lettere dell'alfabeto x , y ec., le cognite si esprimono colle altre lettere.

92. Sia dopo ciò l'equazione $\frac{ax}{b} + c - d = r$, nella quale si debba isolare la x . A questo fine si fissi l'assioma. *Se a due quantità uguali si aggiunga una stessa quantità verranno risultamenti uguali*: si aggiunga dunque la quantità d

ai due membri della nostra equazione, ed avremo

$$\frac{ax}{b} + c - d + d = r + d,$$

nella quale dal primo membro togliendo $-d + d$ sarà

$$\frac{ax}{b} + c = r + d.$$

Si stabilisca l'altro assioma. *Se da due quantità uguali si tolga una stessa quantità, i residui saranno uguali*: dunque dai due membri dell'equazione antecedente si tolga c , ed avremo

$$\frac{ax}{b} + c - c = r + d - c, \text{ ossia } \frac{ax}{b} = r + d - c.$$

Si fissi anche il terzo assioma. *Se due quantità uguali si moltiplichino per una stessa quantità, i prodotti saranno uguali*: si moltiplichi dunque l'equazione antecedente per b , ed avremo

$$\frac{abx}{b} = (r + d - c)b, \text{ ossia riducendo } ax = (r + d - c)b.$$

Finalmente posto il quarto assioma, che *dividendo due quantità uguali per una terza, i quoti sono uguali*, si divida la nostra equazione per a , ed avremo

$$\frac{ax}{a} = \frac{(r + d - c)b}{a}, \text{ ossia } x = \frac{(r + d - c)b}{a}.$$

Confrontando questa colla data equazione si vedrà, che in questa l'incognita è isolata, e che si è così ottenuta dalla proposta equazione col trasportare le quantità cognite dal primo nel secondo membro colle operazioni contrarie.

93. Siano ora le due equazioni con due incognite

$$ax + by = c, \quad a'x + b'y = c'.$$

Il metodo per trovare i valori delle due incognite è di ridurre le due equazioni ad una sola con una sola incognita, ciò, che si ottiene coll'*eliminare*, come si dice, un'incognita: perchè, avendosi così una equazione con una sola incognita, col metodo antecedente (§. 92.) si potrà trovare il suo valore, il quale si sostituirà in una delle date equazioni, e così avendo questa una sola incognita, si risolverà per trovare il suo valore.

94. Per eliminare un'incognita nelle due date equazioni si farà sì, che essa abbia uno stesso coefficiente in ambedue l'equazioni, e se avrà anche lo stesso segno, sottraendo una equazione dall'altra, questa incognita sparirà; e se abbia diversi segni sparirà colla somma delle due equazioni. L'incognita poi da eliminarsi acquisterà lo stesso coefficiente se ciascuna delle due equazioni si moltiplichi pel coefficiente, che ha la detta incognita nell'altra equazione.

Così volendosi eliminare la x , si moltiplicherà la prima equazione per a' , e la seconda per a , ed avremo

$$aa'x + a'by = a'c, \quad aa'x + ab'y = ac'.$$

Avendo la x lo stesso segno in ambedue l'equazioni si toglia la seconda dalla prima, e sarà

$$a'by - ab'y = a'c - ac'.$$

Se l'equazioni fossero state

$$-ax + by = c, \quad a'x + b'y = c',$$

da esse si sarebbe ottenuto

$$-aa'x + a'by = a'c, \quad aa'x + ab'y = ac',$$

e per togliere la x si sarebbe dovuto fare la somma delle due equazioni, e si sarebbe ottenuto

$$a'by + ab'y = a'c + ac'.$$

Ritornando al primo caso, l'equazione risultante dall'eliminazione si può porre sotto la forma

$$(a'b - ab')y = a'c - ac', \text{ ed } y = \frac{a'c - ac'}{a'b - ab'}.$$

Per trovare il valore di x si sostituisca questo di y in una delle equazioni date per es. in $ax + by = c$ ed avremo

$$ax + b\left(\frac{a'c - ac'}{a'b - ab'}\right) = c, \text{ ed } ax = c - \frac{a'bc - abc'}{a'b - ab'} =$$

$$\frac{a'bc - ab'c - a'bc + abc'}{a'b - ab'} = \frac{abc' - ab'c}{a'b - ab'},$$

$$\text{ed } x = \frac{bc' - b'c}{a'b - ab'}.$$

95. Se si avessero tre equazioni con tre incognite, se ne eliminerebbe una così. Si farebbe acquistare a questa lo stesso coefficiente in tutte e tre l'equazioni, e ciò moltiplicando ciascuna equazione pel prodotto dei coefficienti, che ha la detta incognita nelle altre due equazioni: quindi si toglierebbe dalla prima equazione risultante la seconda, e dalla seconda la terza, e così si avrebbero due equazioni con due incognite, che trattate, come si è detto nel caso antecedente, si ridurrebbero ad una equazione con una incognita, dalla quale si ricaverebbe il suo valore. Sostituito questo in una delle due equazioni ottenute con due incognite, si troverebbe l'altra: finalmente sostituiti i

valori delle due dette incognite in una delle tre date equazioni, si troverebbe quello della terza.

96. Si avvertirà, come nel caso di due equazioni con due incognite, che se l'incognita da eliminarsi ha segni diversi in due equazioni, dopo averla ridotta ad avere lo stesso coefficiente, non si sottrarrà una equazione dall'altra, ma si aggiungeranno le due. Ecco l'esempio

$$ax + by + cz = d$$

$$a'x + b'y + c'z = d'$$

$$a''x + b''y + c''z = d''$$

da questa per la regola data avremo

$$aa'a''x + a'a''by + a'a''cz = a'a''d$$

$$aa'a''x + aa''b'y + aa''c'z = aa''d'$$

$$aa'a''x + aa'b''y + aa''c''z = aa'd'',$$

nelle quali sottraendo la seconda dalla prima, e la terza dalla seconda avremo

$$(a'a''b - aa''b')y + (a'a''c - aa''c')z = a'a''d - aa''d'$$

$$(aa''b' - aa'b'')y + (aa''c' - aa''c'')z = aa''d' - aa''d'' :$$

da queste eliminato y avremo

$$[(a'a''c - aa''c')(aa''b' - aa'b'') - (aa''c' - aa''c'')(a'a''b - aa''b')]z = \\ (a'a''d - aa''d')(aa''b' - aa'b'') - (aa''d' - aa''d'')(a'a''b - aa''b'),$$

dalla quale si ricava il valore di z .

97. Dopo ciò si conosce il metodo per trovare i valori di quattro incognite in quattro equazioni. Se ne elimina una, e ciò col fargli acquistare lo stesso coefficiente moltiplicando ciascuna equazione pel prodotto dei coefficienti, che la detta incognita ha nelle altre equazioni, e poi togliendo dalla prima la seconda, dalla seconda la terza, e dalla terza la quarta. Si avranno così tre equazioni con tre incognite, che si tratteranno come nel caso antecedente (§. 96.), o come le quattro equazioni con quattro incognite, e si otterranno due equazioni con due incognite, e poi una equazione con una incognita, che ci farà conoscere il suo valore. Questo poi si sostituirà in una delle due equazioni con due incognite, e si troverà l'altra. I valori di queste due si sostituiranno in una delle tre equazioni con tre incognite, e si troverà la terza; finalmente i valori di queste tre si sostituiranno in una delle quattro date equazioni, e si troverà la quarta. Lo stesso metodo deve tenersi per un numero qualunque d'incognite in altrettante equazioni.

98. Potrebbe darsi il caso, che avendosi più equazioni con altrettante incognite niuna si trovasse in tutte, ciò, che richiede il metodo dato basato sulla eliminazione di una incognita da tutte le date equazioni. Ma si porrà l'incognita nelle equazioni ove manca con coefficienti, che nelli risultamenti del metodo dato si supporranno nulli. Se per esempio si avessero l'equazioni

$$\begin{aligned} ax + cz &= d \\ a'x + b'y &= d' \\ b''y + c''z &= d''. \end{aligned}$$

In queste si vede, che niuna incognita si trova in tutte l'equazioni: ma volendo eliminare la x si scriva nella terza $a''x$, e si avranno l'equazioni

$$\begin{aligned} ax + cz &= d \\ a'x + b'y &= d' \\ a''x + b''y + c''z &= d'' \end{aligned}$$

dalle quali si avranno le tre

$$aa'a''x + a'a''cz = a'a''d$$

$$aa'a''x + aa''b'y = aa''d'$$

$$aa'a''x + aa'b''y + aa'c''z = aa'd''.$$

Da queste poi, per le regole date, si avranno, sottraendo dalla prima la seconda, e dalla seconda la terza equazione,

$$a'a''cz - aa''b'y = a'a''d - aa''d'$$

$$- aa'c''z + (aa''b' - aa'b'')y = aa''d - aa'd''$$

dividendo la prima equazione per a'' , e facendo nella seconda $a'' = 0$ avremo

$$a'cx - ab'y = a'd - ad'$$

$$- aa'c''z - aa'b''y = - ad'd'',$$

e dividendo la seconda per $-aa'$ avremo le due

$$a'cx - ab'y = a'd - ad'$$

$$c''z + b''y = d''.$$

le quali due equazioni col metodo dato si riducono ad una equazione con una incognita, dalla quale si troverà il valore di questa incognita, e quindi delle altre.

99. Da tutto ciò si ricava, che qualunque sia il numero delle incognite, e comunque siano poste nell'equazioni, purchè queste siano tante quante sono le incognite stesse, sempre col metodo dell'eliminazione si potranno ridurre ad una equazione con una sola incognita, della quale si troverà il suo valore. Questo si sostituirà in una delle due

equazioni con due incognite, e si troverà l'altra. Questi due valori di due incognite si sostituiranno in una delle tre equazioni con tre incognite, e si troverà il valore della terza, e così di seguito finchè si giungerà ad una delle equazioni proposte, dove, sostituendo i valori trovati di tutte le incognite meno una, si troverà il valore di questa.

100. Se poi avvenisse, che si avessero più incognite che equazioni, colle eliminazioni successive delle diverse incognite si giungerebbe ad una equazione con più d'una incognita senza poter procedere a togliere altra incognita. Per esempio se si avessero quattro incognite con tre equazioni, se ne diminuirebbe una, e si avrebbero tre incognite con due equazioni. Eliminando tra queste un' altra incognita si avrebbe una equazione con due incognite, e qui ci dovremmo arrestare, perchè non si avrebbe altra equazione per eliminare una delle due incognite.

Ora quando si ha una equazione con più d'una incognita, a questa equazione si può soddisfare con indefiniti valori delle incognite, perchè dati a piacere dei valori a tutte l'incognite meno una, risolvendo l'equazione per questa, si troverebbe il valore da soddisfare all'equazione. Se per es. fosse

$$2x - 3y + 5z = 1,$$

e se si ponesse $y = 3 \quad z = 4$

si avrebbe $2x - 9 + 20 = 1, 2x = -10, x = -5,$

ed i valori $x = -5, y = 3, z = 4$ colli arbitrarii di y e di z soddisfano all'equazione data.

Il problema, che dà più incognite, che equazioni, si dice *problema indeterminato*, perchè le sue incognite possono avere indefiniti valori.

101. Se avvenisse, che si avessero più equazioni che incognite, allora, separate tante equazioni quante sono le incognite, si risolverebbero col metodo dato, e si avrebbero i valori di tutte le incognite. Ciò ottenuto se questi valori

soddisfano alle altre equazioni, che si sono lasciate, il problema si dirà ridondante di condizioni, o *problema più che determinato*. Se poi i valori trovati delle incognite non soddisfano ad alcuna, o a tutte l'equazioni tralasciate, si dirà, che *il problema è assurdo*, perchè involve condizioni fra loro opposte.

102. *Affinchè dunque un problema sia determinato, cioè dia per l'incognite valori fissi, e soddisfacenti al problema, è necessario, che dia tante equazioni, quante sono le incognite, e che perciò dia tante condizioni, quante sono le incognite stesse.*

103. Oltre il metodo di eliminazione per ridurre l'equazioni date ad una sola con una sola incognita vi sono altri due metodi, l'uno detto *metodo di sostituzione*, e l'altro *metodo di uguaglianza*.

Il primo consiste nel ricavare da una delle date equazioni il valore d'una incognita dato per mezzo delle altre, e sostituirlo invece della detta incognita nelle altre equazioni; così si ha una equazione di meno ed una incognita di meno. Si risolve una di queste per una incognita, ed il valore ricavato si sostituisce nelle altre equazioni, si toglie così un'altra equazione, ed un'altra incognita, ed andando così innanzi si giungerà ad una sola equazione con una sola incognita, della quale trovato il valore si sostituirà nell'equazione con due incognite, e si troverà l'altra. I valori di queste due si sostituiranno nella equazione con tre incognite, e si troverà la terza, e così di seguito.

104. Il metodo dell'uguaglianza è questo. Si trova il valore di una stessa incognita in tutte le date equazioni, od uguagliando il primo valore al secondo, il secondo al terzo, il terzo al quarto ec. è chiaro, che si avrà una equazione di meno, ed una incognita di meno. Dalle equazioni risultanti si troverà il valore di una stessa incognita, ed uguagliandoli fra loro, come nel caso antecedente, si avrà una equazione di meno, ed una incognita di meno, e così innanzi fino ad aversi una equazione con una in-

cognita. Questi due metodi di sostituzione, e di uguaglianza suppongono, che tutte le incognite si trovino in tutte l'equazioni.

105. Ciò non ostante il metodo di sostituzione può servire quando anche niuna delle incognite si trovi in tutte l'equazioni, purchè si scelgano acconcie sostituzioni, onde poter giungere ad avere equazioni con altrettante incognite, e che tutte si trovino in tutte l'equazioni.

Per dare un esempio siano l'equazioni

$$2x + 3y = 1, \quad 3y - x = 4, \quad 5x + 2z = 2, \quad -x + 2z = -1$$

Se dalla prima si ricava il valore di x in y , e si sostituisce nella quarta avremo un'equazione fra y e z come la seconda, onde per mezzo di queste due si troveranno i valori di queste due incognite, colli quali facilmente si troveranno i valori delle altre.

Dalla prima dunque si ha

$$x = \frac{1 - 3y}{2} :$$

quindi la quarta diventa

$$\frac{3y - 1}{2} + 2z = -1, \quad \text{o} \quad 3y + 4z = -1.$$

Ricavando da queste, e dall'equazione seconda superiore l'espressioni del valore di y , sarà

$$y = -\frac{1+4z}{3}, \quad y = \frac{4+z}{3},$$

e quindi

$$\frac{4+z}{3} = -\frac{1+4z}{3},$$

$$4 + z = -1 - 4z, \quad 5z = -5,$$

$$z = -1, \quad y = \frac{4+z}{3} = \frac{4-1}{3} = 1,$$

Con questi si troveranno subito i valori delle altre incognite.

106. Il metodo dato per risolvere un numero qualunque d'equazioni con ugual numero d'incognite qualche volta può essere semplificato a causa di opportuna forma delle equazioni. Ne daremo un esempio, che qualche volta potrà essere posto in uso, come si farà in seguito in qualche problema.

Siano l'equazioni

$$ax + b(y + z + u + \text{ec.}) = c$$

$$a'y + b'(x + z + u + \text{ec.}) = c'$$

$$a''z + b''(x + y + u + \text{ec.}) = c''$$

$$a'''u + b'''(x + y + z + \text{ec.}) = c'''$$

Si ponga $x + y + z + u + \text{ec.} = m$, le nostre equazioni diventeranno

$$ax + b(m - x) = c$$

$$a'y + b'(m - y) = c'$$

$$a''z + b''(m - z) = c''$$

$$a'''u + b'''(m - u) = c'''$$

dalle quali ricavando i valori delle incognite x, y ec. avremo

$$x = \frac{c - bm}{a - b}, \quad y = \frac{c' - b'm}{a' - b'}$$

$$z = \frac{c'' - b''m}{a'' - b''}, \quad u = \frac{c''' - b'''m}{a''' - b'''} \text{ ec. ,}$$

e si vede, che le incognite saranno trovate quando si conoscerà la m . Ora questa si avrà, se l'espressioni trovate

delle incognite si sostituiscano in una delle date equazioni per es. nella prima, perchè avremo

$$\frac{a(c - bm)}{a - b} + b \left(\frac{c' - b'm}{a' - b'} + \frac{c'' - b''m}{a'' - b''} + \frac{c''' - b'''m}{a''' - b'''} + \text{ec.} \right) = c$$

che risolta per m ci darà il suo valore.

107. Si riprendano le soluzioni (§. 94.)

$$x = \frac{bc' - b'c}{a'b - ab'}, \quad y = \frac{a'c - ac'}{a'b - ab'}$$

delle due equazioni $ax + by = c$, $a'x + b'y = c'$, ed in esse si supponga zero il denominatore comune $a'b - ab'$ senza ch  sia zero alcuno dei numeratori: avremo $a'b - ab' = 0$, e quindi $a' = \frac{ab'}{b}$. Si sostituisca questo valore di a' nella seconda delle due date equazioni, ed avremo

$$\frac{ab'x}{b} + b'y = c', \quad ab'x + b'by = c'b, \quad ax + by = \frac{c'b}{b'},$$

ora abbiamo la prima equazione $ax + by = c$, dunque

$$\frac{c'b}{b'} = c, \quad c'b = b'c, \quad bc' - b'c = 0:$$

ma ci  non pu  essere, perch  per ipotesi nullo dei due numeratori delle incognite   zero: dunque se $a'b - ab'$   solamente zero nei valori delle incognite, o se queste si presentano sotto la forma

$$x = \frac{bc' - b'c}{0}, \quad y = \frac{a'c - ac'}{0}$$

il problema non pu  essere soddisfatto, ossia il problema

presenta condizioni contraddittorie: dunque la soluzione espressa da una quantità divisa per zero è simbolo d'assurdità. Se poi è zero anche il numeratore $bc' - b'c$, allora si verifica la condizione $\frac{c'b}{b'} = c$, e le due equazioni diventano una sola $ax + by = c$, alla quale soddisfano infiniti valori di x , e di y (§. 100.), ossia l'equazione è indeterminata: dunque una soluzione, o valore dell'incognita, che si presenta sotto la forma di $\frac{0}{0}$ è simbolo d'indeterminazione.

È da notarsi, che anche il valore di y si presenta sotto la forma di $\frac{0}{0}$. Infatti se $a'b - ab' = 0$, $bc' - b'c = 0$ preso da questa il valore di $b = \frac{b'c}{c'}$ e sostituito nell' antecedente, sarà $\frac{a'b'c}{c'} - ab' = 0$, $\frac{a'c}{c'} - a = 0$, $a'c - ac' = 0$, che è il numeratore di y .

108. Non sempre però che una quantità diventa zero diviso per zero per valori, che si diano alle lettere, o per una ipotesi particolare sulle lettere, la quantità è intrinsecamente tale, e perciò rappresenta l'indeterminazione dell'incognita, quando esprima il suo valore; perchè può avvenire ciò da che la frazione abbia in quella ipotesi un fattore comune al numeratore, ed al denominatore, che si annulli. Sia per esempio l'equazione $a^3 + b^2x = b^3 + a^2x$: risolta ci dà $x = \frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2}$. Ora se in questa si diano ad a , e b valori uguali, o se si faccia $a = b$ avremo $x = \frac{0}{0}$; intanto i due suoi termini $a^3 - b^3$, $a^2 - b^2$ hanno un fattore comune $a - b$, il quale si trova cercando fra $a^3 - b^3$, ed $a^2 - b^2$ il comun divisore; quindi il nostro risultamento si potrà esprimere con

$$x = \frac{(a^2 + ab + b^2)(a - b)}{(a + b)(a - b)},$$

e più semplicemente con

$$x = \frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}$$

dove fatto $a = b$ sarà

$$x = \frac{3a}{2}.$$

109. Perciò prima di fissare che una quantità sia intrinsecamente $\frac{0}{0}$ per valori particolari delle lettere, si dovrà cercare il massimo comune divisore fra i due termini della frazione, e se non ne abbia, o ne abbia uno, che per la data ipotesi non si annulli, si conchiuderà, che il dato valore è intrinsecamente zero diviso per zero: e se esso sia il valore dell' incognita, si dovrà conchiudere, che questa è indeterminata. Se poi i due termini della frazione abbiano un fattore comune, che nella data ipotesi vada a zero, questo si toglierà, ed il vero valore sarà quello, che sorgerà dall'introdurre la detta ipotesi nella frazione risultante.

110. Ciò si conferma anche nei casi concreti dei problemi. Si supponga, che da due luoghi distanti di d allo stesso istante partano due corrieri diretti verso lo stesso luogo fuori della detta distanza. Supponiamo, che quello che è indietro faccia miglia m in un ora, e l'altro miglia m' : si domanda ove il primo raggiungerà il secondo.

Sia x la distanza fra il punto di partenza del secondo, ed il punto d'incontro; il viaggio del primo per l'incontro sarà $d + x$. Ora questi percorrendo miglia m in un ora, tante volte la m entrerà nel viaggio $d + x$, e tante ore impiegherà: dunque $\frac{d+x}{m}$ è il tempo, che impiega il corriere indietro per arrivare al punto d'incontro; ed $\frac{x}{m'}$ sarà il tempo dell' altro. Ora questi due tempi debbono

essere uguali, perchè per ipotesi partono allo stesso istante, ed allo stesso istante s'incontreranno: dunque $\frac{d+x}{m} = \frac{x}{m'}$,

di qui $m'd + m'x = mx$, $mx - m'x = m'd$,

$$x(m - m') = m'd, \quad x = \frac{m'd}{m - m'}.$$

Secondo l'ipotesi del problema, deve essere $m > m'$, perchè quello indietro nello stesso tempo deve percorrere più miglia m delle miglia m' del secondo, onde raggiungerlo.

Se fosse $m = m'$ si troverebbe $x = \frac{d}{0}$; ma in questo caso quello indietro non potrebbe giammai raggiungere quello innanzi, dunque veramente l'espressione $\frac{d}{0}$, o una quantità divisa per zero è simbolo di absurdità del problema.

Se oltre $m = m'$ fosse $d = 0$ sarebbe $x = \frac{0}{0}$. Nella nostra ipotesi i due corrieri partendo dallo stesso luogo colla stessa celerità sarebbero sempre insieme, ossia x , che dà l'incontro, avrebbe infiniti valori: dunque veramente l'espressione $\frac{0}{0}$ d'una incognita è simbolo d'indeterminazione del problema.

111. Se poi fosse $m < m'$ la quantità $x = \frac{d}{m - m'}$ sarebbe negativa, perchè di denominatore negativo. Nella nostra ipotesi il corriere innanzi, avendo più velocità di quello indietro, bisognerebbe, che per incontrarsi, il primo volgesse indietro il suo cammino verso il corriere indietro, e quindi la x prendesse un senso opposto al primo: dunque il segno negativo del valore dell'incognita indica, che si deve prendere in senso contrario: cosicchè, se per es. esprimesse crediti nel problema, dovrebbe esprimere debiti; se una

posizione, esprimerebbe una posizione contraria, e così si rettificherebbe il problema.

Sia anche il problema. *Un padre ha di età anni a , ed il suo figlio anni b , si domanda dopo quanti anni il figlio avrà l' m^{ma} parte dell'età del padre.*

Se x esprima il numero degli anni domandati, dopo questi il padre avrà anni $a+x$, ed il figlio anni $b+x$: dunque per la condizione del problema $b+x = \frac{a+x}{m}$,

di qui $mb + mx = a + x$, ed $x = \frac{a - mb}{m - 1}$.

Si supponga ora $m = 4$, $a = 45$, $b = 15$, sarà

$$x = \frac{45 - 60}{3} = -5.$$

Questo valore negativo di x ci dice, che non dopo gli anni attuali 45, e 15 del padre, e del figlio l'età di questo sarà il quarto dell'età del padre, ma 5 anni prima. Infatti se si propone il problema. *Avendo attualmente un padre 45 anni, ed il figlio 15, si domanda quando il figlio ha avuto il quarto dell'età del padre*, l'equazione esprime il problema sarà $15 - x = \frac{45 - x}{4}$, la quale risolta ci dà $x = 5$, risultamento positivo, perchè si accorda col senso del problema.

Dopo ciò diamo per esercizio dei problemi espressi con simboli generali.

Un padre, che ha tre figliuoli ordina nel suo testamento, che la sua eredità sia divisa così. Il primo deve avere una somma a più l' n^{ma} parte di ciò, che resta: il secondo una somma $2a$ più l' n^{ma} parte di ciò, che resta: finalmente il terzo deve avere una somma $3a$ più l' n^{ma} parte di ciò, che resta tolte le altre due parti, ed il $3a$. Così l'eredità è interamente divisa, e nulla rimane. Determinare l'eredità, e ciò, che tocca a ciascuno.

112. Sia x l'eredità. Al primo toccherà

$$a + \frac{x-a}{n}, \text{ o } \frac{an+x-a}{n}.$$

Per formare la parte del secondo da x si tolga $2a$, ed $\frac{an+x-a}{n}$, avremo $\frac{nx-3an-x+a}{n}$: dunque la porzione del secondo sarà

$$2a + \frac{nx-3an-x+a}{n^2}, \text{ o } \frac{2an^2+nx-3an-x+a}{n^2}.$$

Togliendo ora le due parti, e $3a$ da x , avremo

$$\frac{n^2x-6an^2-2nx+4an+x-a}{n^2}$$

e la porzione del terzo sarà

$$\frac{3an^2+n^2x-6an^2-2nx+4an+x-a}{n^3}.$$

Ora colle distribuzioni delle tre parti l'eredità si trova consumata: dunque togliendo da x le tre parti il residuo sarà zero. Facendo questa sottrazione troveremo

$$n^3x-6an^3-3n^2x+10an^2+3nx-5an-x+a=0, \text{ d'onde}$$

$$x = \frac{a(6n^3-10n^2+5n-1)}{n^3-3n^2+3n-1}.$$

Questo risultamento si poteva trovare con più speditezza facendo questa riflessione. Si dice, che quando pel terzo figlio si prende il $3a$, e l' n^{ma} parte di ciò, che rimane, nulla vi rimane; è dunque necessario, che questo, che vi rimane, sia zero, altrimenti vi rimarrebbe questo resto meno la sua n^{ma} parte, o la sua n^{ma} parte ripetuta $n-1$ volte. Ma l'ultimo residuo è stato

$$\frac{n^2x-6an^2-2nx+4an+x-a}{n^2},$$

dunque si porrà questo uguale a zero, e si troverà

$$x = \frac{a(6n^2 - 4n + 1)}{n^2 - 2n + 1}.$$

Si vedrà, che questo valore s'accorda coll'antecedente cercando in questo il massimo divisore nelle due quantità $6n^2 - 10n + 5$ e $n^2 - 3n + 3$, e dividendo per questo divisore queste stesse quantità. Per esercizio risolviamo in un'altra maniera il dato problema.

Si esprimano per r , r' , r'' i tre residui dei quali parla il problema; è evidente, che le parti dei tre figli saranno

$$a + \frac{r}{n}, \quad 2a + \frac{r'}{n}, \quad 3a + \frac{r''}{n}.$$

Ora per la ragione addotta r'' deve essere zero altrimenti vi rimarrebbe

$$r'' - \frac{r''}{n} = \frac{nr'' - r''}{n} = (n-1) \frac{r''}{n}.$$

Per questa ragione toccando al secondo $2a$, e l' n^{ma} parte del resto r' vi rimarrà per la porzione del terzo

$$r' - \frac{r'}{n} = (n-1) \frac{r'}{n} :$$

ma il terzo deve avere $3a$, e con ciò si deve prendere tutto ciò che è rimasto: dunque

$$\frac{(n-1)r'}{n} = 3a, \quad r' = \frac{3an}{n-1} :$$

dunque la porzione $2a + \frac{r'}{n}$ del secondo sarà

$$2a + \frac{3an}{n-1} : n, \quad \text{o} \quad 2a + \frac{3a}{n-1} = \frac{2an + a}{n-1}.$$

Similmente toccando al primo a più l' n^{ma} parte del resto r rimarrà

$$r - \frac{r}{n}, \text{ o } \frac{(n-1)}{n} r$$

Questo resto dovendo dare le parti degli altri due avremo

$$\frac{(n-1)}{n} r = 3a + \frac{2an + a}{n-1} = \frac{5an - 2a}{n-1},$$

dunque
$$r = \frac{5an^2 - 2an}{(n-1)^2} :$$

dunque la porzione del primo

$$a + \frac{r}{n} = a + \frac{5an - 2a}{(n-1)^2} = \frac{an^2 + 3an - a}{n^2 - 2n + 1} :$$

dunque la somma delle tre parti, o il capitale lasciato sarà

$$3a + \frac{2an + a}{n-1} + \frac{an^2 + 3an - a}{n^2 - 2n + 1},$$

o finalmente

$$\frac{a(6n^2 - 4n + 1)}{(n-1)^2}.$$

Un tale morendo vuol ripartire il suo capitale fra i suoi figli così. Il primo deve avere una somma a , e l' n^{ma} parte di ciò, che resta. Il secondo $2a$ più l' n^{ma} parte di ciò, che resta togliendo dall'eredità la prima parte e $2a$. Il terzo deve avere $3a$, e l' n^{ma} parte di ciò, che resta tolte dall'eredità le due parti, e $3a$. Con questo tutte le parti riescono uguali. Si vuol sapere la porzione di ciascuno, l'eredità lasciata, ed il numero de' figli.

113. Sia x l'eredità, sarà $x-a$ il residuo dell'eredità

toltegli a : dunque la porzione del primo sarà

$$a + \frac{x-a}{n} \text{ o } \frac{an+x-a}{n} (a).$$

Togliendo da x questa porzione e $2a$ avremo il residuo $\frac{nx - 3an - x - a}{n}$: dunque toccherà al secondo

$$2a + \frac{nx - 3an - x - a}{n^2} \text{ o } (b) \frac{2an^2 + nx - 3an - x - a}{n^2}.$$

Ora queste due porzioni debbono essere uguali, perchè dice il problema, che sono uguali le porzioni di tutti, dunque formando l'equazione con (a) , e (b) , e risolvendola si troverà $x = an^2 - 2an + a$. Questa sarà l'eredità. Se questo valore si sostituisca nella porzione del primo (a) si troverà, che il suo valore è $a(n-1)$, e lo stesso risultamento si troverà facendo la detta sostituzione di x nell'espressione della porzione del secondo. Finalmente dividendo il capitale $an^2 - 2an + a$ per $a(n-1)$, cioè per una delle porzioni uguali delli figli, avremo, che $n-1$ esprimerà il numero di queste porzioni, o dei figli.

Per esercizio si farà vedere, che la porzione del terzo, e del quarto sono uguali a quella del primo, e del secondo.

Sia anche il problema. *Una eredità b si deve dividere in tre parti tali, che la prima superi la seconda di a , e la seconda superi la terza di a' .*

114. Sia x la prima parte; sarà $x-a$, la seconda, e la terza sarà $x-a-a'$: ora queste tre parti debbono dare b : dunque $3x - 2a - a' = b$, ed $x = \frac{b+2a+a'}{3}$.

Se b si dovesse dividere in quattro parti tali, che la prima superasse la seconda di a , la seconda superasse la terza di a' , e la terza superasse la quarta di a' si troverebbe

$$x = \frac{b + 3a + 2a' + a''}{4}.$$

Se si volesse spezzare la b in 5 parti colle differenze $a, a', a'' a'''$ fra la prima e la seconda, fra la seconda e la terza ec. si troverebbe

$$x = \frac{b + 4a + 3a' + 2a'' + a'''}{5}.$$

Per lo spezzamento di b in sei parti si troverebbe

$$x = \frac{b + 5a + 4a' + 3a'' + 2a''' + a^{iv}}{6}.$$

Osservando questi diversi casi si può dedurre, che se b si volesse spezzare in m parti colle differenze a, a', a'' ec. si avrebbe generalmente

$$x = \frac{b + (m-1)a + (m-2)a' + (m-3)a'' \dots (m-n)a^{(n-1)} \dots + 2a^{(m-3)} + a^{(m-2)}}{m}.$$

In queste espressioni, come in altre analoghe, gli esponenti chiusi fra parentesi indicano i numeri degli accenti.

115. *Se da una quantità si sottrae la sua metà cresciuta di a si avrà b . Qual'è questa quantità?*

Sarà
$$x - \frac{x}{2} - a = b, \text{ ed } x = 2b + 2a.$$

Se dopo l'operazione antecedente si toglie la metà del risultamento più a' per avere b , avremo, che dal risultamento $\frac{x - 2a}{2}$ si deve togliere $\frac{x - 2a}{4}$ ed a' per aver b ; sarà dunque

$$\frac{x - 2a - 4a'}{4} = b,$$

e quindi
$$x = 4b + 2a + 4a'.$$

Se si voglia proseguire l'operazione allo stesso modo si troverà

$$\frac{x - 2a - 4a' - 8a''}{8} = b, \text{ ed } x = 8b + 2a + 4a' + 8a''.$$

Se si osservino i risultamenti avuti si vedrà, che essendo m le sottrazioni, che si vogliono fare, sarà

$$x = 2^m b + 2a + 2^2 a' + 2^3 a'' + 2^4 a''' \dots + 2^m a^{(m-1)}.$$

Per essere convinti di ciò basta riflettere, che $4 = 2.2 = 2^2$, $8 = 2.2.2 = 2^3$, $16 = 2.2.2.2 = 2^4$, e così di seguito.

116. Se la sottrazione non fosse della metà di ciò, che è rimasto, ma della sua parte n^{ma} , il problema sarà reso più generale. Ecco il processo dell'operazione.

Si deve togliere $\frac{x}{n}$ ed a da x , avremo $x - \frac{x}{n} - a$, ossia $\frac{(n-1)x - na}{n}$, e questo uguagliato a b ci darà

$$x = \frac{nb + na}{n-1}.$$

Prendendo la parte n^{ma} di questo residuo, e togliendola insieme con a' dal residuo stesso avremo il nuovo residuo

$$\frac{(n-1)^2 x - n(n-1)a - n^2 a'}{n^2},$$

che fatto uguale a b , e risolta l'equazione sarà

$$x = \frac{n^2 b + n(n-1)a + n^2 a'}{(n-1)^2}.$$

Se si continui l'operazione troveremo

$$x = \frac{n^3 b + n(n-1)^2 a + n^2(n-1)a' + n^3 a''}{(n-1)^3}$$

$$x = \frac{n^4 b + n(n-1)^3 a + n^2(n-1)^2 a' + n^3(n-1)a'' + n^4 a'''}{(n-1)^4}$$

Osservando questi risultamenti si stabilirà, che, essendo m il numero delle sottrazioni, potremo porre per x

$$x = \frac{n^m b + n(n-1)^{m-1} a + n^2(n-1)^{m-2} a' + n^3(n-1)^{m-3} a'' + \text{ec.}}{(n-1)^m}.$$

Se $n = 2$ ritroveremo

$$x = 2^m b + 2a + 2^2 a' + 2^3 a'' \text{ ec.}$$

Se $n = 3$ avremo

$$x = \frac{3^m b + 3 \cdot 2^{m-1} a + 3^2 \cdot 2^{m-2} a' + 3^3 \cdot 2^{m-3} a'' \text{ ec.}}{2^m}.$$

•••••

ESERCIZI PER LA RISOLUZIONE DI EQUAZIONI

E DI PROBLEMI DI PIÙ D'UNA INCOGNITA.

•••••

$$(I) \quad \frac{4x+5y}{40} = x-y, \quad \frac{2x-y}{3} + 2y = \frac{1}{2}; \quad x = \frac{1}{4}, \quad y = \frac{1}{5}.$$

$$(II) \quad \frac{1}{7}(2x-y) + 3x = 2y-6, \quad \frac{1}{5}(y+3) + \frac{1}{6}(y-x) = 2x-8$$

$$x = 6, \quad y = 12.$$

$$(III) \quad \frac{1}{11}(4x+2y) = 6 - \frac{1}{4}(5y-3x), \quad \frac{1}{3}(8y-10) = \frac{1}{6}(5x+3y) + 5$$

$$x = 3, \quad y = 5.$$

$$(IV) \quad (x+5)(y+7) = (x+1)(y-9) + 112, \quad 2x+10 = 3y+1,$$

$$x = 3, \quad y = 5.$$

$$(V) \quad 2a(y-3b) = b(2a-x), \quad ay = bx; \quad x = \frac{8}{3}a, \quad y = \frac{8}{3}b.$$

$$(VI) \quad (a^2 - b^2)(3x + 5y) = (4a - b)2ab, \quad a^2x - \frac{ab^2c}{a+b} + (a+b+c)by =$$

$$b^2x + (a+2b)ab; \quad x = \frac{ab}{a-b}, \quad y = \frac{ab}{a+b}.$$

$$(VII) \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = a, \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = b, \quad \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = c$$

$$x = \frac{2}{a+b-c}, \quad y = \frac{2}{a+c-b}, \quad z = \frac{2}{b+c-a}.$$

$$(VIII) \quad \frac{3}{x} - \frac{4}{5y} + \frac{1}{z} = 7 + \frac{3}{5}, \quad \frac{1}{3x} + \frac{1}{2y} + \frac{2}{z} = 10 + \frac{1}{6},$$

$$\frac{4}{5x} - \frac{1}{2y} + \frac{4}{z} = 16 + \frac{1}{10}, \quad x = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{1}{3}, \quad z = \frac{1}{4}.$$

$$(IX) \quad xy = a(x+y), \quad xz = b(x+z), \quad yz = c(y+z),$$

$$x = \frac{2abc}{ac+bc-ab}, \quad y = \frac{2abc}{ab+bc-ac}, \quad z = \frac{2abc}{ab+ac-bc}.$$

$$(X) \quad u + ax + a^2y + a^3z + a^4 = 0$$

$$u + bx + b^2y + b^3z + b^4 = 0$$

$$u + cx + c^2y + c^3z + c^4 = 0$$

$$u + dx + d^2y + d^3z + d^4 = 0$$

$$u = abcd, \quad x = -(abc + abd + acd + bcd), \quad y = ab + ac + ad + bc + bd + cd$$

$$z = -(a + b + c + d).$$

$$(XI) \quad x'' + x''' + x^{(4)} + \dots + x^{(n)} = a'$$

$$x' + x'' + x''' + \dots + x^{(n)} = a''$$

$$x' + x'' + x''' + \dots + x^{(n)} = a'''$$

⋮

$$x' + x'' + x''' + \dots + x^{(n-1)} = a^{(n)}$$

$$x' = \frac{1}{m-1} (a'' + a''' + a^{(4)} \dots + a^{(m)} - (m-2)a')$$

$$x'' = \frac{1}{m-1} (a' + a'' + a''' \dots + a^{(m)} - (m-2)a'')$$

$$x''' = \frac{1}{m-1} (a' + a'' + a''' \dots + a^{(m)} - (m-2)a''')$$

⋮

$$x^{(m)} = \frac{1}{m-1} (a' + a'' + a''' \dots + a^{(m-1)} - (m-2)a^{(m)}) .$$

Tre persone, che hanno insieme paoli 480, si pongono al giuoco. Nella prima partita la prima perde la metà del suo denaro, che è vinta in uguali porzioni dalla seconda, e dalla terza. Nel secondo giuoco perde la seconda un terzo del denaro che ha, che si ripartisce ugualmente fra la prima, e la terza. Finalmente nel terzo giuoco la terza perde 80 paoli, che sono vinti in uguali porzioni dalla prima, e dalla seconda. Contando alla fine ciascuno il suo denaro, si trovano aver lo stesso. Quanto aveva ciascuno al principio?

RISPOSTA. Il primo aveva paoli 180, il secondo 135, ed il terzo 165.

A, e B possono fare insieme un certo lavoro in 8 giorni. A, e C lo possono fare in 9 giorni; e B e C in 10. Si domanda in quanti giorni ciascuno potrebbe da se solo fare lo stesso lavoro.

RISPOSTA. Il primo in giorni $14\frac{34}{49}$; il secondo in giorni $17\frac{23}{41}$; ed il terzo in giorni $23\frac{7}{31}$.

Un tale mescolò insieme due specie di vino in tal quantità, che la prima fu tripla della seconda, e la mescolanza valeva 56 bajocchi il boccale. Ma se ne avesse mescolato tali

quantità, che la seconda fosse stata $\frac{3}{5}$ della prima avrebbe dovuto vendere la nuova mescolanza 60 bajocchi a boccale. Si domanda il prezzo di ciascun vino.

RISPOSTA. Il prezzo del primo è 48 bajocchi il boccale, e del secondo è 80.

Tre persone avendo giuocato tre partite, successivamente tutte perdettero, e colla perdita di ciascuna si raddoppiava il denaro delle altre due. Ora al termine del giuoco tutte si trovavano con 8 paoli. Si domanda quanto aveva ciascuna al principio delle partite.

RISPOSTA. Quello che perdette nella prima partita aveva 13 paoli, quella che perdette nel secondo aveva paoli 7, e quella della terza aveva paoli 4.

Si hanno masse formate di differenti metalli insieme fuse. La prima in una libbra contiene 7 once d'argento, 3 once di rame, e 6 once di stagno. La seconda massa in una libbra contiene 12 once d'argento, 3 once di rame, ed una di stagno. La terza massa in una libbra contiene 4 once d'argento, 7 di rame, e 5 di stagno. Si domanda quanto si deve prendere delle tre masse, onde fare una quarta del peso d'una libbra, che contenga 8 once d'argento, 3 $\frac{3}{4}$ di rame, 4 $\frac{1}{4}$ di stagno.

RISPOSTA. 8 once della prima, 5 della seconda, e 3 della terza. N. B. Si è supposta la libbra francese di 16 once.

Un tale ha un capitale a frutto. Un'altro ha un capitale maggiore del primo di scudi 10000, e che gli frutta uno di più per cento del primo, di che ha un frutto maggiore di 800 scudi. Un terzo, che ha 15000 scudi più del primo, e che fa fruttare il suo capitale d'un 2 di più per 100 del primo, ne trae un fruttato maggiore di scudi 1500. Si domanda il capitale delle tre persone, e le ragioni dei loro frutti al 100.

RISPOSTA. I capitali sono 30000, 40000, 45000. Le ragioni dei frutti al 100 sono $\frac{4}{100}$, $\frac{5}{100}$, $\frac{6}{100}$.

Un tale ha a frutto un capitale di scudi 30000 : ma deve una somma di scudi 20000, di cui paga i frutti di un'altra ragione al 100. L'interesse poi che egli ritrae sorpassa quello che paga di 800 scudi. Un'altro ha a frutto scudi 35000 alla seconda ragione del 100: ma deve 24000, di cui paga i frutti alla prima ragione del 100. Ora l'interesse, che questi ricava supera quello che paga di scudi 310. Si domandano le due ragioni dei frutti al 100.

RISPOSTA. La prima è 0. 06, la seconda è 0. 05.

I crediti di 7 persone sommati a 6 a 6 sono 994, 1036, 840, 910, 896, 952, 882. Qual credito ha ciascuna?

RISPOSTA. Il credito di una è $x = 94$, di qui quelli delle altre.

A, e B hanno somme di danaro tali, che se rispettivamente guadagnassero a , b , A sarebbe ricco m volte B : ma se i loro guadagni fossero c , e d la somma di A sarebbe n volte quella di B. Si domanda il danaro di ciascuno.

RISPOSTA. Il danaro di A è

$$\frac{m(nd - c) - n(mb - a)}{m - n}.$$

Quello di B è

$$\frac{(nd - c) - (mb - a)}{m - n}.$$

A, e B possono fare un lavoro in m giorni; A, e C lo possono fare in giorni n ; B, e C in p giorni. In qual tempo questo lavoro può esser fatto da ciascuno, ed in quale da tutti insieme.

RISPOSTA. Il tempo di A è $\frac{2mnp}{mp + np - mn}$;

quello di B è $\frac{2mnp}{mn + np - mp}$;

il tempo di C è $\frac{2mnp}{mn + mp - np}$;

il tempo di tutti insieme è $\frac{2mnp}{mn + mp + pn}$.

Trovare una frazione tale, che se il suo numeratore sia aumentato di 1, ed il suo denominatore diminuito di 1, il risultato sia $\frac{4}{5}$: ma se il numeratore sia diminuito, ed il denominatore aumentato di 1 la frazione sia $\frac{1}{2}$.

RISPOSTA. La frazione è $\frac{7}{11}$.

Trovare il denaro di sei persone A, B, C, D, E, F con queste condizioni, che A, e B hanno insieme a; C, e D hanno b; la somma di E ed F è c.; A ha m volte il danaro di C; quello di D è n volte il danaro di E; e la somma di F è p volte quella di B.

Si risolverà con una sola incognita.

Un tale lascia una somma da dividersi fra quattro suoi servi così, che il primo abbia la metà della somma delle porzioni degli altri tre: il secondo abbia il terzo della somma degli altri tre: il terzo abbia il quarto della somma degli altri tre. Ora fatta la partizione si trova, che la parte del primo supera di 14 scudi quella del quarto. Cosa ebbe ciascuno?

RISPOSTA. Il primo ebbe 40 scudi: di qui gli altri.

Quattro persone spesero 20 scudi in una ricreazione. Per pagare il debito la prima si offrì di pagarne $\frac{1}{3}$, la seconda $\frac{1}{4}$, la terza $\frac{1}{5}$, la quarta $\frac{1}{6}$: quando però la somma fu raccolta si vide non bastare per pagare il debito. Si domandano le parti del debito, che veramente debbano pagare le quattro persone, onde ritenendo la detta ragione delle parti il debito sia pagato?

RISPOSTA. La prima scudi $7\frac{1}{57}$, la seconda $5\frac{15}{57}$, la terza $4\frac{12}{57}$, la quarta $3\frac{29}{57}$.

Trovare dieci numeri tali, che il primo più dieci volte la somma degli altri dia $82\frac{3}{8}$. Il secondo più 9 volte la somma degli al-

tri dia $70 \frac{3}{16}$. Due volte il terzo più 8 volte la somma degli altri dia 68. Tre volte il quarto più 7 volte la somma degli altri dia $60 + \frac{5}{16}$. Quattro volte il quinto più 6 volte la somma degli altri dia $48 \frac{1}{8}$. Cinque volte il sesto più 5 volte la somma degli altri dia $43 \frac{7}{16}$. Sei volte il settimo, e 4 volte la somma degli altri dia $34 \frac{7}{8}$. Sette volte l'ottavo più tre volte la somma degli altri dia $27 \frac{1}{16}$. Otto volte il nono più due volte la somma degli altri dia $20 \frac{3}{8}$. Finalmente nove volte il decimo più la somma degli altri dia $16 \frac{11}{16}$.

RISPOSTA. I numeri sono

$$\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, 2, 3, \frac{1}{16}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1.$$

Una lepre ha fatti b passi quando un cane si muove per raggiungerla. Il passo del cane è $\frac{p}{q}$ del passo della lepre; essendo questa una frazione mista: ma mentre il cane fa m passi la lepre ne fa $a + m$. Cerco dopo quanti passi il cane raggiungerà la lepre.

RISPOSTA. Dopo passi $x = \frac{bm q}{mp - (a + m)q}$. Ricavare da questa equazione i casi d'assurdità, d'indeterminazione, e di correzione del problema a causa del segno negativo.

CAPO SESTO

DEI PROBLEMI INDETERMINATI.



117. Si è veduto (§. 100.), che quando un problema assegna condizioni, e perciò dà equazioni di numero minore delle incognite, il problema è indeterminato, perchè si può soddisfare con un numero indefinito di valori delle incognite. Nulladimeno se il problema richiegga, che i valori delle incognite siano interi, e positivi, come se si domandassero numeri di uomini, di monete ec., il numero dei valori delle incognite può essere limitato, e qualche volta anche determinato. Nel primo caso il problema si dice *problema semideterminato*, nell'altro sarà *problema determinato*.

118. Sia per es. il problema. *Una unione di uomini, e ragazzi ha fatto un pranzo, pel quale hanno speso testoni 24. Essendo toccato a ciascun ragazzo il pagare un testone, ed a ciascun uomo 3 testoni, si domanda il numero degli uni, e degli altri.*

Sia x il numero degli uomini, ed y quello dei ragazzi, sarà l'equazione esprime il problema $3x + y = 24$, dalla quale si ottiene $y = 24 - 3x = 3(8 - x)$. Qui è evidente, che pel numero x degli uomini si deve prendere un numero positivo, intero, e non zero, perchè il problema dice, che nella unione vi erano gli uomini. Ora affinchè $8 - x$ non venga negativo è evidente, che per x si debbono prendere tutti i numeri da 1 fino a 7 inclusive, e non $x = 8$, altrimenti verrebbe zero il numero dei ragazzi contro l'asserzione del problema: dunque questo ha sette soluzioni, che si troverebbero sostituendo nell'equazione superiore i sette valori di x , e trovando i corrispondenti di y . Questo dunque sarà problema semideterminato.

119. Sia anche il problema. *Con monete da due, e da otto paoli in quanti modi si possono fare 12 paoli?*

L'equazione esprimente il problema sarà $2x + 8y = 12$, ed $x + 4y = 6$, d'onde $x = 6 - 4y = 2(3 - 2y)$. Qui si vede, che per y si deve prendere 1, e che non vi è altro valore: onde il problema ha una sola soluzione, e quindi è determinato.

120. Se poi si dicesse. *Un certo numero di uomini dovendo ricevere 30 paoli per ciascuno, e dovendo pagare 3 paoli per ognuno dei loro servi ricevono insieme paoli 369; si vuol sapere il numero degli uni, e degli altri.*

L'equazione del problema sarebbe $30x - 3y = 369$, o $10x - y = 123$, ed $y = 10x - 123$. In questa si possono prendere per x tutti i numeri interi, che soddisfano alla condizione $10x > 123$, o $x > \frac{123}{10}$, o $x > 12, 3$:

quindi dando ad x tutti i numeri superiori a 12, 3 cominciando cioè da $x = 12$, il problema è soddisfatto: quindi il problema ha un numero indefinito di soluzioni.

Dovendoci occupare dei problemi indeterminati per vedere quando sono almeno semideterminati cercheremo in questi tutte le soluzioni intere, e positive. Per far ciò dovendo mostrare come si possono assegnare queste soluzioni nelle equazioni, che nel loro numero siano inferiori al numero delle incognite, prima ammetteremo il caso, che il numero delle equazioni sia inferiore di una unità al numero delle incognite, e poi diremo come ci dobbiamo regolare, quando il numero delle equazioni essendo inferiore a quello delle incognite, sia qualunque.

Il fondamento di questi metodi essendo il metodo di trovare le soluzioni in numeri interi dell'equazione con due incognite ci occuperemo di questa, primo stabilendo su di essa alcuni teoremi, e poi dando il detto metodo.

121. È evidente, che l'equazione $ax + by = c$ è quella, che esprime generalmente tutte l'equazioni con due incognite.

In questa b , e c si supporranno di segni qualunque; si riterrà però, che a sia positiva, perchè se fosse negativa si ridurrebbe a positiva col cambiare i segni a tutti i termini dell'equazione. Ciò si può fare, perchè l'equazione è l'espressione dell'uguaglianza di due grandezze; or queste sono uguali sia che siano ambedue positive, o che si facciano ambedue negative, e viceversa; lo che è dire, che due quantità sono uguali anche se si prendano con segni contrarii. Dopo ciò ecco i teoremi.

122. I. *Affinchè l'equazione $ax+by=c$ si possa risolvere in numeri interi è necessario che a, b siano numeri primi fra loro.* Supponiamo infatti che a, b abbiano un divisore comune. O questo è comune anche a c , e togliendolo dall'equazione, i due detti coefficienti dell'incognite diventeranno primi fra loro; o questo divisore comune non è comune a c , e dividendo per questo l'equazione, il secondo membro darebbe una frazione, e quindi con valori interi delle due incognite non si potrebbe soddisfare alla detta equazione.

123. II. *Se v , e v' sono due valori interi, e positivi delle incognite, che soddisfano all'equazione, tutti gli altri valori interi soddisfacenti saranno espressi dalle uguaglianze $x = v - bt$, $y = v' + at$, o dalle altre $x = v + bt$, $y = v' - at$, nelle quali la t esprime qualunque numero intero.* Infatti essendo v , e v' i valori delle incognite avremo l'equazione $av + bv' = c$, sottraendo questa dalla proposta $ax + by = c$ avremo

$$a(x - v) + b(y - v') = 0, \text{ dalla quale } x - v = -\frac{b(y - v')}{a}.$$

Ora $x - v$ deve essere un intero, dunque un intero deve

essere $\frac{b(y - v')}{a}$: ma a è primo con b , dunque deve

essere divisibile per a l'altro fattore $y - v'$ (§. 48.) Po-

niamo dunque $\frac{y - v'}{a} = t$, e sarà $x - v = -bt$, o $x = v - bt$, ed $y = v' + at$; e poichè t può essere

negative, potremo porre eziandio $x = v + bt$, $y = v' - bt$. Si vede poi, che l'espressioni delle incognite $x = v - bt$, $y = v' + at$ soddisfano alla proposta, perchè moltiplicata la prima per a , e la seconda per b , ed aggiunti i risultamenti abbiamo $ax + by = av + bv'$, ossia $ax + by = c$, essendo per ipotesi $av + bv' = c$. Si vedrà facilmente, che anche le due altre espressioni $x = v + bt$, $y = v' - at$ soddisfano alla proposta, e ciò usando il metodo antecedente.

124. Se nelle prime, e nelle seconde espressioni delle incognite si supponga $t = 0, 1, 2, 3, 4, \dots = -1, -2, -3, -4, \dots$ avremo

$$x = v, v - b, v - 2b, v - 3b, v - 4b, \dots$$

$$y = v', v' + a, v' + 2a, v' + 3a, v' + 4a, \dots$$

ed

$$x = v + b, v + 2b, v + 3b, v + 4b, \dots$$

$$y = v' - a, v' - 2a, v' - 3a, v' - 4a, \dots$$

Quindi i valori delle due incognite costituiscono due serie di termini, che cominciando dai loro valori particolari v, v' , l'una successivamente decresce, cosicchè la differenza fra termine e termine è b ; l'altra successivamente cresce colla differenza a fra due termini consecutivi, e viceversa.

125. III. Fissato a positivo, come si è detto, qualora per l'incognite si vogliano numeri interi, e positivi, questi saranno di numero limitato quando b sia positivo; saranno indefiniti, quando b sia negativo, e c positivo, o negativo. Infatti dall'equazione

$$ax + by = c \text{ si ricava } x = \frac{c - by}{a}.$$

Se essendo b positivo, c è negativo il problema non si può risolvere in numeri interi e positivi, perchè non si può rendere positiva l'espressione $c - by$ coll'y positivo. Se poi c è positivo,

onde x sia positivo deve essere $by < c$, ed $y < \frac{c}{b}$, dunque ad y non si potranno dare che tutti i numeri interi positivi al di sotto di $\frac{c}{b}$.

Se poi sia b negativo avremo $ax - by = c$, $x = \frac{c + by}{a}$.

Se c sarà positivo, si potranno dare ad y tutti i numeri positivi cominciando da uno. Se poi c sarà negativo, onde sia x positivo dovrà essere $by > c$, ed $y > \frac{c}{b}$; dunque si po-

tranno dare ad y tutti i numeri interi al di sopra di $\frac{c}{b}$; dunque in ambedue questi casi di c il numero delle soluzioni è indefinito.

126. Ritornando al caso di b positivo, possiamo assegnare tutti i valori delle incognite dalle loro espressioni generali $x = v - bt$, $y = v' + at$ quando si conosca un lor valore v , v' . Infatti affinchè i detti valori delle incognite siano positivi per la prima, e seconda equazione dovrà essere $v - bt > 0$, o $v' + at > 0$; quindi $v > bt$, e $t < \frac{v}{b}$, e per la seconda inuguaglianza $t > -\frac{v'}{a}$. Ciò è chiaro, perchè avendosi $v - bt > 0$ rimarrà la stessa inuguaglianza aggiungendo bt ad ambedue i suoi membri bt , di che avremo $v > bt$, o $bt < v$, e quindi $t < \frac{v}{b}$. Similmente avendosi $v' + at > 0$ questa sussisterà anche se da ambedue i membri si tolga at , con che avremo $t > -\frac{v'}{a}$. Dunque tutti i valori che si potranno dare a t saranno tutti gl' interi maggiori di $-\frac{v'}{a}$, e minori di $\frac{v}{b}$. Se queste condizioni si potranno conciliare insieme, conosceremo tutti i successivi valori

di t , e quindi tutti i corrispondenti di x , e di y ; se poi non si accorderanno, ciò vorrà dire, che il problema non potrà avere soluzioni, che s'accordino colla condizione, che le incognite siano intere, e positive.

$$\text{Se si sottragga } -\frac{v'}{a} \text{ da } \frac{v}{b} \text{ avremo } \frac{av + b'v'}{ab} = \frac{c}{ab};$$

se dunque q sia il quoto di $\frac{c}{ab}$ sarà $q + 1$ il più gran numero di soluzioni, che potrà avere il problema proposto.

127. Stabilite queste verità generali andiamo a vedere come di fatto si possono trovare i valori delle incognite intere, e positivi per li problemi, che danno una equazione con due incognite. In ciò assegneremo due metodi; l'uno ci mostrerà come si possano determinare l'espressioni $v - bt$, $v' + at$ delle due incognite; l'altro più spedito ci farà vedere come subito si possa determinare un valore v , v' delle due incognite, perchè essendosi dimostrate a priori l'espressioni generali $x = v - bt$, $y = v' + at$ col detto valore subito si potranno trovare tutti gli altri per mezzo di queste espressioni.

128. Sia il problema. *Una quantità di uomini, e di donne hanno speso in una locanda scudi 1000. Ciascuno degli uomini ha speso scudi 19, e ciascuna delle donne scudi 13. Si domanda il numero degli uni, e delle altre.*

L'equazione che esprime il problema è $19x + 13y = 1000$: di qui

$$y = \frac{1000 - 19x}{13} = 76 - x + \frac{12 - 6x}{13} = 76 - x + 6 \frac{(2 - x)}{13}.$$

La y deve essere un intero, dunque $\frac{6(2 - x)}{13}$ deve dare un intero: ma 6, e 13 sono primi fra loro, dunque (§. 48.) $2 - x$ deve essere diviso esattamente da 13. Si

dica q il quoto sarà

$$\frac{2-x}{13} = q, \quad x = 2 - 13q,$$

e sostituendo questo valore di x in quello di y sarà

$$y = 74 + 19q.$$

Affinchè x , ed y siano positivi dovrà essere (§. 126.)

$$q > -\frac{74}{19}, \quad \text{e} \quad q < \frac{2}{13}.$$

La seconda condizione ci dice, che q non può avere numero intero positivo. L'altra $q > -\frac{74}{19}$, o $q > -3 - \frac{17}{19}$ ci dice, che si può fare $q=0$, $q=-1$, $q=-2$, $q=-3$. Con questi si troveranno li quattro valori delle incognite,

$$x = 2, \quad y = 74; \quad x = 15, \quad y = 55;$$

$$y = 28, \quad y = 36; \quad y = 41, \quad y = 17.$$

129. Cerco un numero, che si divida esattamente per 5, e che diviso per 7 dia 3 di residuo.

Per la prima ipotesi il numero sarà $5x$, e per la seconda sarà $7y + 3$: dunque $5x = 7y + 3$. Di qui

$$x = \frac{7y + 3}{5} = y + \frac{2y + 3}{5}.$$

Si ponga $\frac{2y + 3}{5} = q$, ove q è un intero, sarà

$$2y + 3 = 5q, \quad y = \frac{5q - 3}{2} = 2q - 1 + \frac{q-1}{2}.$$

Sia $\frac{q-1}{2} = q'$, e di qui $q = 2q' + 1$. Sostituendo questo

valore in y , e quello di y in x , sarà $x=7q'+9$, $y=5q'+6$.
 Si vede chiaro, che le condizioni per q' sono $7q'+9 > 0$,
 $5q'+6 > 0$, dalle quali $q' > -1 - \frac{2}{7}$; $q' > -1 - \frac{1}{6}$. Di
 qui si vede, che q' può avere tutti i numeri cominciando
 da -1 , ed andando sempre crescendo d'una unità.

130. Se nell'operazione antecedente quando si è avuto

$$x = y + \frac{2y+3}{5}$$

si fosse posto $5-3$ in luogo di 2 , si sarebbe avuto

$$x = 2y - \frac{3y-3}{5} = 2y - 3 \frac{(y-1)}{5},$$

e fatto $y-1=5q$ si sarebbe avuto $y=5q+1$, e così
 si sarebbe risparmiata un'altra sostituzione.

131. *Trovare un numero, che diviso per 39 dia di resi-*
duo 16, e diviso per 56 dia di residuo 27.

L'equazione sarà $39x = 56y + 11$; dalla quale

$$x = \frac{56y+11}{39} = 1 + \frac{17y+11}{39}.$$

Si ponga $\frac{17y+11}{39} = q$ sarà $y = \frac{39q-11}{17} = 2q + \frac{5q-11}{17}$.

Sia

$$\frac{5q-11}{17} = q', \quad q = \frac{17q'+11}{5} = 3q'+2 + \frac{2q'+1}{5};$$

$$\frac{2q'+1}{5} = q'', \quad q' = \frac{5q''-1}{2} = 2q'' + \frac{q''-1}{2};$$

$$\frac{q''-1}{2} = q''', \quad q'' = 2q''' + 1;$$

e tornando indietro colle sostituzioni si troverà

$$x = 56q''' + 253, \quad y = 39q''' + 176.$$

Operando come innanzi si troverà, che il più piccolo valore di q''' è 4.

132. Se nel valore primo di $x = \frac{17y + 11}{39}$ si fosse posto $39 - 22$ invece di 17 si sarebbe avuto

$$x = y - \frac{22y - 11}{39} = y - 11 \frac{(2y - 1)}{39},$$

e fatto $\frac{2y - 1}{39} = q$ si sarebbe avuto

$$y = \frac{39q + 1}{2} = 19q + \frac{q+1}{3},$$

e poi con $q = 2q' - 1$ si sarebbero terminate le sostituzioni con più brevità.

133. *Alcuni guadagnano 17 paoli per ciascuno: ma ciascuno dei loro figli consuma paoli 49: intanto si sa, che il consumo di questi supera di 8 il guadagno di quelli. Si domanda il numero degli uni, e degli altri.*

Esprimendo per x il numero degli uomini, e per y quello dei figli sarà

$$17x - 49y = -8, \quad \text{ed} \quad x = \frac{49y - 8}{17};$$

ora $49 = 17 \cdot 3 - 2$; dunque $\frac{49y}{17} = 3y - \frac{2y}{17}$, e quindi

$$x = 3y - \frac{(2y + 8)}{17} = 3y - 2 \frac{(y + 4)}{17}.$$

Essendo i numeri 2 e 17 primi fra loro dovrà essere $y + 4$

divisibile esattamente per 17 : dunque si porrà $y+4=17q$, d'onde $y=17q-4$; quindi $x=49q-12$. In questi valori non si può porre q negativo, nè $q=0$, perchè si avrebbero x , ed y negativi; dunque si possono dare a q tutti i numeri interi positivi cominciando da 1.

Osservando i ripieghi usati negli antecedenti problemi (§. 130, 132, 133.) si vedrà quanto s'accorci l'operazione coll' usarvi nel suo corso opportune sostituzioni; per le quali però non si possono assegnare regole generali, ma il solo uso, e l'avvedutezza, e sagacità possono suggerirle.

134. Si è detto, che i coefficienti delle incognite debbono essere numeri primi fra loro. Se non fossero, l'operazione lo mostrerebbe, perchè si vedrebbe, che niun valore intero dell'incognita, dalla quale si fanno dipendere i valori delle incognite del problema, si potrebbe dare in numeri interi.

Sia l'equazione $6x + 21y = 11$ sarà

$$x = \frac{11 - 21y}{6} = 1 - 3y + \frac{5 - 3y}{6}$$

$$\frac{5 - 3y}{6} = q, \quad 3y = 5 - 6q, \quad y = 1 + \frac{2}{3} - 2q :$$

dove si vede, che dovendo la q essere intera per niun suo valore si può togliere la frazione $\frac{2}{3}$.

Se poi il fattore comune ai due coefficienti delle incognite, fosse anche comune al secondo membro cognito, questo sparirebbe nel progresso dell'operazione. Così avendosi $6x + 10y = 12$, sarebbe

$$x = \frac{12 - 10y}{6} = 2 - y - \frac{4y}{6} = 2 - y - \frac{2y}{3} ;$$

dove si dovrebbe fare $y = 3q$.

135. Osservando il nostro metodo per trovare tutti i valori interi positivi delle due incognite si vedrà, che consiste nel farle dipendere da una terza incognita. Che l'espressione delle due incognite per mezzo della terza si compongono di due parti, l'una è tutta cognita, e l'altra è la terza incognita con coefficienti, che sono i coefficienti delle due incognite nell'equazione data, ma fra loro scambiati, cosicchè nel valore di x la terza incognita ha il coefficiente di y , e nel valore di y ha il coefficiente di x ; quindi le dette espressioni delle due incognite hanno la forma dimostrata a priori nel (§. 123.)

136. Il metodo poi per trovare le dette espressioni consiste nell'isolare l'incognita, per es. x , che ha il coefficiente minore nella data equazione. Avendosi così nel secondo membro una frazione, da questa si cava l'intero, se si può, e la nuova frazione si fa uguale ad un quoto q , perchè questa frazione deve riuscire uguale ad un intero, onde sia intera l'incognita isolata. Si tratta la nuova equazione, come l'antecedente, trovando l'incognita y per mezzo di q , perchè essa ha un coefficiente minore del coefficiente di q , che è il residuo della divisione, mentre la q ha per coefficiente il divisore. In questa espressione di y si caverà, se si potrà, la parte intera, e la nuova frazione dovendo essere un intero, onde sia tale la y , si farà uguale a q' , nuovo intero. Da questa nuova equazione si ricaverà il valore di q , perchè essa ha il coefficiente minore, che è il residuo della divisione, mentre che il coefficiente di q' è il divisore. Si va innanzi finchè una incognita, per es. q''' , avrà acquistato il coefficiente uno, e che sarà data per mezzo di q^{iv} , che si troverà nel secondo membro. Allora tornando indietro, la q'' si darà in q^{iv} , quindi la q' si darà in q^{iv} , poi la q parimenti si avrà in q^{iv} ; e finalmente la x , e la y si avranno nella stessa q^{iv} .

137. Nelle successive equazioni poi, che dà il nostro metodo, sempre si giungerà ad avere una equazione ove una delle due incognite avrà uno per coefficiente. Infatti se si

esamina il metodo da noi usato, e testé esposto, si vedrà, che con questo si usa su i coefficienti delle incognite proposte il metodo del massimo divisore, ed in ogni equazione, che si ottiene l'incognita, che si pone nel secondo membro, e che ha un accento di più di quello, che si trova nel primo, ha per coefficiente il divisore della divisione fatta, mentre la incognita del primo membro ha per coefficiente il residuo. Ora i coefficienti delle due incognite nella proposta sono primi fra loro, dunque giungeremo ad una divisione, che ci darà uno di residuo, e che sarà il coefficiente della incognita, che si troverà nel primo membro dell'equazione attuale.

138. Dal metodo esposto si può dimostrare, che essendo $x = mq + A$, $y = nq + B$ le forme dei valori delle incognite del problema, il coefficiente di q nel valore di x deve essere il coefficiente di y nella proposta, e viceversa il coefficiente di q in y deve essere quello di x nella proposta, non badando ai segni. In primo luogo m , ed n debbono essere primi fra di loro, perchè se avessero un fattore comune, onde si potesse porre $m = m'r$, $n = n'r$, si avrebbe $x = m'rq + A$, $y = n'rq + B$, e si potrebbe avere x , ed y in valori interi anche ponendo $q = \frac{q'}{r}$, cioè dando a q un valore frazionario, ciò che non può essere, come si ricava dal metodo usato più d'una volta per trovare l'espressioni di x , e di y in una terza incognita.

Dovendo soddisfare l'espressioni date di x , ed y alla proposta $ax + by = c$, sarà $a(mq + A) + b(nq + B) = c$, o $(a)(am + bn)q + aA + bB = c$. Ma facendo $q = 0$ nell'espressioni di $x = mq + A$, $y = nq + B$ abbiamo $x = A$, $y = B$, dunque A , B saranno valori di x , e di y , e per conseguenza soddisfacenti all'equazione $ay + by = c$, dunque $aA + bB = c$, dunque l'equazione $(a)(am + bn)q = 0$ dalla quale si ricava $am = -bn$, ed $\frac{a}{b} = -\frac{n}{m}$: ma a

e b sono primi fra loro : dunque $a = -n$, $b = m$. Infatti dalla uguaglianza $\frac{a}{b} = -\frac{n}{m}$ si ha $a = -\frac{nb}{m}$: dunque avendosi il quoto a, nb si divide esattamente per m : ma m è primo con n : dunque (§. 48.) m deve dividere esattamente b . Se il quoto di b per m è uno, $b = m$, e quindi $a = -n$, come si vuole : altrimenti sarà $\frac{b}{m} = r$, ove r è differente dall'unità : dunque $a = -nr$: di qui $\frac{a}{r} = -n$: dunque a è divisibile esattamente per r , cioè per un fattore di b , ciò che non può essere, perchè per ipotesi a , e b sono primi fra loro : dunque $r = 1$, e perciò $a = -n$, $b = m$.

139. Vogliamo ora esporre l'altro metodo per trovare tutte le soluzioni intere positive d'una equazione con due incognite. Questo è fondato sul teorema (§. 123.), che trovata una soluzione intera $x = v$, $y = v'$, le altre sono date dall'equazioni

$$x = v - bt, \quad y = v' + at.$$

Per mostrare il detto metodo sia l'equazione $17x - 49y = -8$.

Si riduca a frazione continua la frazione $\frac{17}{49}$, e da questa si avranno le frazioni dedotte $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{8}{23}$, $\frac{17}{49}$. Si è dimostrato (§. 84.), che la differenza fra una delle frazioni dedotte, e l'antecedente è sempre l'unità positiva, se la prima frazione è in posto pari, negativa se è in posto dispari, questa unità divisa pel prodotto dei denominatori delle due frazioni. Ora nel nostro caso la frazione $\frac{17}{49}$ è in posto dispari : dunque $\frac{17}{49} - \frac{8}{23} = -\frac{1}{49 \cdot 23}$.

Di qui $17 \cdot 23 - 49 \cdot 8 = -1$, e moltiplicando per 8 sarà

17. $184 - 49 \cdot 64 = -8$. Confrontando questa equazione colla data $17x - 49y = -8$ si vede, che una soluzione è $x = 184$, ed $y = 64$, e quindi l'espressioni generali degli altri valori interi saranno

$$x = 184 + 49t, \quad y = 64 + 17t.$$

140. Per dare la regola generale del metodo usato si riprenda l'equazione $ax + by = c$, nella quale b , e c abbiano segni qualunque. Si faccia la frazione $\frac{a}{b}$, e si riduca a frazione continua, da questa si ricavino tutte le frazioni dedotte, l'ultima delle quali sarà $\frac{a}{b}$. Da questa si sottragga la frazione antecedente, che supponiamo espressa da $\frac{m}{n}$, avremo il residuo $\frac{an - bm}{bn}$, questo sarà uguale alla frazione $\pm \frac{1}{bn}$.

Si prenderà il positivo se l'ultima dedotta $\frac{a}{b}$ è in posto pari, ed il negativo se è in posto dispari; avremo così $an - bm = \pm 1$. Si moltiplichi questa equazione per c , e sarà $anc - bmc = \pm c$. Si faccia sì con opportuna mutazione di segni, se occorra, che il secondo membro di questa equazione, abbia lo stesso segno, che ha c nella proposta $ax + by = c$. Fatto ciò s'identifichi il primo membro di questa equazione col primo membro dell'antecedente ottenuta, facendo la x della proposta uguale al moltiplicatore del suo coefficiente nella ottenuta, e la y della proposta uguale al moltiplicatore del suo coefficiente nella ottenuta. Se per es. nell'ottenuta non si è fatto cambiamento di segno si dovrà fare $x = nc$, $y = -mc$. Andando poi all'espressioni generali $x = v - bt$, $y = v' + at$ invece di v , e v' si pongano i valori trovati di x , e di y , ed invece di a , e di b , i coefficienti, che hanno nella proposta, ed avremo così l'espressioni generali di tutti i valori di x , e di y , che con numeri interi soddisfano al problema.

141. Andiamo ora al caso dei problemi indeterminati, che danno più d'una equazione; e supponiamo prima, che il numero delle equazioni sia d'una unità inferiore a quella delle incognite.

Siano le due equazioni a tre incognite

$$2x + 3y + z = 14$$

$$4x + 5y + 6z = 23$$

nella prima delle quali la z non ha coefficiente, lo che, come vedremo, è caso più facile.

Si elimini dalle due date equazioni questa, ed avremo

$$8x + 13y = 61.$$

Riducendo a frazione continua $\frac{8}{13}$ avremo le frazioni dedotte $\frac{0}{1}$, 1 , $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{8}{13}$. La frazione $\frac{8}{13}$ è in posto pari; dunque $\frac{8}{13} - \frac{3}{5} = \frac{1}{13 \cdot 5}$: di qui

$$8 \cdot 5 - 13 \cdot 3 = 1,$$

moltiplicando per 61 sarà

$$8 \cdot 305 - 13 \cdot 183 = 61;$$

dunque

$$x = 305, y = -183,$$

e quindi

$$x = 305 - 13t, y = -183 + 8t.$$

Sostituendo queste espressioni nella prima equazione

$$2x + 3y + z = 14 \quad \text{sarà} \quad z = -47 + 2t$$

Si vede, che si è fatto bene a prescegliere per l'eliminazione l'incognita, che non ha coefficiente in una delle due

equazioni, perchè si è così risparmiata una moltiplicazione, e perchè trovate l'espressioni delle due altre incognite nella terza z , colla loro sostituzione si è trovata subito in questa terza anche l'incognita eliminata.

142. Da un esempio seguente si vedrà come si debba proseguire l'operazione quando l'incognita eliminata abbia un coefficiente in ambedue le proposte equazioni. Siano

$$2x - 3y + 4z = 20$$

$$5x + 2y + 3z = 42$$

eliminata la x sarà

$$-19y + 14z = 16,$$

$$z = \frac{16 + 19y}{14} = 1 + y + \frac{2 + 5y}{14} :$$

$$\frac{2+5y}{14} = q, y = \frac{14q-2}{5} = 2q + \frac{4q-2}{5} = 2q + 2\left(\frac{2q-1}{5}\right) :$$

$$2q-1=5q', q = \frac{5q'+1}{2} = 2q' + \frac{q'+1}{2}, \text{ e } q' = 2q''-1;$$

$$\text{di qui } y = 14q'' - 6, z = -19q'' - 7.$$

Si sostituiscano queste espressioni nella prima delle date equazioni, e si troverà $x = 15 - 17q''$. Si vede, che queste tre equazioni non si possono insieme accordare con valori di q'' onde diano positive le tre incognite.

143. Siano le due equazioni

$$5x + 2y - 4z = -3$$

$$8x + 6y + 7z = 41.$$

Eliminando da ambedue y avremo $7x - 19z = -50$.

Trattando questa col primo metodo sarà $x = 1 + 19q''$, $z = 3 + 7q''$. Portando queste due espressioni nella prima delle proposte sarà

$$2y + 67q'' = 4,$$

che trattata col primo metodo darà

$$y = 2 - 67q''', \quad q'' = 2q'''.$$

Portando questa espressione di q'' nelle espressioni superiori di x , e di y avremo finalmente le tre equazioni

$$x = 1 + 38q''', \quad y = 2 - 67q''', \quad z = 3 + 14q'''.$$

In queste, se si vogliano x , y , z in numeri interi e positivi, non può essere q''' intero positivo, perchè la y sarebbe negativa; non può essere negativo, perchè riuscirebbero x , e z negativi: non vi è dunque che l'ipotesi di $q''' = 0$; onde $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$ sono i soli valori interi e positivi da soddisfare alle date equazioni.

144. Quando dunque si abbiano due equazioni con tre incognite, se una non ha coefficiente, si elimina questa, e l'equazione risultante con due incognite si tratta con uno dei due metodi dati, onde trovare le loro espressioni in un'altra incognita. Queste si sostituiscono nell'equazione data, ove la terza incognita non ha coefficiente, e subito si trova questa eziandio nella incognita, dalla quale si sono fatte dipendere le due altre.

145. Nel caso generale dalle due proposte si eliminerà una delle incognite, e dall'equazione risultante con due incognite si troveranno le loro espressioni in una terza, per es. q ; queste si sostituiranno in una delle proposte, ed avremo una equazione fra q , e la incognita eliminata, e da questa con uno dei dati metodi si troverà la incognita e la q in una q' . Questo valore di q si sostituirà nelle espressioni delle due prime incognite proposte, e così si avranno tutte e tre date in una quarta q' .

146. Se si avessero tre equazioni con quattro incognite *eliminatane una si avrebbero tre incognite con due equazioni, che trattate col metodo antecedente ci darebbero le tre incognite espresse in una quarta q . Queste espressioni si sostituirebbero in una delle date equazioni, e se ne avrebbe una fra q , e la incognita eliminata: dalla quale coi nostri metodi si avrebbe l'incognita, e la q in un'altra q' : questa espressione di q si sostituirebbe nelle espressioni delle tre incognite, e così le quattro incognite sarebbero espresse per una stessa q' . Si fisserebbero poi le solite condizioni, onde dai valori di q' sorgessero per le incognite valori positivi, ed interi.*

Si vede come il metodo si estende a tutti i casi, nei quali il numero delle equazioni sia minore di una unità di quelle delle incognite.

Si domanda di rendere intere e positive le tre frazioni

$$\frac{13x + 1}{10}, \frac{17x - 2}{7}, \frac{19x + 3}{6}$$

con valori interi e positivi della x .

Per risolvere il problema queste frazioni si potrebbero fare uguali a tre espressioni generali d'interi q, q', q'' con questo si avrebbero 3 equazioni con quattro incognite, che si tratterebbero col metodo ora dato, e ciò si farà per esercizio.

Ecco però in questo caso un altro metodo da usarsi in casi consimili. Abbiamo $\frac{13x + 1}{10} = x + \frac{3x + 1}{10}$; si ponga $\frac{3x + 1}{10} = q$, e trattata questa equazione col primo metodo si troverà $x = 10q' + 3$. Si sostituisca questa espressione di x nella seconda equazione, e si avrà

$$\frac{170q' + 49}{7}, \text{ ossia } 24q' + 7 + \frac{2q'}{7},$$

e si porrà $\frac{2q'}{7} = q''$, d'onde $q' = 3q'' + \frac{q''}{2}$. Si stabilisca $q' = 2q''$.

Di qui si troverà $q' = 7q''$, il quale sostituito in $x = 10q' + 3$ ci dà $x = 70q'' + 3$. Questa espressione di x si ponga nella terza frazione $\frac{19x + 3}{6}$, e sarà

$$\frac{1330q'' + 60}{6} = 221q'' + 10 + \frac{2q''}{3}.$$

Si ponga $q'' = 3q^{iv}$. Sostituito questo in $x = 70q'' + 3$ sarà $x = 210q^{iv} + 3$; e questo sarà il valore domandato di x da rendere intere e positive tutte e tre le frazioni. Si vede, che il più piccolo valore di x è quando $q^{iv} = 0$, da cui $x = 3$. Si vede poi che per q^{iv} non si può prendere valore negativo; si possono però prendere tutti i numeri positivi.

Daremo un esempio pel caso, che il numero delle incognite sia maggiore di più d'uno al numero delle equazioni.

Sia $2x + 3y + 4z = 148$: avremo $2x + 3y = 148 - 4z$.
Si faccia $148 - 4z = c$, sarà

$$2x + 3y = c, \quad x = -y + \frac{c - y}{2}, \quad c - y = 2q, \quad y = c - 2q,$$

ed $x = 3q - c$; o ponendo il valore di c

$$x = 3q + 4z - 148, \quad y = 148 - 4z - 2q.$$

L'equazione $2x + 3y + 4z = 148$ prova, che dovendo essere tutte le incognite positive, se niuna è uguale a zero, deve essere $4z < 148$ o $z < 37$, poniamo dunque $z = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ec. fino a 36 nelle espressioni di x , e di y , e vedremo quali si debbono dare a q . Per esempio facendo $z = 4$ sarà

$$x = 3q - 132, \quad y = 132 - 2q,$$

dalle quali si ricava $q > 44$, $q < 66$: onde per x , ed y sorgeranno 21 valori interi, e positivi.



Trenta persone fra uomini, e donne, e ragazzi spendono 50 scudi. L'uomo spende 3 scudi, la donna 2 scudi, ed il ragazzo uno scudo. Quante persone vi sono di ciascuna classe?

RISPOSTA. Vi sono dieci soluzioni, una delle quali è, che gli uomini sono 2, le donne 16, ed i ragazzi 12.

Un tale compra 100 capi di roba di tre specie per 100 scudi, per ognuno della prima specie da $3\frac{1}{2}$, per ognuno della seconda da $1\frac{1}{3}$, e per ognuno della terza da $\frac{1}{2}$ scudo. Quanti capi comprò in ciascuna specie?

RISPOSTA. Se comprò della prima 5, 10, 15, comprò della seconda 42, 24, 16, e della terza 53, 66, 79.

Un tale ha tre qualità d'argento, la prima in un marco, o peso di 8 onces, contiene 7 onces d'argento, la seconda $5\frac{1}{2}$, la terza $4\frac{1}{2}$, volendo fare una lega di 30 marchi, che in ogni marco contenga 6 onces d'argento, si vuol sapere quanti marchi deve prendere delle tre qualità.

RISPOSTA. Se della prima prende marchi 12, 14, 16, della seconda deve prendere marchi 15, 10, 5, e della terza 3, 6, 19.

Uno compra 100 capi di roba per 100 scudi. Spende per ognuno della prima specie 10 scudi, 5 scudi per ognuno della seconda, 2 scudi per ognuno della terza, e $\frac{1}{2}$ scudo per ognuno della quarta. Si domandano gli oggetti di ciascuna specie.

RISPOSTA. Vi sono 10 soluzioni, tra le quali una dice, che se vi sono per la prima specie capi 4, 4, vi saranno per la seconda 1, 2, per la terza 5, 2, e per la quarta capi 90, 92.

Trovare tre numeri tali, che se si moltiplica il primo per 3, il secondo per 5, ed il terzo per 7, la somma dei prodotti sia 560. Se poi il primo si moltiplica per 9, il secondo per 25, ed il terzo per 49 la somma dei prodotti sarà 2920.

RISPOSTA. I numeri sono 15, 82, 15, ovvero 50, 40, 30.

È egli possibile di fare 19 lire con monete di soldi 24, 12, 6?

RISPOSTA. Impossibile?

Un tale ha dei sacchetti di denaro. Contandoli a 3 a 3 non vi è avanzo: a 7 a 7 ne avanza uno: a 10 a 10 ne avanzano 6. I sacchetti sono più di 100, e meno di 300: se ne domanda il numero.

RISPOSTA. Sono 246 sacchetti.

Trovare tutti i valori d'un numero che soddisfino a queste tre condizioni; che il suo triplo diminuito di 10 sia divisibile esattamente per 7; che preso undici volte il numero, ed aggiuntogli 8, il risultamento diviso per 17 dia un quoto esatto; che la differenza fra sedici volte il numero e l'unità possa dividersi esattamente per 5.

RISPOSTA. Il più piccolo valore è 211.

Trovare due frazioni, i di cui denominatori siano 7 e 9, e la loro somma uguale a $\frac{19}{21}$.

RISPOSTA. Se si dicano x , ed y i numeratori delle due frazioni, per valori positivi avremo la sola soluzione $x = 4$, $y = 3$. Colla differenza delle due frazioni avremo soluzioni indefinite $x = 11$, $y = -6$; $x = 18$, $y = -15$ ec.

Sono 78 fra uomini e donne, che fanno un certo lavoro; ogni uomo riceve 5 paoli, ed ogni donna 3. Quanti sono gli uni, e le altre?

RISPOSTA. Il problema può essere risoluto in cinque modi, ed uno è, che gli uomini sono 75, le donne sono 3.

Un tale ha tre pezze di panno di differenti lunghezze. Dice, che ogni canna della prima pezza vale 6 scudi, ogni canna della seconda 7 scudi, ed ogni canna della terza 4 scudi: il costo poi totale delle tre pezze è 122. Per ajuto della soluzione del problema soggiunge, che vi vorrebbero 145 scudi se ogni canna della prima pezza valesse 11 scudi ogni canna, della seconda valesse 12, e per ogni canna della terza dovesse dare 6 scudi. Si domandano le canne delle tre pezze.

RISPOSTA. Vi è una sola soluzione, ed è, che la prima pezza ha 9 canne, la seconda 8, e la terza 3.

Con monete di franchi 5, 6, 20 in quanti modi si possono pagare franchi 187.

RISPOSTA. Vi sono 25 soluzioni, ed una è, che si possono dare 3 monete da 5, 2 da 6, ed 8 da 20. Un'altra è, che se si danno 3 da 20; da 5 se ne dovranno dare 5, 11, 17, 23; e da 6 si dovranno dare monete 17, 12, 7, 2.

Si vogliono mescolare tre specie di vini A, B, C. A vale 15 soldi, 10 denari a misura. B 21 soldi, e 7 denari a misura. C 22 soldi e 10 denari a misura. Si vuole, che la mescolanza sia di misure 429, ognuna delle quali valga 16 soldi, ed 8 denari. Si domandano le misure, che si debbono prendere di ciascuna specie.

RISPOSTA. Vi sono 30 soluzioni: una è, che della prima specie si possono prendere 374 misure; della seconda 22; della terza 33.

In quante maniere si possono prendere quattro specie di vini, che rispettivamente costino paoli 16, 10, 8, 6 a boccale, per fare una mescolanza di 100 boccali, che valga 12 paoli il boccale.

RISPOSTA. In 312 maniere.

CAPO SETTIMO

DELLE PROPORZIONI, E DELLE PROGRESSIONI ARITMETICHE, E GEOMETRICHE.



147. In due modi si possono paragonare due quantità: o vedendo di quanto una supera l'altra, o qual multiplo sia l'una dall'altra. Il primo paragone dà la differenza fra le due quantità, e l'altro il quoto. *La differenza fra due quan-*

tità si dice il rapporto, o la ragione aritmetica delle quantità stesse, ed il loro quoto si chiama il rapporto o la ragione geometrica delle quantità. Dunque il rapporto aritmetico fra a e b è $a - b$, ed il rapporto geometrico $\frac{a}{b}$.

148. L'uguaglianza di due rapporti dà la proporzione: quindi la proporzione aritmetica è l'uguaglianza di due rapporti aritmetici, e la proporzione geometrica è l'uguaglianza di due rapporti geometrici.

149. Ciò posto se a e b hanno la stessa differenza di c , e d , la proporzione aritmetica sarà espressa da $a - b = c - d$. Si suole però esprimere piuttosto con $a . . b = c . . d$.

150. La proporzione geometrica si esprime con $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, o piuttosto con $a : b = c : d$.

Ambedue queste proporzioni si leggono dicendo *a sta a b come c sta a d*: il che vuol dire nella proporzione aritmetica, che la differenza fra a e b è uguale alla distanza fra c e d ; e nella proporzione geometrica, che il quoto di a diviso per b è uguale al quoto di c diviso per d .

151. Nella proporzione aritmetica la somma degli estremi è uguale alla somma dei medj.

Infatti dall'uguaglianza

$$a - b = c - d \quad \text{si ricava} \quad a + d = c + b.$$

Nella proporzione geometrica il prodotto degli estremi è uguale al prodotto dei medj.

Ciò si ricava dall'uguaglianza

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ che ci dà } ad = cb.$$

Essendo ambedue le specie di proporzioni vere equazioni, colle regole di queste si potrà subito trovare un termine, che vi sia incognito.

152. Se nella proporzione aritmetica fosse incognita a , cioè un estremo, si avrebbe subito dall'uguaglianza

$$a + b = c + d, \quad a = c + d - b;$$

e se fosse incognita la c , cioè un medio, si avrebbe

$$c = a + b - d:$$

dunque un estremo è uguale alla somma de' medj diminuita dell'altro estremo; ed un medio è uguale alla somma degli estremi diminuita dell'altro medio.

153. Dall'uguaglianza $ad = cb$ dedotta dalla proporzione geometrica si ricava

$$a = \frac{cb}{d}, \quad c = \frac{ad}{b}:$$

cioè un estremo è uguale al prodotto de' medj diviso per l'altro estremo; un medio è uguale al prodotto degli estremi diviso per l'altro medio.

154. Se in una proporzione i due termini medj sono uguali, il valore comune si dice *medio proporzionale fra gli estremi*. Siano le due proporzioni $a : b = b : d$; $a : b = b : d$, in queste la b è medio proporzionale fra gli estremi a, d : nella prima proporzione è medio proporzionale aritmetico, e nella seconda è medio proporzionale geometrico.

155. Dalla prima proporzione abbiamo $b = \frac{a+d}{2}$: dunque il medio proporzionale aritmetico è uguale alla semisomma degli estremi.

156. Dalla proporzione geometrica abbiamo $b^2 = ad$: cioè il quadrato del medio proporzionale è uguale al prodotto degli estremi. Non abbiamo però operazione per ottenere da questo prodotto ad il medio proporzionale b , come l'abbiamo avuto nella proporzione aritmetica.

Nella proporzione geometrica si sogliono dimostrare al-

cuni cambiamenti nei termini, per li quali però la proporzione non cessa.

157. Il primo è di far passare in ambedue i rapporti i conseguenti per antecedenti, e gli antecedenti per conseguenti. Ciò si dice *invertire i termini*. Si abbia la proporzione $a:b=c:d$, si potrà fare $b:a=d:c$, perchè la proporzione esiste.

Infatti essendo $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ sarà ancora $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$.

158. In una proporzione si può dire l'antecedente della prima ragione sta all'antecedente della seconda, come il conseguente della prima sta al conseguente della seconda. Ciò si dice *alternare i termini*. Così avendosi $a:b=c:d$ Si può

fare $a:c=b:d$. Infatti avendosi $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, dividendo

ambedue i membri per $\frac{c}{b}$ avremo $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, che dimostra

la nostra proposizione.

159. In una proporzione si può dire antecedente della prima ragione più o meno il suo conseguente sta al conseguente, come l'antecedente della seconda ragione più o meno il suo conseguente sta a questo conseguente. Sia la proporzione $a:b=c:d$

avremo $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Aggiungendo e togliendo l'unità ad ambedue i membri sarà

$$\frac{a}{b} \pm 1 = \frac{c}{d} \pm 1, \text{ ossia } \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d},$$

dalla quale $a \pm b : b = c \pm d : d$, che dimostra la proposizione enunciata. Se nell'operazione antecedente si fa la somma si dice *comporre la proporzione*: se si fa la sottrazione si dice *dividere la proporzione*.

160. Se l'uguaglianza $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si cambia in $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$, e poi ad ambedue i membri si aggiunga e si tolga uno,

avremo $\frac{b \pm a}{a} = \frac{d \pm c}{c}$ o $\frac{a}{b \pm a} = \frac{c}{d \pm c}$; ossia $a:b \pm a = c:d \pm c$:

dunque in una proporzione si può fare ancora. *Antecedente della prima ragione sta al suo conseguente più o meno l'antecedente, come l'antecedente della seconda ragione sta al suo conseguente più o meno lo stesso antecedente.*

161. In una proporzione geometrica i due termini di un rapporto si possono moltiplicare, e dividere per una stessa quantità senzachè cambi il rapporto, e quindi la proporzione, perchè il rapporto è sempre un quoto, e questo non cambia col moltiplicare e dividere il dividendo, ed il divisore per la stessa quantità.

162. Quando in una proporzione geometrica due quantità sono fra loro come i prodotti di più altre, le due prime si dicono *in ragione composta di tutte queste.*

Abbiamo veduto nell'aritmetica, che essendo C, c due capitali, ed F, f i frutti, che danno nei tempi T, t , abbiamo la proporzione $F:f = CT:ct$: dunque i frutti sono come i prodotti dei loro capitali, e dei tempi, in cui sono tenuti a frutto: si dirà dunque, che i frutti sono in ragione composta dei capitali, e dei tempi, in cui sono tenuti a frutto.

163. Dalla nostra proporzione ricaviamo $Fct = fCT$. Da questa uguaglianza possiamo trovare tante proporzioni per quante uguaglianze di quoti possiamo da essa ricavare. Dividendo la detta uguaglianza per Ft abbiamo $\frac{c}{fT} = \frac{C}{fT}$.

Dividendo per FfC sarà $\frac{t}{fC} = \frac{T}{fC}$. Da queste due uguaglianze di quoti avremo

$$c:fT = C:fT; \quad t:fC = T:fC$$

ossia alternando

$$c:C = fT:fT, \quad t:T = fC:fC.$$

Se si osserva la prima di queste proporzioni si vede, che nei prodotti fT , Ft i fattori f , F corrispondono di luogo a c , C , che sono nel primo rapporto, ma T , t sono inversamente posti: perciò si dice, che i capitali sono in ragione composta diretta dei frutti, ed inversa dei tempi, in cui i capitali sono tenuti a frutto. Per la stessa ragione osservando la seconda proporzione si dirà, che i tempi, in cui sono tenuti a frutto i capitali, sono in ragione composta diretta dei frutti ed inversa dei capitali. Nella proporzione poi stabilita $F:f = CT:ct$ corrispondendo di luogo i capitali, ed i tempi ai loro rispettivi frutti posti nella prima ragione, si dirà, che i frutti sono in ragione composta diretta dei loro capitali, e dei tempi in cui questi sono tenuti a frutto.

164. Nella proporzione $c:C = fT:Ft$ si dividano i due termini della seconda ragione per Tt avremo

$$c:C = \frac{f}{t} : \frac{F}{T}.$$

Sotto questo aspetto si vede più distinto, che i capitali sono in ragione composta diretta dei frutti, ed inversa dei tempi, perchè al crescere dei frutti crescono i numeratori, ed al crescere dei tempi crescono i denominatori: quindi nel primo caso crescendo i due termini del secondo rapporto, e nel secondo questi decrescendo, crescono e decrescono per lo stesso motivo i due termini del primo rapporto.

165. Dalla uguaglianza $Fct = fCT$ abbiamo ricavato la proporzione $c:C = fT:Ft$. Di qui potremo dare la regola per dedurre una proporzione da una uguaglianza. Si dirà: *Un fattore del primo membro sta ad un fattore del secondo membro come il prodotto di tutti gli altri fattori del secondo membro sta al prodotto di tutti i fattori del primo, eccetto quello già preso.*

Infatti confrontando la superiore uguaglianza e proporzione, si ottiene questa da quella se si scrive; e fattore del primo membro sta ad C fattore del secondo come $\sqrt{T}$ prodotto di tutti gli altri fattori del secondo membro sta al prodotto di tutti i fattori del primo tolto c già preso.

166. Nell'aritmetica generale si suole esprimere, che una quantità è in ragione diretta, o inversa di un'altra; per esempio, che il frutto di un capitale è in ragione diretta del tempo in cui lo stesso capitale si tiene a frutto, perchè se il tempo diventi doppio, triplo ec. o la metà, il terzo ec., il detto capitale dà un frutto doppio, triplo, o la metà, il terzo ec. del frutto primitivo: dunque il quoto del frutto, e del tempo deve essere costante, perchè in questo caso come cresce e decresce per moltiplicazione o divisione il dividendo, allo stesso modo deve crescere e decrescere il denominatore, onde il loro quoto sia lo stesso. Se dunque con F , e T si esprima il frutto d'un capitale qualunque, ed il tempo in cui questo è tenuto a frutto, ed indichi r un quoto, o una ragione costante fra F e T , l'uguaglianza $\frac{F}{T} = r$ esprimerà che F è in ragione diretta di T .

167. Si dice ancora, che il capitale è in ragione inversa del tempo in cui è tenuto a frutto per dare un frutto determinato, perchè più grande si rende il capitale e meno tempo deve tenersi a frutto, onde dare il frutto fisso. Ora se fatto il prodotto del capitale C pel tempo T , questo prodotto si fa uguale ad un valore fisso v , onde sia $CT=v$ si vede, che se per esempio si triplica C , il tempo T deve diventare un terzo, affinchè malgrado questi cambiamenti il prodotto CT rimanga di valor fisso v .

168. Se una quantità è in ragione composta di altre quantità, diretta delle une, ed inversa delle altre, in tal caso si moltiplicherà la prima per quelle quantità, colle quali è in ragione inversa, ed il prodotto si dividerà per le altre

colle quali è in ragione diretta, e tutto il risultamento si farà uguale ad una costante. Sapendosi per es., che il capitale è in ragione composta diretta del frutto, ed inversa del tempo, in cui è tenuto a frutto, si porrà $\frac{CT}{F} = v$,

essendo v un valore costante, mentre cambiano le tre quantità C , T , F in guisa, che esso rimanga costante.

Andiamo alle progressioni aritmetiche, e geometriche.

169. *La progressione aritmetica, e geometrica è una serie di termini, fra ognuno de' quali, e l'antecedente vi è lo stesso rapporto.* Se il rapporto è aritmetico, la progressione si dice aritmetica, se è geometrico si dice geometrica.

170. Nella progressione aritmetica se il detto rapporto è positivo si dice *la progressione crescente*; se è negativo si dice *decescente*.

Nella progressione geometrica se il rapporto comune ai termini è intero, o frazione mista, *la progressione si dice crescente*, se è frazione si dice *decescente*.

171. Sia a il primo termine della progressione aritmetica formata di n termini, avremo, che

$$a, a \pm d, a \pm 2d, a \pm 3d, a \pm 4d \dots a \pm (n-2)d, a \pm (n-1)d$$

esprime ambedue le progressioni crescente, e decrescente.

172. Se la progressione geometrica ha per primo termine a , per rapporto q , ed è formata di n termini sarà rappresentata da

$$a, aq, aq^2, aq^3 \dots aq^{n-2}, aq^{n-1} :$$

nella quale se q sia un intero, o frazione mista la progressione sarà crescente, se sarà frazione la progressione sarà decrescente.

Nelle progressioni aritmetiche, e geometriche cinque sono le quantità delle quali alcune date si sogliono domandare le altre: cioè il primo, l'ultimo termine, la ragione, la somma della progressione, ed il numero de' termini.

Ora per ambedue le progressioni si può stabilire la proposizione.

173. *Nella progressione aritmetica, e geometrica fra le cinque dette quantità esistono due equazioni, e quindi date tre di esse, si possono determinare le altre due.*

Per dimostrar ciò supponiamo, che nelle due progressioni si conosca il primo termine, la ragione, ed il numero de' termini, necessariamente vengono l'ultimo termine, e la somma della progressione. Infatti se nella progressione aritmetica al primo termine successivamente si aggiunga la differenza, e nella progressione geometrica il primo termine si moltiplichi successivamente per la ragione finchè si compia il numero dato de' termini, avremo il primo, il secondo, il terzo termine ec. fino all'ultimo termine, e quindi si avrà anche la somma della progressione. È poi evidente, che se al primo termine si sarà aggiunta la ragione aritmetica tante volte quanto è il numero de' termini diminuito d'una unità si avrà l'ultimo termine. Nella progressione geometrica poi l'ultimo termine si avrà, se il primo si moltiplichi per la ragione ripetuta come fattore il numero de' termini diminuito d'una unità : nell'uno e nell'altro caso la ragione della progressione nell'ultimo termine si ripete pel numero de' termini meno uno, perchè nel primo termine non si pone questa ragione: dunque nell'una, e nell'altra progressione si ottiene la somma della progressione, e l'ultimo termine quando si abbia il primo, la ragione, ed il numero de' termini. Da ciò si ricava, che per trovare queste due incognite si debbono avere due equazioni, nelle quali vi debbono essere collegate le cinque quantità primo, ultimo termine, numero de' termini, ragione, e somma della progressione, colle quali equazioni poi date tre delle dette quantità si possono trovare le altre due.

174. *Nella progressione aritmetica sia a il primo termine, u l'ultimo, d la ragione, n il numero de' termini,*

ed s la somma, avremo, per ciò che si è detto, per l'ultimo termine l'equazione

$$u = a + (n - 1)d$$

175. Per la somma della progressione sommando la progressione (§. 171.) sarà

$$s = a + a + d + a + 2d + a + 3d \dots + a + (n-2)d + a + (n-1)d$$

e sommando la serie rovesciata sarà

$$s = a + (n-1)d + a + (n-2)d \dots + a + 3d + a + 2d + a + d + a.$$

Se si sommano queste due uguaglianze sommando nei secondi membri il termine superiore col termine inferiore corrispondente per es. a con $a + (n - 1)d$; $a + d$ con $a + (n - 2)d$, e così fino agli ultimi $a + (n - 2)d$ con $a + d$; $a + (n - 1)d$ con a , troveremo tutte queste somme uguali a $2a + (n - 1)d$, cioè alla somma del primo coll'ultimo termine, e queste somme saranno di numero n ,

dunque $2s = (a + u)n$, ed $s = (a + u) \frac{n}{2}$.

176. Quindi le due equazioni domandate per la progressione aritmetica sono

$$u = a + (n - 1)d \quad (a)$$

$$s = (a + u) \frac{n}{2} \quad (b)$$

177. Nella progressione geometrica sarà evidentemente $u = aq^{n-1}$. Per avere l'altra equazione si sommi la progressione (§. 172.) sarà

$$s = a + aq + aq^2 + aq^3 \dots aq^{n-2} + aq^{n-1},$$

e moltiplicandola per q sarà

$$qs = aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 \dots aq^{n-1} + aq^n.$$

Si sottragga dalla seconda la prima uguaglianza, e si av-

verta, che del secondo membro della prima rimane a , e del secondo membro della seconda rimane aq^n , sarà dunque

$$qs - s = aq^n - a, \quad \text{o} \quad s(q - 1) = a(q^n - 1)$$

$$\text{ed} \quad s = a \left(\frac{q^n - 1}{q - 1} \right).$$

178. Questa equazione si può trovare in una maniera più diretta, se si stabilisca l'uguaglianza

$$(M) \frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + a^{n-4}b^3 \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}.$$

Questa si prova moltiplicando il secondo membro per $a - b$ e mostrando, che il risultamento è $a^n - b^n$. Si può anche provare coll' analogia mostrando, che come abbiamo

$$\frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b, \quad \frac{a^3 - b^3}{a - b} = a^2 + ab + b^2, \quad \frac{a^4 - b^4}{a - b} =$$

$$a^3 + a^2b + ab^2 + b^3, \quad \frac{a^5 - b^5}{a - b} = a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4,$$

così esiste l'uguaglianza stabilita (M).

Se in questa uguaglianza (M) si pone

$$b=1, \text{ ed } a=q \text{ sarà } \frac{q^n - 1}{q - 1} = q^{n-1} + q^{n-2} + q^{n-3} \dots + q^2 + q + 1:$$

Ora abbiamo

$$s = a + aq + aq^2 + aq^3 \dots + aq^{n-2} + aq^{n-1} = \\ a(1 + q + q^2 + q^3 \dots + q^{n-2} + q^{n-1});$$

ponendo dunque invece della quantità fra parentesi il suo

$$\text{valore } \frac{q^n - 1}{q - 1}, \text{ sarà } s = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}.$$

179. Dopo ciò per le progressioni geometriche abbiamo l'equazioni

$$(A) \quad u = aq^{n-1}; \quad (B) \quad s = a \left(\frac{q^n - 1}{q - 1} \right).$$

Per mezzo dell' equazioni (a), (b) (§. 176.) per le progressioni aritmetiche, e delle (A), (B) (§. 179.) per le geometriche si possono risolvere tutti i problemi, nei quali date tre delle cinque quantità, che vi entrano, si domandano le altre due.

180. Se per esempio si dicesse fra a , ed u inserite m termini in progressione aritmetica; è evidente, che per risolvere il problema, si dovrebbe trovare la differenza d . A ciò vale l'equazione $u = a + (n - 1) d$, dalla quale abbiamo $d = \frac{u-a}{n-1}$.

Nel nostro caso il numero de' termini è $m + 2$; dunque fatto $n = m + 2$ sarà $d = \frac{u-a}{m+1}$. Ora se questa differenza successivamente si aggiunga al primo termine a finchè si ottenga u , avremo i termini domandati in progressione aritmetica.

181. Se si volesse risolvere lo stesso problema nella progressione geometrica, e tra a , ed u si volessero m termini in questa progressione, si dovrebbe prendere l'equazione $u = aq^{n-1}$, e postovi $n = m + 2$, si dovrebbe dall'equazione $aq^{m+1} = u$, o da $q^{m+1} = \frac{u}{a}$ ricavare il valore di q : ma ciò non si può fare, perchè non si sa passare dal valore di una quantità coll'esponente q^{m+1} a quello della quantità semplice q .

182. Così ancora se si domandasse il numero de' termini in una progressione aritmetica, della quale si conosce il primo termine a , la differenza d , e la somma s , dalle due equazioni (a), (b) (§. 176.) si dovrebbe eliminare

la u , e si troverebbe $n^2 + \frac{(2a-d)}{d} n = \frac{2s}{d}$, equazione, che non si sa risolvere a causa che n ha l'esponente 2.

183. Si abbia $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h}$ ec., cioè una serie di rapporti uguali; dico, che sarà $\frac{a+c+e+g \text{ ec.}}{b+d+f+h \text{ ec.}} = \frac{e}{f}$, cioè in una serie di rapporti uguali, la somma dei numeratori dei rapporti divisa per la somma dei denominatori è uguale ad uno qualunque dei rapporti. Infatti dicendo r il valore dei dati rapporti sarà $a=br$, $c=dr$, $e=fr$, $g=hr$ ec.; e sommando $a+c+e+g \text{ ec.} = (b+d+f+h \text{ ec.})r$, $\frac{a+c+e+g \text{ ec.}}{b+d+f+h \text{ ec.}} = r = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ ec.

184. Se $b=c$, $d=e$, $f=g$ ec. avremo

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{d} = \frac{d}{f} = \frac{f}{h} \text{ ec. ,}$$

e le quantità a, b, d, f ec. saranno in progressione geometrica, perchè fra i termini vi è la stessa ragione: dunque in questo caso il teorema antecedente darà

$$\frac{a+b+d+f \text{ ec.}}{b+d+f+h \text{ ec.}} = \frac{a}{b} .$$

Se si osserva il numeratore, si vedrà, che è la somma di tutti i termini della progressione meno l'ultimo termine, e che il denominatore è la somma di tutti i termini meno il primo: dunque nella progressione geometrica avremo il teorema. *La somma di tutti i termini meno l'ultimo sta alla somma di tutti i termini meno il primo, come un termine qualunque al suo seguente; come per esempio il primo termine della progressione al secondo.*

185. Essendo s la somma della progressione, a il primo

termine, u l'ultimo, q la ragione, e perciò aq il secondo termine, avremo la proporzione $s - u : s - a = a : aq$; di qui $saq - aqu = sa - a^2$, $saq - sa = aqu - a^2$, ed $s = \frac{qu - a}{q - 1}$; ma $u = aq^{n-1}$, dunque

$$s = \frac{aq^n - a}{q - 1} = a \frac{(q^n - 1)}{q - 1},$$

come abbiamo avuto con due altre dimostrazioni.



ESERCIZI DELLE PROGRESSIONI ARITMETICHE.



Il sesto termine della progressione $\frac{2}{3}, \frac{7}{15}, \frac{4}{15}$ ec. è $-\frac{1}{3}$, e la somma di 6 termini è 1.

Il termine n^{mo} di $\frac{1}{3}, \frac{5}{6}, \frac{4}{3}$ ec. è $\frac{n}{2} - \frac{1}{6}$, e la somma di n termini è $\frac{n}{12} + \frac{n^2}{4}$.

Il termine n^{mo} della serie $\frac{n-1}{n}, \frac{n-2}{n}, \frac{n-3}{n}$ ec. è zero, e la somma di n termini è $\frac{n-1}{2}$.

La somma di n termini della progressione $\frac{a-b}{a+b}, \frac{3a-2b}{a+b}$ ec. è $\left(na - \frac{1}{2}(n+1)b \right) \frac{n}{a+b}$.

Se il primo termine è $n^2 - n + 1$, e la differenza è 2, provate, che la somma di n termini è n^3 .

Si ha un numero p di progressioni aritmetiche, che tutte cominciano con 1, e le differenze delle quali sono 1, 2, 3... p ;

dimostrare, che la somma de' loro n^{mi} termini è

$$\frac{1}{2} [(n-1)p^2 + (n+1)p].$$

Essendo s' , s'' , $s''' \dots s^{(p)}$ le somme di p progressioni aritmetiche tutte di numero n di termini, che cominciano con 1, 2, 3 ec. e che hanno per differenze 1, 3, 5 ec. provare l'uguaglianza

$$s' + s'' + s''' \dots s^{(p)} = \frac{1}{2} np (np + 1).$$

Se i termini p^{mo} , q^{mo} di una progressione sono P , Q , provare, che il primo termine è $\frac{Q(p-1) - P(q-1)}{p-q}$, e che la somma di n termini è

$$\frac{1}{2} n \left(\frac{Q(2p - n - 1) - P(2q - n - 1)}{p - q} \right).$$

Determinare la relazione fra a , b , c in guisa, che siano i termini p^{mo} , q^{mo} , r^{mo} di una progressione aritmetica.

Risposta. $(q-r)a + (r-p)b + (p-q)c = 0$.

Se la somma di m medj aritmetici fra 1, e 19 è alla somma degli $m-2$ primi termini di questi come 5:3, provare, che il loro numero è 8.

Vi sono m medj aritmetici fra 1 e 31, ed il settimo sta all' $(m-1)^{\text{mo}}$ come 5 sta a 9; dimostrate, che il loro numero è 14.

In una progressione aritmetica se il termine $(p+q)^{\text{mo}} = m$, e quello $(p-q)^{\text{mo}} = n$, allora il termine p^{mo} è $\frac{1}{2}(m+n)$, ed il q^{mo} è uguale ad $m - \frac{1}{2}(m-n) \frac{p}{q}$.

Se $s^{(n)}$, $s^{(n+1)}$, $s^{(n+2)}$ ec. indicano la somma di n , $n+1$, $n+2$ ec. termini di una progressione aritmetica, provate, che $s^{(n)} + s^{(n+1)} + s^{(n+2)}$ ec. fino ad n termini è

$$= n(3n-1) \frac{a}{1.2} + n(n-1)(7n-2) \frac{d}{1.2.3}.$$

Se s' , s'' , s''' ec. $s^{(2n)}$ sono le somme di n termini di $2n$ progressioni aritmetiche, i di cui primi termini siano gli stessi, e le ragioni delle progressioni sono d , $2d$, $3d$ ec. ... $2nd$, avremo

$$(s' + s'' + s''' \dots + s^{(2n)}) - (s' + s'' + s''' \dots + s^{(2n-1)}) = \frac{1}{2} n^2 (n-1) d.$$

Provate, che $a'a'' + a''a''' \dots + a^{(n-1)} a^{(n)}$ può essere sempre espressa con finiti termini quando a' , a'' , a''' sono in progressione aritmetica.

Se $s^{(m)}$ indica la somma di m termini di una progressione aritmetica, avremo $s^{(n)2} = \frac{1}{2} n(n-1) s^{(2n)} - n(n-2) s^{(n)}$.

Se $s^{(n)}$ indica la somma di n termini in una progressione aritmetica provate

$$(q-r) qrs^{(pm)} + (r-p) prs^{(qm)} + (p-q) pqs^{(rm)} = 0.$$



ESERCIZI PER LE PROGRESSIONI GEOMETRICHE.



Il termine n^{mo} di $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4}$ ec. è $\frac{3^{n-2}}{2^{n-1}}$, e la somma di n termini è $\frac{1}{3} \left(\frac{3^n - 2^n}{2^{n-1}} \right)$.

Il termine n^{mo} della serie $\frac{1}{5} - \frac{2}{15} + \frac{4}{45}$ ec. è $\pm \frac{2^{n-1}}{5 \cdot 3^{n-1}}$, e la somma di n termini è $\frac{1}{25} \left(\frac{3^n \mp 2^n}{3^{n-1}} \right)$.

La somma della serie indefinita $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}$ ec. è $\frac{3}{2}$.

N. B. Quando si dice serie indefinita, e questa sia decrescente, s'intende, che l'ultimo termine si può considerare zero. Se è crescente, l'ultimo supera così tutti gli altri, che questi si possono trascurare.

La somma di $\frac{3}{2}, -1, \frac{2}{3}, -$ ec., indefinita serie è $\frac{9}{10}$.

La somma dell'indefinita $2 + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{10}$ ec. è $3 + \frac{1}{8}$.

La somma della serie indefinita $1, -2x, 2x^2, -2x^3$ ec.

$$\text{è } \frac{1-x}{1+x}.$$

Dimostrate, che in una qualunque progressione geometrica formata d'un numero dispari di termini, la somma dei quadrati di tutti i termini è uguale alla somma di tutti i termini moltiplicata per l'eccesso dei termini dispari sopra i pari.

Provate, che in qualunque progressione geometrica la somma del primo, e dell'ultimo termine è maggiore della somma di qualunque altro paio di termini equidistanti dagli estremi.

Fate vedere, che in una qualunque progressione geometrica di un numero pari di termini la somma dei termini dispari è alla somma dei pari come $1 : r$.

Se $s', s'', s''' \dots s^{(n)}$ sono le somme di un numero n di progressioni geometriche, i primi termini delle quali siano $a, 2a, 3a \dots na$, si ha

$$s' + s'' + s''' + \dots s^{(n)} = \frac{n(n+1)}{2} \left(\frac{r^n - 1}{r - 1} \right) a.$$

Se a, b, c, d ec. sono n quantità in progressione geometrica: allora $\frac{1}{a^2 - b^2}, \frac{1}{b^2 - c^2}, \frac{1}{c^2 - d^2}$ ec. sono in progressione geometrica, e la somma di n termini sarà

$$\frac{1}{b^{2(n-1)}} \frac{a^{2n} - b^{2n}}{(a^2 - b^2)^2}.$$

Se vi sono n quantità in progressione geometrica, che ha r per ragione de' termini, ed $s^{(m)}$ indica la somma de' suoi m primi termini, provate, che la somma de' loro prodotti presi a due a due è $\frac{r}{r+1} s^{(n)} s^{(n-1)}$.

Se s è la somma di n termini di una progressione geometrica, i di cui primi termini sono $f^{(1)}, f^{(2)}, f^{(3)}, f^{(4)} \dots f^{(n)}$ indicano le somme dei primi due, tre, quattro ec. termini,

avremo

$$(s + f^{(1)}) + (s + f^{(2)}) + \text{ec.} \Rightarrow \frac{f^{(1)}}{r-1} \left(n(r^n - 2) + \frac{r}{r-1} (r^n - 1) \right).$$

Se $s = (x - y) + \left(\frac{y^2}{x} - \frac{y^3}{x^2} \right) + \text{ec.}$ fino ad n termini,
ed S indica la somma indefinita, sarà $s : S = x^{2n} - y^{2n} : x^{2n}$.

Se $S^{(1)}$ rappresenta la somma di una indefinita progressione geometrica, $S^{(2)}$ la somma de' termini moltiplicati una volta in se stessi, $S^{(3)}$ la somma de' termini moltiplicati due volte in se stessi, e così di seguito sarà $\frac{1}{S^{(1)}} \pm \frac{1}{S^{(2)}} + \frac{1}{S^{(3)}} \pm \text{ec.}$

$$\text{all' indefinito} = \frac{1}{a-1} - \frac{r}{a-r}.$$

Se $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, $S^{(3)}$. . . $S^{(n)}$ sono le somme di n indefinite progressioni geometriche, il primo termine delle quali essendo 1,

le ragioni sono $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{r^2}$, $\frac{1}{r^3}$. . . $\frac{1}{r^n}$ sarà

$$\frac{1}{S^{(1)}} + \frac{1}{S^{(2)}} + \frac{1}{S^{(3)}} \dots + \frac{1}{S^{(n)}} = n - \frac{r^n - 1}{r^n(r-1)}.$$

Se $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, $S^{(3)}$ ec. indicano le somme d' un indefinito numero d' indefinite progressioni geometriche, i di cui primi termini sono a , a^2 , a^3 ec. e le ragioni r , $2r$, $3r$, ec. sarà

$$\frac{1}{S^{(1)}} + \frac{1}{S^{(2)}} + \frac{1}{S^{(3)}} + \text{ec.} = \frac{a(1-r) - 1}{(a-1)^2}.$$

Se a , b , c , d sono in progressione geometrica, provate, che $(a+3b+3c+d)bc = (b+c)^3$, e che $(a+b+c+d)^2 = (a+b)^2 + (c+d)^2 + 2(b+c)^2$.

Il termine n^{mo} di 2, 6, 14, 30 ec. è $2^{n+1} - 2$, e la somma di n termini è $2^{n+2} - (2n+4)$.

Il termine n^{mo} di 4, 10, 28, 82 ec. è $3^n + 1$, e la somma di n termini è $\frac{1}{2} 3^{n+1} + n - \frac{3}{2}$.

Il termine n^{mo} della progressione 3, 6, 11, 20 ec. è $2^n + n$,
e la somma di n termini è $2^{n+1} + \frac{1}{2}(n^2 + n - 4)$.

Se S è la somma, ed $S^{(2)}$ la somma dei quadrati dei termini di una progressione indefnita di termini sarà

$$a = \frac{2S S^{(2)}}{S^2 + S^{(2)}} \text{ ed } r = \frac{S^2 - S^{(2)}}{S^2 + S^{(2)}}.$$



ALGEBRA

1. Dall'espressioni generali delle quantità nell'Aritmetica generale si sono vedute sorgere quantità cogli esponenti, perchè nell'aritmetica dei numeri cotali quantità non s'incontrano. Infatti si dice a^3 , b^4 ec. non si dice 2^3 , 3^4 ec., perchè 2^3 essendo 2.2.2 si scrive piuttosto il suo valore più chiaro 8; ed invece di 3^4 si dice 81.

2. Nella teoria delle progressioni aritmetiche, ed in quella delle proporzioni, e progressioni geometriche sono occorsi dei problemi, nei quali era necessario di passare dai valori delle quantità cogli esponenti a quelli delle semplici quantità. Così essendo a, d due quantità, se si voleva il loro medio proporzionale geometrico, si doveva risolvere l'equazione $b^2=ad$, nella quale dal valore di b^2 si doveva passare al valore di b : si richiedeva dunque una operazione per ricavare tal valore da bd .

3. Essendosi poi proposto il problema (A.G. §.182.) di trovare nella progressione aritmetica il numero de' termini cognita la differenza, il primo termine, e la somma, per l'equazione destinata alla soluzione del problema si è avuto

$$n^2 + \frac{(2a-d)}{d} n = \frac{2s}{d} ,$$

della quale si doveva ricavare il valore di n : ma ciò non

si poté fare, perchè non si conosceva il metodo di passare dal valore del quadrato della quantità n al valore della quantità semplice.

4. Finalmente nelle progressioni geometriche dato il problema, trovare fra a ed u un numero $n-2$ di termini, si doveva per mezzo dell'equazione (A.G. §. 177.) $u = aq^{n-1}$ ricavare il valore di q da $q^{n-1} = \frac{u}{a}$; cioè conoscendosi il valore $\frac{u}{a}$ della quantità q coll'esponente $n-1$ si doveva da questo ricavare il valore della semplice q .

5. Ecco dunque la necessità di un trattato, nel quale si diano i metodi per passare dai valori delle quantità cogli esponenti a quelli delle quantità semplici. Ciò richiede, che prima si dimostrino le proprietà, e si diano metodi di operazioni riguardanti le quantità coll'esponente. Questo trattato delle quantità cogli esponenti, e dei metodi, onde passare dai loro valori a quelli delle quantità semplici sarà chiamato da noi ALGEBRA. Da ciò si vede, che come dai bisogni dell'Aritmetica abbiamo ricavato l'Aritmetica generale, così da quelli dell'Aritmetica generale ricaviamo l'Algebra.

6. E qui sul primo stabiliremo, che la ripetizione d'una quantità un certo numero di volte come fattore si chiama *la potenza della quantità*, ed il numero delle volte, che è ripetuta si chiama *il grado della potenza*. La quantità poi si dice *la radice della potenza*, ed è del grado stesso, che è la potenza. Quindi a^3 , b^5 saranno le potenze di a , e di b , perchè vengono dal ripetere a , b come fattori; e saranno potenze *del grado terzo, e quinto, o potenza terza, e quinta*, perchè in a^3 la a è ripetuta tre volte come fattore, e b in b^5 è ripetuto cinque volte. Le quantità poi a , b sono le radici di a^3 , b^5 , ed a è la radice terza di a^3 , e b la radice quinta di b^5 .

7. Se si abbia a^8 , questa sarà la potenza ottava di a , la potenza quarta di a^2 , e la potenza seconda di a^4 , per-

ché a ripetuta otto volte come fattore, a^2 ripetuta quattro volte come fattore, ed a^4 ripetuta due volte danno a^8 . Reciprocamente a sarà la radice ottava di a^8 ; a^2 la radice quarta di a^8 ; ed a^4 la radice seconda di a^8 .

8. Per esprimere, che a^8 è la potenza quarta di a^2 , e seconda di a^4 si scrive $(a^2)^4 = a^8$, $(a^4)^2 = a^8$. Si dice poi nel primo caso *elevare a^2 alla quarta potenza*, e nel secondo *elevare a^4 alla potenza seconda*.

9. Da ciò che si è detto si ricava, che *elevare una quantità ad una data potenza è ripetere le quantità come fattore tante volte quanto è il grado, o il numero esprimente la potenza*. Si vede poi, che in questa ripetizione come fattore, la quantità si moltiplica tante volte in se stessa meno una quanto è il grado della potenza. Si ripete poi una volta di meno, del grado della potenza, o del numero delle volte, che è ripetuta come fattore, perchè nella prima moltiplicazione già la quantità è ripetuta due volte.

10. Se dunque si proponesse di elevare a^3 alla quarta potenza, questa quantità si dovrebbe moltiplicare in se stessa 3 volte, con che si ripeterebbe quattro volte come fattore, e l'uguaglianza $(a^3)^4 = a^{12}$ enuncierebbe, ed eseguirebbe l'innalzamento di a^3 alla quarta potenza.

11. Per esprimere che a^3 è la radice quarta di a^8

si scrive $\sqrt[4]{a^8} = a^2$. Il segno $\sqrt$ si legge *radice*, il numero 4 posto nell'apertura del segno radicale è il grado della radice, e la nostra uguaglianza si legge; *radice quarta di*

a^8 *uguale* a^2 . Così $\sqrt[5]{a^{20}} = a^4$ si legge; *radice quinta di a^{20} uguale a^4* . Questo a^4 è poi la radice quinta di a^{20} , perchè elevato alla quinta potenza, o moltiplicato in se stesso quattro volte dà a^{20} .

12. Dunque *la radice di una quantità di un dato grado è quella, che elevata a questo grado dà la quantità proposta*. Così a^4 è la radice settima, o del grado settimo di a^{28} ,

perchè a^4 elevata a questo grado, o moltiplicata in se stessa 6 volte dà a^{28} ; quindi si scrive $\sqrt[7]{a^{28}} = a^4$. Così ancora 2 è la radice quarta di 16, perchè 2 elevato alla quarta potenza, o moltiplicato in se stesso 3 volte dà 16, e si scrive $\sqrt[4]{16} = 2$. Per la stessa ragione sarà

$$\sqrt[3]{8} = 2, \quad \sqrt[4]{81} = 3.$$



CAPO PRIMO

DELLE POTENZE E RADICI SECONDE.



13. La potenza seconda di una quantità si dice il quadrato della quantità, perchè a^2 , che è la seconda potenza di a , è stato chiamato (A.G. §. 53.) il quadrato di a : quindi a^4 , a^6 , a^{12} saranno i quadrati di a^2 , a^3 , a^6 .

14. Essendo a^2 , a^3 , a^6 le radici seconde di a^4 , a^6 , a^{12} si dicono le radici quadrate di queste quantità. Ciò si esprime scrivendo $\sqrt{a^{12}} = a^6$, $\sqrt{a^6} = a^3$, $\sqrt{a^4} = a^2$; ove si vede, che essendo la radice seconda non si scrive l'esponente nell'apertura della radice, e ciò per convenzione, e per questa ancora si legge semplicemente, radice di a^{12} , senza dire radice seconda o quadrata di a^{12} .

15. La radice quadrata d'una quantità può essere positiva, e negativa. Infatti elevando le quantità $a-b$, e $b-a$ alla seconda potenza o moltiplicandole in se stesse danno lo stesso risultamento $a^2 - 2ab + b^2$: dunque

$$\sqrt{a^2 - 2ab + b^2} = a - b$$

$$\sqrt{a^2 - 2ab + b^2} = b - a,$$

ove si avverta, che essendo $a^2 - 2ab + b^2$ un polinomio si chiude fra parentesi. Si scrive ancora $\sqrt{a^2 + 2ab + b^2}$. Ora una delle due $a - b$, $b - a$ è negativa essendo l'altra positiva: dunque esprimendo la positiva con c , e la quantità $a^2 - 2ab + b^2$ positiva con A , si può scrivere

$$\sqrt{A} = \pm c;$$

dunque la radice seconda di una quantità positiva ha doppio segno.

16. Se si domanda la radice quadrata di una quantità negativa, questa non esiste, perchè questa radice non è nè quantità positiva, nè negativa, essendosi veduto, che ambedue le quantità $a - b$, $b - a$ una positiva, e l'altra negativa moltiplicate in se stesse danno lo stesso risultamento, che deve essere positivo a causa che una delle dette quantità $a - b$, $b - a$ è positiva. Quindi la radice di una quantità negativa si dice *radice immaginaria*.

17. Una quantità o positiva o negativa elevata alla seconda potenza dà il positivo, $(\pm b)^2 = b^2$. Ciò risulta dal (§. 15.).

18. Un prodotto di più fattori si eleva alla seconda potenza elevando ciascun fattore. Così $(abcd)^2 = a^2 b^2 c^2 d^2$; ciò si prova moltiplicando il prodotto $abcd$ in se stesso, con che ognun fattore si ripete due volte.

19. Così ancora una quantità col coefficiente si eleva moltiplicando il coefficiente in se stesso. Quindi $(5ab)^2 = 25a^2 b^2$; $(7acd)^2 = 49a^2 c^2 d^2$. Si prova ciò moltiplicando in se stessi $5ab$, $7acd$.

20. Una quantità coll'esponente si eleva al quadrato moltiplicando per 2 gli esponenti dei fattori. Così $(a^2 b^3 c^4)^2 = a^4 b^6 c^8$. Ciò si prova al solito moltiplicando in se stesso $a^2 b^3 c^4$.

21. Nell'estrazione della radice quadrata da un prodotto di più fattori, e che abbia coefficiente, si estrae dal coefficiente, e da ciascun fattore. Così $\sqrt{16a^2 b^2 c^2} = 4abc$. Infatti $4abc$ moltiplicato in se stesso da $16a^2 b^2 c^2$.

22. L' estrazione della radice quadrata da una quantità coll'esponente, si effettua dividendo questo esponente per 2. Così $\sqrt{a^4 b^{12} c^{20}} = a^2 b^6 c^{10}$, perchè elevata questa alla seconda potenza dà $a^4 b^{12} c^{20}$.

23. Quando la radice non si può estrarre, si esprime col segno della radice, e questa espressione si chiama *radicale*. Quindi $\sqrt{a}$, $\sqrt{abc}$, $\sqrt{a^3}$, $\sqrt{a^5 bd}$ sono radicali; sono anche radicali $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$: quindi il radicale è l'espressione d'una radice, che non si può estrarre.

24. Il radicale $\sqrt{abc}$ può esprimersi per $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c}$; lo che si esprime dicendo, che la radice d'un prodotto è uguale al prodotto delle radici dei fattori.

Infatti il prodotto $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c}$ sarà la radice di abc se elevato alla seconda potenza dà abc : ma elevando il prodotto $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c}$ si deve elevare ciascun fattore, e la seconda potenza elide la seconda radice: dunque abbiamo appunto abc .

25. Da ciò si ricava il metodo di portar fuori ciò che si può da un radicale. Infatti sia $\sqrt{a^5}$. Questo è lo stesso, che $\sqrt{a^4} \cdot a = \sqrt{a^4} \cdot \sqrt{a}$ pel teorema antecedente: ma $\sqrt{a^4} = a^2$, dunque $\sqrt{a^5} = a^2 \sqrt{a}$. Similmente

$$\sqrt{a^7 b^9 c^{11}} = \sqrt{a^6 b^8 c^{10}} \cdot abc = \sqrt{a^6 b^8 c^{10}} \sqrt{abc} = a^3 b^4 c^5 \sqrt{abc}.$$

Sia anche

$$\sqrt{18a^3} = \sqrt{9a^2 \cdot 2a} = 3a\sqrt{2a}.$$

$$\sqrt{54a^{17} b^{13}} = \sqrt{9a^{16} b^{12}} \sqrt{6ab} = 3a^8 b^6 \sqrt{6ab}.$$

26. Di qui viene la regola pratica per portar fuori un moltiplicatore, che è dentro il radicale. *Dividete l'esponente del moltiplicatore per l'esponente due della radice, il quoto datelo alla quantità, che aveva l'esponente totale, e portatelo fuori; il residuo 1 datelo alla stessa quantità, e lasciatela a moltiplicare sotto il segno della radice. Se vi è coefficiente spez-*

zatele, se si può, in due fattori, da uno de' quali si possa estrarre la radice seconda: allora estraetela, e portatela fuori del segno radicale, e lasciate l'altro fattore ad essere coefficiente sotto lo stesso segno.

Sia anche $\sqrt{(9a^5 + 27a^7 - 54a^9)}$. La quantità sotto il vincolo si può ridurre a $9a^4(a + 3a^3 - 6a^5)$. Si estraiga ora la radice dal fattore $9a^4$, ed avremo

$$\sqrt{(9a^5 + 27a^7 - 54a^9)} = 3a^2\sqrt{(a + 3a^3 - 6a^5)}.$$

27. Non si può dire, che una quantità si moltiplica per una frazione, perchè moltiplicare una quantità per un'altra è ripetere la prima tante volte, quante sono le unità nella seconda: dunque si può dire ripetere una quantità due, tre, quattro ec. volte; ma non mai ripeterla una mezza volta, due terze volte, cinque ottave volte. Ora innalzare una quantità alla seconda potenza è moltiplicarla in se stessa: dunque una frazione non si può innalzare alla seconda potenza, perchè la frazione non si moltiplica in se stessa, ma si bene si può prendere di essa una parte espressa da se stessa. Così avendosi $\frac{2}{3}$, questa non si può moltiplicare in se stessa, perchè il $\frac{2}{3}$ non si può prendere due terze volte; ma solo di $\frac{2}{3}$ si possono prendere le due terze parti.

28. Facendo però questa operazione risultano i quadrati dei due termini. Così presa di $\frac{a}{b}$ la frazione $\frac{a}{b}$, abbiamo $\frac{a^2}{b^2}$: dunque di una frazione non si può avere il quadrato, ma col prendere la stessa frazione di se stessa si ha la frazione dei quadrati de' suoi due termini. Viceversa dunque prendendo le radici di questi due

termini si ottiene la frazione di termini semplici. Così estraendo le radici dai due termini a^2 , b^2 dalla frazione

$\frac{a^2}{b^2}$ ritroviamo $\frac{a}{b}$. Estraendo la radice dai due termini

della frazione $\frac{a^4 b^6}{c^8 d^{10}}$ abbiamo $\frac{a^2 b^3}{c^4 d^5}$, cioè dalla frazione di

termini quadrati si ha la frazione di termini semplici.

29. Ora occorre spesso di fare questo passaggio per trovare il valore dell'incognita elevata alla seconda potenza.

Se da un problema risultasse l'equazione $x^2 = \frac{a}{b}$ si

dovrebbe trovare il valore di x . Ora questa equazione si può rappresentare con $b x^2 = a$, ed estraendo la radice seconda da ambedue i membri sarà

$$x\sqrt{b} = \sqrt{a}, \text{ ed } x = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}};$$

cioè se è frazione il valore del quadrato d'una incognita, il valore dell'incognita semplice sarà uguale al quoto delle radici dei due termini della detta frazione.

30. Quantunque non vi sia quadrato d'una frazione, ma si bene la frazione dei quadrati de'suoi due termini, che proviene dal prendere della data frazione una frazione uguale a se stessa; pure si ritiene l'innalzamento al quadrato d'una frazione, e si dice, che si effettua coll'innalzare al quadrato i suoi due termini: quindi nell'innalzamenti al quadrato delle frazioni si scrive

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}, \left(\frac{2a^3}{3b^4}\right)^2 = \frac{4a^6}{9b^8}, \left(-\frac{3a^4}{5b^5}\right)^2 = \frac{9a^8}{25b^{10}}.$$

Basta però, che si dia il vero senso a queste operazioni, che è di prendere di una frazione una frazione a lei uguale, e che questa operazione dà la frazione dei quadrati de'suoi due termini.

31. Così ancora quantunque dalle frazioni non si estrae radice, ma solo si ha bisogno di passare dalle frazioni dei quadrati alle frazioni dei termini semplici, ed a rigore non sia vero, che $\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$, pur ciò si ritiene, e si dice, che da una frazione si estrae la radice estraendola dai suoi due termini. Quindi

$$\sqrt{\frac{4a^4}{9b^8}} = \pm \frac{2a^2}{3b^4}; \sqrt{\frac{a}{4b^6}} = \frac{\sqrt{a}}{2b^3}; \sqrt{\frac{a^2}{2b}} = \frac{a}{\sqrt{2b}}.$$

32. Quindi ancora si ritiene la regola superiore (§.26.) per portar fuori del segno della radice quel che si può, quando anche è frazione la quantità sotto il segno della radice; facendosi la detta operazione nel numeratore, e nel denominatore. Così

$$\sqrt{\frac{24a^3}{27b^9}} = \sqrt{\frac{4a^3 \cdot 6a}{9b^3 \cdot 3b}} = \sqrt{\frac{4a^3}{9b^3} \cdot \frac{6a}{3b}} = \frac{2a}{3b^4} \sqrt{\frac{2a}{b}}.$$

33. Abbiamo $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, ciò che si verifica moltiplicando la quantità $a + b$ in se stessa: dunque il quadrato d'un binomio contiene tre parti; il quadrato del primo termine, il doppio prodotto del primo termine nel secondo, ed il quadrato del secondo termine.

34. Da ciò possiamo avere subito il metodo di elevare un polinomio qualunque alla seconda potenza.

Sia il polinomio $(a + b + c + d + e)^2$ composto di cinque termini. Si consideri $a + b + c + d$ come un solo termine, avremo per la regola antecedente (§. 33.)

$$(a+b+c+d+e)^2 = (a+b+c+d)^2 + 2(a+b+c+d)e + e^2.$$

Sviluppando $a + b + c + d$ col considerare il trinomio

$a + b + c$ come un solo termine sarà

$$(a+b+c+d+e)^2 = (a+b+c)^2 + 2(a+b+c)d + d^2 + 2(a+b+c+d)e + e^2.$$

Collo stesso metodo sarà

$$(a+b+c+d+e)^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2 + 2(a+b+c)d + d^2 + 2(a+b+c+d)e + e^2.$$

E finalmente

$$(a+b+c+d+e)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a+b)c + c^2 + 2(a+b+c)d + d^2 + 2(a+b+c+d)e + e^2.$$

35. Di qui si può dare la regola generale per elevare un polinomio al quadrato. *Questo sarà uguale al quadrato del primo termine; più due volte il prodotto del primo termine nel secondo; più il quadrato del secondo; più due volte il prodotto della somma dei due primi termini nel terzo; più il quadrato del terzo; più il doppio prodotto della somma dei tre primi termini nel quarto; più il quadrato del quarto; più il doppio prodotto della somma dei primi quattro termini nel quinto; più il quadrato del quinto, e così di seguito, finché siano esauriti tutti i termini.*

36. Se poi si eseguiscano i doppii prodotti si vedrà, che il quadrato di un polinomio è la somma dei quadrati di tutti i termini, più la somma dei prodotti a due a due di tutti i termini del polinomio, tutti moltiplicati per 2.

37. Diamo il metodo per estrarre la radice dai polinomi. Questo si ricaverà dal metodo, che conosceremo doversi usare per ricavare dal polinomio (§. 34.)

$$a^2 + 2ab + b^2 + 2(a+b)c + c^2 + 2(a+b+c)d + d^2 + 2(a+b+c+d)e + e^2$$

la sua radice, che sappiamo essere $a + b + c + d + e$.

Il primo termine di quel polinomio è a^2 , se da questo estrarremo la radice, otterremo la prima radice a . Poichè questo termine a^2 è ora inutile per ottenere la prima radice, di questo si farà il quadrato, e si sottrarrà. Dopo ciò il primo termine del residuo è $2ab$, cioè il doppio della radice a trovata nell'altra b , che cerco: dunque si faccia il doppio della radice trovata, e per questo si divida quel primo termine del residuo; il quoto sarà la seconda radice. I due termini $2ab + b^2$ del residuo sono inutili, perchè non contengono che le due radici trovate. Ora questi sono il doppio della prima radice moltiplicato nella seconda, più il quadrato della seconda: si faccia dunque questo doppio prodotto, e quadrato, e si sottragga. Nel nuovo residuo il primo termine $2(a + b)c$ è il doppio delle due radici trovate a, b moltiplicato nella terza radice; se dunque si faccia il doppio delle due radici trovate, e per questo si divida quel primo termine del residuo, avremo la terza radice. Ora i due termini $2(a + b)c + c^2$ del residuo ci sono inutili, perchè si è trovata la terza radice: questi due termini sono il doppio prodotto delle due prime radici nella terza, più il quadrato della terza; si faccia dunque questo doppio prodotto, e questo quadrato, ed il tutto si sottragga dal detto residuo, e si troverà, che il primo termine del nuovo residuo è $2(a + b + c)d$, cioè il doppio di tutta la radice trovata $a + b + c$ nella quarta radice d : dunque se fatto il doppio di tutta la radice trovata, per questo si divida quel primo termine del residuo, il quoto sarà la quarta radice. Di nuovo i due termini del residuo $2(a + b + c)d + d^2$ sono inutili, perchè ora si conosce la quarta radice: questi sono il doppio delle tre prime radici nella quarta, più il quadrato della quarta radice: si faccia dunque questo doppio prodotto, e questo quadrato, e tutto si sottragga dal residuo avuto. Si conosce ora come si debba operare per trovare l'ultima radice, e come, se anche più oltre si dovesse portare l'operazione.

38. Ecco il prospetto dell'operazione

$$\begin{array}{rcl}
 \text{(A)} & & \text{(B)} \\
 a^2 + 2ab + b^2 + 2(a+b)c + c^2 + 2(a+b+c)d + d^2 + 2(a+b+c+d)e + e^2 & & a+b+c+d+e \\
 -a^2 & & \hline
 2ab + b^2 + 2(a+b)c + \text{ec.} & & 2a+b \\
 2ab + b^2 & & \quad +b \\
 \hline & & 2(a+b)+c \\
 & & \quad +c \\
 2(a+b)c + c^2 + 2(a+b+c)d + \text{ec.} & & 2(a+b+c)+d \\
 2(a+b)c + c^2 & & \quad +d \\
 \hline & & 2(a+b+c+d)+e \\
 & & \quad +e \\
 & & \hline
 & & 2(a+b+c+d)e + e^2 \\
 & & 2(a+b+c+d)e + e^2 \\
 & & \hline
 & & \hline
 \end{array}$$

In questo prospetto si vede, che l'operazione si dispone come nella divisione. (A) è il polinomio da cui si estrae la radice, e (B) è la radice. Sotto questa si vanno scrivendo successivamente i doppii delle radici trovate $2a$, $2(a+b)$, $2(a+b+c)$ ec., e quando si è avuta l'altra radice colla divisione del primo termine del residuo pel doppio di tutta la radice trovata, essa si scrive nel luogo della radice, accanto al doppio di tutta la radice antecedente, e sotto. Così il $+b$ si è scritto dopo a nel luogo della radice, accanto a $2a$, e sotto $2a+b$. Quando si è trovata la terza radice c si è scritta accanto alla radice trovata $a+b$, accanto al suo doppio $2(a+b)$, e sotto $2(a+b)+c$. Poi si è moltiplicato $2a+b$ per b , ed il prodotto $2ab+b^2$ si è sottratto, perchè abbiamo veduto, che si doveva sottrarre dal residuo il doppio prodotto della prima radice nella seconda, più il quadrato della seconda, e $2ab+b^2$ è appunto questa somma, che si doveva sottrarre.

Così ancora si è moltiplicato $2(a+b)+c$ per c , e si è sottratto il prodotto dal secondo residuo, perchè si è detto,

che si doveva sottrarre il doppio prodotto delle due radici trovate nella terza, più il quadrato della terza, e tale è appunto il prodotto $2(a+b)c+c^2$, che si è sottratto.

Noi poi tanto nel polinomio, tanto nei doppii prodotti delle radici trovate nel decorso dell'operazione abbiamo chinso fra parentesi dopo il 2 le dette radici per chiarezza del metodo dell'operazione, e della dimostrazione; del resto ciò non è necessario, perchè i quoti, che sono le radici, vengono allo stesso modo, quando il polinomio da cui si estrae la radice, sia ordinato per una data lettera. È da ricordarsi, che un polinomio è ordinato per una lettera quando si sono scritti prima tutti i termini, che contengono questa lettera; e se la lettera ha esponenti si debbono scrivere successivamente i termini, nei quali quelli vanno successivamente decrescendo.

Si debba estrarre la radice dal polinomio

$$9a^6 - 12a^5 + 10a^4 - 4a^3 + a^2.$$

Ecco il prospetto dell'operazione

$ \begin{array}{r} 9a^6 - 12a^5 + 10a^4 - 4a^3 + a^2 \\ \underline{- 9a^6} \\ -12a^5 + 10a^4 - 4a^3 + a^2 \\ \underline{- 12a^5 + 4a^4} \\ + \quad - \\ \hline 6a^4 - 4a^3 + a^2 \\ 6a^4 - 4a^3 + a^2 \\ \underline{- \quad + \quad -} \\ = \quad = \quad = \end{array} $	$ \begin{array}{r} 3a^3 - 2a^2 + a \\ \hline 6a^3 - 2a^2 \\ \underline{- 2a^2} \\ 6a^3 - 4a^2 + a \\ \underline{+ a} \end{array} $
--	---

Si è estratta la radice da $9a^6$, e si è scritto $3a^3$ nel luogo della radice; si è fatto il quadrato, e si è sottratto dal polinomio proposto, e si è scritto il residuo. È stata rad-

doppiata la radice trovata, e pel risultamento $6a^3$ si è diviso il primo termine $-12a^5$ della radice; il quoto $-2a^2$ si è scritto al posto della radice, accanto al doppio, e sotto, e $6a^3 - 2a^2$ si è moltiplicato per $-2a^2$, ed il prodotto si è sottratto dal detto residuo, e con ciò si è avuto il nuovo residuo $6a^4 - 4a^3 + a^2$. È stata raddoppiata tutta la radice trovata, e si è avuto $6a^3 - 4a^2$, ed il primo termine $6a^4$ del residuo si è diviso per $6a^3$, il quoto a si è scritto al solito nel posto della radice, accanto al doppio, e sotto, e moltiplicato $6a^3 - 4a^2 + a$ per a , e sottratto il prodotto dall'ultimo residuo, si è avuto zero.

Sia anche da estrarsi la radice da

$$\frac{a^4}{b^6} - \frac{4}{b^2} + \frac{4b^2}{a^4} + \frac{2a}{b^3} - \frac{4b}{a^3} + \frac{1}{a^2}.$$

Ecco il prospetto dell'operazione

$$\begin{array}{r}
 \frac{a^4}{b^6} - \frac{4}{b^2} + \frac{4b^2}{a^4} + \frac{2a}{b^3} - \frac{4b}{a^3} + \frac{1}{a^2} \\
 \hline
 \frac{a^4}{b^6} \\
 \hline
 \frac{4}{b^2} + \frac{4b^2}{a^4} + \frac{2a}{b^3} - \frac{4b}{a^3} + \frac{1}{a^2} \\
 \hline
 -4 + \frac{4b^2}{a^4} \\
 + \frac{2a}{b^3} - \frac{4b}{a^3} \\
 \hline
 \frac{2a}{b^3} - \frac{4b}{a^3} + \frac{1}{a^2} \\
 \hline
 \frac{2a - 4b + 1}{b^3 + a^3 - a^2} \\
 \hline
 = = =
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \left| \frac{a^2}{b^3} - \frac{2b}{a^3} + \frac{1}{a} \right. \\
 \hline
 \frac{2a^2}{b^3} - \frac{2b}{a^2} \\
 \hline
 \frac{2b}{a^2} \\
 \hline
 \frac{2a^2}{b^3} - \frac{4b}{a^2} + \frac{1}{a} \\
 \hline
 \frac{1}{a} \\
 \hline
 \frac{1}{a}
 \end{array}$$

Si vede, che si è estratta la radice da $\frac{a^4}{b^6}$, e questa si è

notata con $\frac{a^2}{b^3}$. Il primo termine del residuo $-\frac{4}{b^2}$ si è diviso pel doppio della radice trovata, cioè per $\frac{2a^2}{b^3}$, ed il quoto è stato $-\frac{2b}{a^2}$, e così di seguito come negli altri esempi.

39. Dopo ciò andiamo a dare il metodo per estrarre la radice seconda dai numeri. A questo fine stabiliamo le seguenti proposizioni:

I. *Il quadrato di un numero espresso da una cifra non può avere più di due cifre: perchè il 9, che è il maggior numero d'una cifra dà nel quadrato 81.*

II. *Il doppio prodotto delle decine nell'unità non può essere minore delle decine. Ciò è chiarissimo.*

III. *Il quadrato delle decine non può essere minore delle centinaia; perchè il 10, che è il più piccolo numero delle decine, nel quadrato dà 100.*

Poste queste verità si debba estrarre la radice dal numero 529. Incomincio a ragionare così. Questo numero ha più di due cifre, dunque è il quadrato di un numero di più d'una cifra: dunque questo numero contiene decine, ed unità: quindi 529 è il quadrato d'un binomio, che ha per primo termine le decine, e per secondo le unità. Ora quando si estraeva la radice da un polinomio s'incominciava ad estrarre la radice dal primo termine a^2 che era il quadrato della prima radice: dunque si deve cominciare nel nostro caso ad estrarre la radice dalla parte del 529, che contiene il quadrato delle decine: ma il quadrato delle decine non può essere minore delle centinaia: dunque la parte, che può contenere il quadrato delle decine è 5, che sono cinque centinaia. Si separi dunque con una virgola la parte 29, che non fa parte delle centinaia, e si estraiga la radice da 5: questa prossimamente è 2, che si porrà nel luogo della radice. Come nell'estrazione della radice dal po-

linomio si sottraeva da esso il quadrato della prima radice a , così il quadrato di questa radice 2, cioè 4 si sottragga da 5; si avrà il residuo 1, accanto al quale si cali la parte separata 29. È evidente, che 129 conterrà il doppio della radice trovata 2, che è numero di decine, moltiplicato nelle unità incognite, più il quadrato di queste unità. Per trovare queste unità in 129 si separi la parte, che contiene il doppio delle decine moltiplicato nelle unità, perchè dividendo questa parte pel doppio delle decine trovate si avranno le unità. Ora il doppio prodotto delle decine nelle unità non può essere inferiore alle decine; dunque questo doppio prodotto dovrà trovarsi in 12, che sono dodici decine. Si separi dunque con una virgola il 9, che non fa parte delle decine. Diviso poi 12 per 4 doppio delle decine, si avrà 3, che sono le unità cercate. Questa cifra si segni nel posto della radice, accanto al doppio 4, e sotto, come si è praticato nell'estrazione della radice dal polinomio, e poi si moltiplichino 43 per 3, ed il prodotto sottratto da 129 non rimane nulla: dunque la radice domandata è 23.

Ecco il prospetto dell'operazione

$$\begin{array}{r}
 5,29 \qquad \qquad \qquad | 23 \\
 \underline{4} \qquad \qquad \qquad \underline{43} \\
 12,9 \qquad \qquad \qquad 3 \\
 \underline{12\ 9} \\
 00\ 0
 \end{array}$$

40. Si debba estrarre la radice da 20449. Pongo subito il prospetto dell'operazione

$$\begin{array}{r}
 2,04,49 \qquad \qquad \qquad | 143 \\
 \underline{1} \qquad \qquad \qquad \underline{24} \\
 10,4 \qquad \qquad \qquad 4 \\
 \underline{9\ 6} \qquad \qquad \qquad \underline{283} \\
 84,9 \qquad \qquad \qquad 3 \\
 \underline{84,9} \\
 00\ 0
 \end{array}$$

Il numero proposto ha più di due cifre : dunque è il quadrato d'un numero di più d'una cifra : dunque è il quadrato d'un binomio di decine, e di unità : quindi nel nostro numero deve separarsi la parte, che contiene il quadrato delle decine ; questo non può trovarsi in un numero minore delle centinaia , perchè non può essere inferiore a queste, dunque separando con una virgola il 49 minore delle centinaia, nel 204 centinaia si troverà il quadrato delle decine : ma questo numero è composto di più di due cifre, dunque non è il quadrato delle unità di decine, ma di un numero composto di decine, e di unità: separo dunque come sopra in 204 il 04 con una virgola, e nel 2 si troverà il quadrato delle decine.

Con questo metodo si vede, che il numero è diviso nelle sue cifre a due a due cominciando da diritta a sinistra. Dopo ciò la radice prossima di 2 è 1, che si scrive nel posto della radice, ed il suo quadrato si sottrae da 2; si ha così il residuo 1, accanto al quale si cala 04, e si ha 104. Questo come nell' altro caso contiene il doppio della decina trovata moltiplicato per le unità incognite, più il quadrato delle unità; separo dunque con una virgola 10; nel quale solo può essere il detto doppio prodotto, e fatto il doppio della radice trovata 1, per 2 divido il 10. Si ha il quoto 5, che posto accanto alla radice, accanto al doppio, e sotto, si moltiplica 25 per 5 : ma il prodotto 125 non si può sottrarre da 104 : dunque in luogo di 5 per tutto scrivo 4, e sottratto da 104 il prodotto di 24 per 4 si ha il residuo 8, accanto al quale si cala 49. Il numero 849 contiene il doppio delle decine trovate 14, moltiplicato per le unità incognite, più il quadrato delle unità : separo dunque con una virgola 84, che può contenere questo doppio prodotto, e diviso per 28, doppio della radice trovata 14, si ha 3, che sono le unità, che si domandavano. Collocato questo 3 nei soliti luoghi si moltiplica

283 per 3, e si ottiene appunto 849 : dunque la radice domandata è 143. Se questo numero si moltiplica in se stesso viene 20449.

41. Nella operazione eseguita per estrarre la radice dal numero antecedente, si è incontrato un caso degno di riflessione. Quando abbiamo diviso la parte 10 del primo residuo per 2 abbiamo trovato 5 di quoto, eppure la radice non poteva essere che 4, perchè avendo scritto 5 accanto al doppio delle decine, fatta la solita moltiplicazione di 25 per 5, si è trovato un prodotto troppo forte, che non si poteva sottrarre. Ciò è avvenuto, perchè il 104 dovendo contenere il doppio prodotto della decina 1 nelle unità 4, più il quadrato di queste unità, questo quadrato 16 col doppio prodotto seguente delle decine 14 nelle unità 3 ha cresciuto nel 10 così il detto doppio prodotto della decina 1 nelle unità 4, che questo doppio vi entra più del dovere. Infatti prendendo tutta la radice trovata 143 si vede, che il doppio di 100 moltiplicato in 40 dà 8000 : il quadrato di 40 dà 1600 : il doppio prodotto di 140 in 3 dà 840. Ora si sommino questi numeri scrivendoli come qui innanzi

$$\begin{array}{r} 8000 \\ 1600 \\ 840 \\ \hline \end{array}$$

10440

o si vedrà come sia cresciuto l'8000 dall' aggiunta degli altri numeri, in guisa che il doppio di 100, cioè doppio della prima radice trovata, vi entri più di 4 volte. Dopo ciò si può dare la regola generale per estrarre la radice seconda da un numero qualunque.

42. *Dividete con virgole le cifre del numero dato a due a due cominciando da dritta. Estrae la radice prossima dalla prima, o dalle due prime cifre a sinistra, e scrivetela nel luogo della radice. Fate il quadrato della radice trovata, e sottraetelo dalla prima parte del numero, da cui si è estratta la*

radice. Accanto al residuo calate le due cifre seguenti del numero dato, e con una virgola separate l'ultima cifra a dritta: dividete la parte a sinistra della virgola pel doppio della radice trovata, che scriverete sotto il luogo della radice, ed il quoto, che avrete, lo scriverete come seconda radice appresso alla prima, accanto al doppio, e sotto: moltiplicate per questa il numero superiore, e sottraete il prodotto da tutto il residuo, ed accanto al nuovo residuo calate l'altra coppia di cifre seguenti alla già calata del numero proposto, separando con una virgola l'ultima sua cifra a dritta. Il numero, che rimane a sinistra della virgola, dividete pel doppio di tutta la radice trovata, che scriverete sotto il doppio antecedente: scrivete il quoto nel posto della radice, accanto al doppio, e sotto, e per questo quoto moltiplicate il numero superiore, ed il prodotto sottraetelo dal detto residuo, ed accanto al terzo residuo, che viene calata la terza coppia di cifre del proposto numero, e progredite innanzi, come già si è fatto per due volte, quando si è calata la coppia di cifre.

43. Se la quantità, dalla quale si deve estrarre la radice fosse frazionaria, dovendosi in tal caso estrarre la radice (§. 31.) dal numeratore, e dal denominatore, per risparmiare una estrazione, si moltiplicheranno i due termini della frazione pel denominatore: divenendo con ciò il denominatore un quadrato basterà estrarre la radice dal numeratore, e dividere il risultamento pel denominatore. Così sarebbe

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{ab}{b^2}} = \frac{\sqrt{ab}}{b}.$$

Così ancora

$$\sqrt{\frac{5}{17}} = \sqrt{\frac{85}{17^2}} = \frac{\sqrt{85}}{17}.$$

44. Se da ab si estrae la radice intera prossima, il risultamento diviso per b differirà dal più giusto di meno della

frazione $\frac{1}{b}$. Infatti si supponga r la radice prossima intera di ab : è evidente, che $\sqrt{ab}$ sarà compresa fra r ed $r + 1$, e $\frac{\sqrt{ab}}{b}$ sarà compresa fra $\frac{r}{b}$, ed $\frac{r+1}{b}$: dunque l'errore commesso nel prendere $\frac{r}{b}$ per $\frac{\sqrt{ab}}{b}$, o per $\sqrt{\frac{a}{b}}$ sarà minore di $\frac{1}{b}$.

Da ciò risulta, che nel caso antecedente di estrarre la radice da $\frac{5}{17}$ o da $\frac{85}{17^2}$, se si prenda per la radice prossima di 85 il numero 9, onde si abbia $\frac{9}{17}$ per radice prossima di $\frac{5}{17}$, questa radice differirà dalla giusta di meno di $\frac{1}{17}$.

Vediamo ora come nei numeri interi, e fratti, dei quali non si può avere la radice esattamente, si possa avere in frazioni con quella approssimazione, che si desidera.

45. E per primo è bene di dimostrare il teorema. *Dell'intero, del quale non si può avere la radice intera esattamente, non si può avere esattamente neppure in frazione.*

Supponiamo infatti, che si potesse avere esattamente $\sqrt{a} = \frac{c}{d}$, ove c , e d s'intendono numeri primi fra loro, cioè la frazione ridotta a più semplice espressione. Dalla nostra uguaglianza si ricava $a = \frac{c^2}{d^2}$, o $ad = \frac{cc}{d}$: dunque come ad è intero, è intero $\frac{cc}{d}$: ma d non divide niuno dei due fattori c : dunque non può dividere (A. G. §. 48.) neppure il prodotto.

46. Sia ora l'intero a , del quale non potendosi avere la radice esatta intera si voglia in frazione con un'approssimazione tale, che differisca dalla vera di meno della frazione $\frac{1}{n}$. Per ottenerla si moltiplichi, e si divida a per n^2 , avremo $\frac{an^2}{n^2}$. Si estraiga la radice prossima intera da an^2 , e sia r , sarà $\frac{r}{n}$ la radice, che differisce dalla giusta di meno della frazione $\frac{1}{n}$. La dimostrazione è come nel (§. 43.). Infatti la radice di an^2 è compresa fra r , ed $r+1$, dunque la $\sqrt{\frac{an^2}{n^2}}$, o $\sqrt{a}$ sarà compresa fra $\frac{r}{n}$, ed $\frac{r+1}{n}$, quindi differirà dalla giusta radice di meno della frazione $\frac{1}{n}$.

47. Si voglia ora la radice prossima di $\frac{a}{b}$. Se, come si è detto (§. 43.), si estraiga la radice prossima intera da ab , e questa sia r sarà $\sqrt{\frac{ab}{b^2}} = \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{r}{b}$, la $\frac{r}{b}$ differirà dalla giusta radice di meno di $\frac{1}{b}$. Ma se si faccia $\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{ab}{b^2}} = \sqrt{\frac{abn^2}{b^2n^2}}$, si trovi la radice prossima intera r di abn^2 , e si ponga $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{r}{bn}$, questa $\frac{r}{bn}$ differirà dalla vera di meno di $\frac{1}{bn}$.

48. Si voglia per esempio la radice di $\frac{3}{11}$, che differisca dalla vera di meno di $\frac{1}{11.8}$. Si moltiplichino i due termini di

$\frac{3}{11}$ per 11. 8², o per 704, avremo $\frac{2112}{11 \times 8^2}$. La radice prossima intera di 2112 è 45; dunque $\frac{45}{11.8}$, o $\frac{45}{88}$ è la radice di $\frac{3}{11}$, che differisce dalla vera di meno di $\frac{1}{88}$.

49. Per avere con approssimazione la radice di un intero, o di una frazione, piuttosto che servirci delle frazioni comuni, il meglio è far uso delle decimali. Si voglia per esempio la radice di 34 prossima alla vera di meno di $\frac{1}{1000}$: secondo ciò che si è detto, il numero 34 si moltiplichi, e si divida per 1000², avremo $\frac{34000000}{1000^2}$. Si estraiga la radice prossima intera da 34000000, che si troverà 5830; dunque la radice prossima di 34, che differisca dalla vera di meno di $\frac{1}{1000}$ è $\frac{5830}{1000}$, o 5.83.

50. Dopo ciò la regola per estrarre la radice da un numero con una approssimazione decimale espressa da uno diviso dall'unità seguita da un numero dato di zeri *è di aggiungere al numero proposto il doppio numero di questi zeri, di estrarre dal numero risultante la radice intera la più prossima, ed in questa da sinistra a dritta separare con una virgola tante cifre, quanti sono i zeri della frazione stabilita per l'approssimazione.*

51. Si voglia ora la radice di $\frac{3}{7}$ con una approssimazione espressa dall'unità divisa pel prodotto del denominatore 7 nell'unità seguita da un numero di zeri. Si voglia, che la radice domandata differisca dalla vera di meno di $\frac{1}{7.100}$, o di $\frac{1}{700}$. Si moltiplichino i due termini della data frazione per 7.100², o per 70000, si dovrà estrarre la ra-

dice da $\frac{210000}{7 \cdot 100^2}$, che sarà $\frac{458}{700}$, o $\frac{4.58}{7}$, e questa sarà la radice coll'approssimazione domandata.

52. Dunque, se si voglia la radice di una frazione con una approssimazione espressa dall'unità divisa pel denominatore della frazione seguito da un dato numero di zeri. Si moltiplicheranno i due termini della frazione pel prodotto del denominatore nel quadrato del numero formato dall'unità, e i detti zeri, ed estratta la radice prossima intera dal nuovo numeratore, questa si dividerà pel denominatore seguito dagli stessi zeri.

Una radice, che non si può avere esattamente, si dice quantità *irrazionale*, perchè non si può valutare in un numero di unità intere, o fratte; quindi non ha ragione, o rapporto coll'unità.

~~—~~

CAPO SECONDO

EQUAZIONI DI SECONDO GRADO.

~~—~~

Possiamo ora risolvere l'equazioni, nelle quali l'incognita è elevata alla seconda potenza: queste equazioni si dicono *equazioni di secondo grado*.

53. Già sono occorse queste equazioni l'una è $x^2=ab$, (A. G. §. 156.), l'altra (A.G. §182.) $x^2 + \frac{(2a-d)n}{d} = \frac{2s}{d}$,

ove n è l'incognita. Quindi l'equazione di secondo grado si può presentare sotto due aspetti, l'uno è quando vi è l'incognita elevata solo alla seconda potenza, come in $x^2=ab$; l'altro quando oltre l'incognita alla seconda potenza contiene un termine colla semplice incognita, e tale è l'equazione antecedente, nella quale oltre il termine, che contiene n^2 , vi è quello, che ha n . L'equazione della prima forma si dice *equazione pura di secondo grado*; l'altra si dice *equazione affetta di secondo grado*. Taluni chiamano la prima

equazione, *equazione incompleta di secondo grado*, l'altra, *equazione di secondo grado completa*.

54. Dopo ciò l'equazioni da noi già risolte nell'aritmetica generale, nelle quali l'incognita non ha esponente si chiamano *equazioni di primo grado*.

55. La forma generale delle equazioni pure è $Ax^2=B$, che si suol scrivere anche $Ax^2-B=0$; e la forma delle equazioni affette è $Ax^2+Bx=C$, o $Ax^2+Bx-C=0$. In ambedue queste forme la x^2 si suppone scevra del coefficiente, perchè tutta l'equazione si può dividere per questo, se lo abbia: quindi le due forme generali sono

$$x^2+b=0, \quad x^2+bx+c=0.$$

56. Dalla prima si ha subito $x^2=-b$, ed estraendo la radice seconda da ambedue i membri, e ricordandoci del doppio segno della radice, sarà $x=\pm\sqrt{-b}$. Se b sarà negativa le due radici saranno reali, se sarà positiva, saranno immaginarie.

57. Andiamo a risolvere l'equazione $x^2+bx+c=0$, o l'altra $x^2+bx=c$. Se il binomio x^2+bx fosse un quadrato perfetto si estrarrebbe la radice, e perdendo la x l'esponente 2, l'equazione di secondo grado si ridurrebbe ad una equazione di primo grado. Ma il binomio x^2+bx non può essere un quadrato nè d'un monomio, nè d'un binomio: non di un monomio, perchè questo elevato alla seconda potenza dà un monomio; non d'un binomio, perchè il quadrato d'un binomio dà tre termini (§. 33.), cioè il quadrato del primo termine del binomio; più il doppio prodotto del primo termine nel secondo, o il doppio del secondo moltiplicato nel primo; più il quadrato del secondo. Ora nel nostro binomio x^2+bx la x^2 si può considerare come il quadrato del primo termine x d'un binomio, l'altra quantità bx sarà il doppio del secondo termine nel primo x , se b sia il doppio del secondo ter-

mine, ovvero questo secondo termine sia la metà di b : manca dunque per completare il quadrato, che ad $x^2 + bx$ si aggiunga il quadrato del secondo termine del binomio della radice, o il quadrato di $\frac{b}{2}$. Si faccia questo quadrato, ed il risultato $\frac{b^2}{4}$ si aggiunga ad ambedue i membri dell'equazione $x^2 + bx = c$, onde l'uguaglianza sussista, avremo con ciò

$$x^2 + bx + \frac{b^2}{4} = c + \frac{b^2}{4}.$$

Si estraiga ora la radice seconda da ambedue i membri. Quella del primo si otterrà subito sapendosi, che x^2 è il quadrato della prima radice, e $\frac{b^2}{4}$ il quadrato della seconda: dunque la radice del primo membro sarà $x + \frac{b}{2}$. Dal secondo non si può estrarre: indicando dunque col segno la radice del secondo membro sarà

$$x + \frac{b}{2} = \pm \sqrt{c + \frac{b^2}{4}}, \text{ o } x = -\frac{b}{2} \pm \frac{\sqrt{4c + b^2}}{2},$$

e finalmente $x = \frac{-b \pm \sqrt{4c + b^2}}{2}$.

58. I due valori dell'incognita nelle equazioni di secondo grado si chiamano *le radici* dell'equazioni.

59. Se il secondo termine bx fosse negativo, considerandosi negativa la b , poichè b è il doppio della seconda radice, questa sarebbe negativa, e perciò nell'estrazione della radice dal primo membro, si porrebbe $\frac{-b}{2}$.

Quindi estraendosi la radice dal primo, ed ultimo termine del primo membro dell'equazione di secondo grado, pel segno da darsi alla seconda radice si baderà al segno del secondo termine. Si vede chiaro, che a nulla monta, che in bx negativo si supponga o la b , o la x negativa, perchè avendosi nella prima ipotesi

$$x = \frac{b \pm \sqrt{c^2 + 4b^2}}{2},$$

nella seconda si avrebbe

$$-x = \frac{-b \pm \sqrt{c^2 + 4b^2}}{2}, \text{ o } x = \frac{b \mp \sqrt{c^2 + 4b^2}}{2},$$

che è l'istesso risultamento antecedente.

60. Così ancora abbiamo dato il doppio segno alla radice seconda del secondo membro, e non a quella del primo, perchè se ciò si facesse si avrebbe

$$\pm x \pm \frac{b}{2} = \pm \frac{\sqrt{4c + b^2}}{2}.$$

Ora per fare tutte le combinazioni possibili di segni, si prenda il positivo del primo membro, ed il positivo del secondo; il positivo del primo, ed il negativo del secondo; e poi si combini il negativo del primo membro prima col positivo, e poi col negativo del secondo, ed avremo

$$(1) \quad x + \frac{b}{2} = + \frac{\sqrt{4c + b^2}}{2}, \quad (2) \quad x + \frac{b}{2} = - \frac{\sqrt{4c + b^2}}{2},$$

$$(3) \quad -x - \frac{b}{2} = + \frac{\sqrt{4c + b^2}}{2}, \quad (4) \quad -x - \frac{b}{2} = - \frac{\sqrt{4c + b^2}}{2}.$$

Ora si vede, che mutando i segni all'equazione (4) diventa la (1), e facendo lo stesso alla (3) diventa la (2), e dalle (1), e (2) si hanno le soluzioni

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{4c + b^2}}{2},$$

come nel (§. 57.).

61. Ecco dunque il metodo per risolvere una equazione qualunque di secondo grado. *Avendola ridotta alla forma $x^2 + bx = c$, si prenda la metà del coefficiente di x , ed elevata al quadrato, si aggiunga al primo, ed al secondo membro: poi si estraiga la radice da ambedue i membri. Se l'equazione è tutta data in lettere, la radice del secondo membro s'indica col porlo sotto il vincolo radicale; se poi l'equazione è data in numeri, dal secondo membro la radice si estrae esattamente, o per approssimazione, ricordandoci in ambedue i casi di dare alla radice il doppio segno. Dal primo membro poi si estrae la radice, estraendola dal primo, e dall'ultimo termine, e dando a questa seconda radice il segno del secondo termine dell'equazione proposta. Avendo così ridotta l'equazione al primo grado, subito si isolerà l'incognita.*

62. Senza fare tutta questa operazione si può stabilire, che l'incognita in una equazione di secondo grado è uguale a meno la metà del coefficiente del secondo termine, più, e meno la radice del secondo membro aumentato del quadrato della metà del coefficiente nel secondo termine della proposta.

63. L'equazione di secondo grado può dare per l'incognita due valori, uno, e nessuno. In genere ne dà due pel doppio segno della radice: ne darà uno se $4c + b^2$ sia zero, perchè allora sparisce la radice; non ne darà nessuno se $4c + b^2$ sia negativo, perchè in tal caso la radice è immaginaria.

64. Quando le soluzioni dell'equazioni di secondo grado sono immaginarie il problema è assurdo.

Per mostrarlo sia il problema. *Spezzare la quantità a in due parti tali, che il loro prodotto sia b .*

Se una parte sia x , l'altra sarà $a - x$, ed il prodotto $ax - x^2$: dunque $ax - x^2 = b$, e mutando i segni avremo

$$x^2 - ax = -b.$$

La soluzione sarà

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(-b + \frac{a^2}{4}\right)}.$$

Qui se $b > \frac{a^2}{4}$ la quantità $-b + \frac{a^2}{4}$ sarà negativa, e quindi i due valori di x immaginarj. Ma in tal caso il problema è assurdo. Per mostrarlo sia una delle due parti di a espressa da $\frac{a}{2} + d$, l'altra sarà $\frac{a}{2} - d$, onde la somma sia a . Moltiplicando queste due parti sarà il prodotto $\frac{a^2}{4} - d^2$. Essendo d^2 assolutamente positivo, finchè esiste d , da $\frac{a^2}{4}$ si toglie qualche cosa, dunque per avere il più grande prodotto dovrà farsi $d=0$, e questo massimo prodotto sarà $\frac{a^2}{4}$, che sorgerà dal prodotto delle due parti $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{2}$: dunque al più il prodotto b delle due parti sarà $\frac{a^2}{4}$; il supporre dunque $b > \frac{a^2}{4}$ è supporre l'assurdo, e questa supposizione appunto dà le radici immaginarie.

Dimostriamo generalmente alcune proprietà delle equazioni di secondo grado.

65. *L'equazione di secondo grado ha due radici.*

Sia a una di queste radici dell'equazione $x^2 + bx + c = 0$, quindi la soddisferà, ed avremo $a^2 + ba + c = 0$. Sottraendo questa dall'antecedente sarà $x^2 - a^2 + bx - ba = 0$,

ed

$$(x - a)(x + a) + b(x - a) = 0 ;$$

$$(x - a)(x + a + b) = 0 .$$

Ora questa equazione è soddisfatta, cioè dà zero, tanto ponendo $x - a = 0$, che $x + a + b = 0$; ossia ponendo $x = a$, ovvero $x = -a - b$: la prima uguaglianza ci dà il valore supposto di x , l'altra ci dà quello, che si voleva dimostrare.

66. *La somma delle due radici dà il coefficiente del secondo termine col segno cambiato, ed il prodotto delle radici dà l'ultimo termine.*

Infatti sommando i due valori $a, -a - b$ abbiamo subito $-b$. Se poi si moltiplichino danno $-a^2 - ab$: ma appunto dall'equazione (§.65.) $a^2 + ba + c = 0$ abbiamo

$$c = -a^2 - ab.$$

Dall'equazione trovata (§.65.) $(x-a)(x+a+b)=0$ si ricava, che l'equazione di secondo grado sorge dal prodotto di due fattori, che hanno per primi termini l'incognita, e per secondi le due radici coi segni cambiati.

67. *Da ciò viene, che ogni equazione di secondo grado è divisibile esattamente per l'incognita diminuita di una delle sue radici.*

Questa verità si può dimostrare, ed anche il suo inverso. Sia a una radice, e si divida l'equazione $x^2 + bx + c = 0$ finchè si può per $x - a$; si troverà il quoto $x + a + b$, ed il residuo $a^2 + ba + c$. Ora se a è una radice, $a^2 + ba + c$ è zero, dunque la divisione sarà esatta. Se poi $x - a$ divide esattamente $x^2 + bx + c$, dovrà essere il residuo $a^2 + ba + c$ uguale a zero; dunque a sarà una radice, che è la proposizione inversa.

68. Quando a sia una radice diviso $x^2 + bx + a$ per $x + a$ abbiamo il quoto esatto $x + a + b$, altro fattore di $x^2 + ab + c = 0$, che fatto eguale a zero sod-

disferà a questa equazione : dunque la radice a ne dimostra un'altra proveniente da $x + a + b = 0$, che sarà perciò $-a - b$, come sopra (§. 65.).

69. *Se l'ultimo termine c dell'equazione sarà negativo, le due radici saranno sempre reali l'una negativa, e l'altra positiva.* Infatti risolta l'equazione $x^2 + bx - c = 0$ abbiamo

$$x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(c + \frac{b^2}{4}\right)} :$$

ove la quantità sotto il vincolo è formata di quantità positive.

In tal caso una delle radici sarà positiva, e l'altra negativa. Infatti si stabilisca, che la radice di $\frac{b^2}{4} + c$ è maggiore di $\frac{b}{2}$. Superando questa radice $-\frac{b}{2}$, primo termine del secondo membro di x , il segno del risultato sarà quello della detta radice ; questo è doppio, dunque una delle due radici x sarà positiva, e l'altra negativa.

70. *Se l'ultimo termine è positivo, le due radici possono essere immaginarie; e se sono reali, sono ambedue positive, o ambedue negative, contrariamente al segno del secondo termine.*

Si abbia l'equazione $x^2 + bx + c = 0$, risolta ci dà

$$x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b^2}{4} - c\right)} .$$

Se $\frac{b^2}{4} < c$ avremo le radici immaginarie : se poi $\frac{b^2}{4} > c$ saranno ambedue reali. Ora in questo caso la radice di $\frac{b^2}{4} - c$ sarà minore di $\frac{b}{2}$, quindi la radice sarà minore del primo termine $-\frac{b}{2}$ del secondo membro ; il segno

dunque dei valori di x sarà unico, e quello di $-\frac{b}{2}$, ossia sarà il segno contrariamente preso del coefficiente di x nella proposta: dunque nel nostro caso le due radici saranno positive, se questo coefficiente sarà negativo, e negative, se sarà positivo.

71. Se nel nostro caso sia $\frac{b^2}{4} - c = 0$, le due radici si ridurranno ad una; ed a ragione, perchè nel nostro caso essendo $c = \frac{b^2}{4}$, l'equazione $x^2 + bx + c = 0$ diventa $x^2 + bx + \frac{b^2}{4} = 0$. Il primo membro è un quadrato perfetto, e si rappresenta da $\left(x + \frac{b}{2}\right)^2$, dunque $\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = 0$, ed estraendo la radice, $x + \frac{b}{2} = 0$, dove si vede, che in fondo l'equazione è di primo grado, e perciò è ragionevole, che sorga per x un solo valore.

Le proposizioni dei (§§. 69. 70.) si possono dimostrare senza risolvere l'equazione.

72. Sia in genere l'equazione $x^2 \pm bx \pm c = 0$, e siano le due sue radici m , ed n , sarà (§. 66.)

$$m + n = \mp b, \quad mn = \pm c.$$

Se c sia negativa dovrà essere $mn = -c$, dunque una delle due radici sarà positiva, e l'altra negativa; l'uguaglianza poi $m + n = \mp b$ ci dice, che il segno della più grande dovrà essere contrario al segno del secondo termine della proposta. Se poi sia c positivo, onde sia $mn = c$, le due radici debbono avere lo stesso segno, e l'equazione $m + n = \mp b$ ci dice, che saranno positive se b sarà negativo, e negative se b sarà positivo, come si disse (§. 70.).

Facendo il quadrato di $m + n = \mp b$, e sottraendovi il quadruplo di $mn = \pm c$ sarà

$$m^2 - 2mn + n^2 = b^2 \mp 4c, \text{ ed } m - n = \sqrt{(b^2 \mp 4c)}.$$

Da questa si vede, che le due radici possono essere immaginarie nel caso di c positivo, perché in questo, sotto il segno radicale nel $\mp 4c$ si deve prendere il negativo.

73. Sommando l'antecedente equazione colle $m + n = \mp b$, e sottraendo l'una dall'altra si troverà

$$m = \frac{\mp b + \sqrt{(b^2 \mp 4c)}}{2}, \text{ ed } n = \frac{\mp b - \sqrt{(b^2 \mp 4c)}}{2},$$

e rappresentando x le due radici si ha

$$x = \frac{\mp b \pm \sqrt{(b^2 \mp 4c)}}{2}.$$

altra dimostrazione della soluzione dell'equazione di secondo grado.

74. Per vedere in un esempio come anche l'Algebra ad esprimere l'assurdità di un problema, o di un ipotesi fatta in una equazione di secondo grado, oltre la radice immaginaria, ha eziandio l'espressione $\frac{a}{0}$, ossia una quantità divisa per zero, sia l'equazione generica di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$. Risolta ci dà

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}.$$

Si supponga ora $a = 0$ sarà

$$x = \frac{-b \pm b}{0};$$

dalla quale

$$x = \frac{0}{0}, \quad x = -\frac{2b}{0}.$$

Per giudicare, se veramente la prima espressione sia indeterminata, poichè alle volte può non essere (A. G. 108.), si estraiga per approssimazione la radice da $b^2 - 4ac$ col metodo dato (§. 37, 38.) Ecco il prospetto dell'operazione

$$\begin{array}{r}
 b^2 - 4ac \\
 \underline{-b^2} \\
 -4ac \\
 + \frac{4a^2c^2}{b^2} \\
 \hline
 - \frac{4a^2c^2}{b^2} \\
 \\
 - \frac{4a^2c^2}{b^2} + \frac{8a^3c^3}{b^4} + \frac{4a^4c^4}{b^6} \\
 \hline
 - \frac{8a^3c^3}{b^4} - \frac{4a^4c^4}{b^6}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 \left| b - \frac{2ac}{b} - \frac{2a^2c^2}{b^3} \right. \\
 2b - \frac{2ac}{b} \\
 - \frac{2ac}{b} \\
 2b - \frac{4ac}{b} - \frac{2a^2c^2}{b^3} \\
 - \frac{2a^2c^2}{b^3}
 \end{array}$$

Prendiamo per la radice prossima di $b^2 - 4ac$ il risultato superiore $b - \frac{2ac}{b} - \frac{2a^2c^2}{b^3}$, e sostituiamolo in

$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ invece del radicale $\sqrt{b^2 - 4ac}$,

sarà $x = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3}$ ec., ove facendo $a = 0$ abbiamo

$x = -\frac{c}{b}$. Se si osserva la nostra sostituzione al ra-

dicale, si vedrà, che ha prodotto, che dal numeratore, e denominatore della frazione di x andasse via la a , con che non trovandosi più questa nei due termini della frazione,

quando si è fatto $a = 0$ si è evitata l'espressione $\frac{0}{0}$;

onde, come nel (Aritmetica Generale §. 108.), prima di giudicare se veramente il simbolo $x = \frac{0}{0}$ fosse simbo-

lo d'indeterminazione, abbiamo indagato, se questo ve-

niva da un fattore a comune ai due termini della frazione valore di x ; e col nostro metodo di estrarre la radice da $b^2 - 4ac$ abbiamo veduto, che ciò era appunto: dunque i risultamenti della nostra ipotesi di $a = 0$ sono $x = -\frac{c}{b}$, $x = -\frac{2b}{0}$. Ora in questa ipotesi l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ diventa $bx + c = 0$, dalla quale $x = -\frac{c}{b}$, dunque la prima espressione di x è il suo valore. L'altra esprime assurdità, ed è, che nell'ipotesi di $x = 0$, l'equazione essendo di primo grado $bx + c = 0$, possa dare un'altro valore, oltre $x = -\frac{c}{b}$.

Supponiamo ora $a = 0$, ed anche $b = 0$; ammettendo questa ipotesi in

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

sarà in ambedue i valori $x = \frac{0}{0}$. Ora in luogo di $\sqrt{b^2 - 4ac}$ si ponga

$$b = \frac{2ac}{b} = \frac{2a^2c^2}{b^3} \text{ ec.}$$

e sarà

$$x = -b \pm b = \frac{c}{b} \mp \frac{ac^2}{b^3} \text{ ec.}$$

ove fatto $b = 0$ in ambedue i valori abbiamo una quantità divisa per zero, dunque ambedue i valori sono segni d'assurdità. Ora nella nostra ipotesi di $a=0$, $b=0$, e l'equazione è $c=0$; si pretenderebbe dunque di soddisfare a questa equazione con valori di x , la quale nell'equazione non si trova, lo che è assurdo.

75. Sapendosi risolvere l'equazioni di secondo grado si possono risolvere l'equazioni così dette *derivative di secondo grado*. La forma di queste equazioni è la seguente.

$$x^{2n} + ax^n = c.$$

Quindi nell'equazioni derivative di secondo grado l'incongnita è in due termini come nell'equazioni di secondo grado, e l'esponente in un termine è doppio di quello in un altro.

Nell'equazione data invece di x^n si ponga y , sarà

$$y^2 + ay = c, \quad \text{ed} \quad y = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4c}}{2},$$

ossia, ponendo x^n invece di y , $x^n = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4c}}{2}$.

Si vede, che per trovare la x da x^n si deve estrarre la radice n^{ma} da ambedue i membri; quindi

$$x = \pm \sqrt[n]{\left(\frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4c}}{2} \right)}.$$

Se in questa espressione si dessero i valori numerici ad a , e c , estratta la radice seconda dal valore di $a^2 + 4c$, e questa aggiunta, e tolta alla $-a$, non si saprebbe estrarre la radice n^{ma} dai risultamenti, quando la n sia un valore maggiore di due.

76. Se $n = 2$, nel qual caso la nostra equazione $x^4 + ax^2 = c$ si dice *equazione derivativa di quarto grado* si deve estrarre la radice da $\frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4c}}{2}$, o da un

binomio della forma $A \pm \sqrt{B}$ in parte razionale, ed in parte irrazionale. Tentiamo se questa radice di $A \pm \sqrt{B}$ si possa avere in due termini, che siano uno, o almeno ambedue irrazionali semplici di secondo grado. Si ponga

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \pm \sqrt{p} \pm \sqrt{q}.$$

Elevando al quadrato ambedue i membri avremo

$$A \pm \sqrt{B} = p + q \pm 2\sqrt{pq}.$$

Ora deve essere la parte razionale A del primo membro uguale alla parte razionale $p + q$ del secondo, e l'irrazionale $\sqrt{B}$ uguale all'irrazionale $2\sqrt{pq}$, poichè, se ciò non fosse ottenendosi dalla uguaglianza antecedente

$$A - p - q = \pm 2\sqrt{pq} \mp \sqrt{B}.$$

una quantità razionale sarebbe uguale ad una irrazionale. Abbiamo dunque

$$p + q = A, \quad 2\sqrt{pq} = \sqrt{B}.$$

Facendo il quadrato della prima uguaglianza, e dal risultamento sottraendo il quadrato della seconda sarà

$$p^2 - 2pq + q^2 = A^2 - B, \text{ e } p - q = \sqrt{(A^2 - B)}.$$

Aggiungendo, e poi togliendo questa uguaglianza alla $p + q = A$ avremo

$$p = \frac{A + \sqrt{(A^2 - B)}}{2}, \quad q = \frac{A - \sqrt{(A^2 - B)}}{2},$$

dunque

$$\sqrt{(A \pm \sqrt{B})} = \pm \sqrt{\left(\frac{A + \sqrt{(A^2 - B)}}{2}\right)} \pm \sqrt{\left(\frac{A - \sqrt{(A^2 - B)}}{2}\right)}$$

da questo risultamento si vede, che $\sqrt{(A \pm \sqrt{B})}$ potrà darsi in un binomio $\sqrt{p} \pm \sqrt{q}$ di due radicali semplici se A e B sono tali, che $A^2 - B$ sia un quadrato. Se poi oltre questa condizione una delle due quantità

$$A + \sqrt{(A^2 - B)}, \quad A - \sqrt{(A^2 - B)}$$

sia un quadrato allora $\sqrt{(A \pm \sqrt{B})}$ si darà in un binomio, che avrà un termine razionale.

Sia $\sqrt{94 + 42\sqrt{5}}$ ovvero $\sqrt{94 + \sqrt{8820}}$ sarà

$A = 94$, $B = 8820$, ed $A^2 - B = 16$,
quindi

$$\sqrt{94 + 42\sqrt{5}} = \sqrt{\left(\frac{94 + 4}{2}\right) +}$$

$$\sqrt{\left(\frac{94 - 4}{2}\right)} = \sqrt{49} + \sqrt{45} = 7 + 3\sqrt{5}.$$

Sia anche $\sqrt{28 - 5\sqrt{12}} = \sqrt{28 - \sqrt{300}}$,

Nel nostro caso

$A = 28$, $B = 300$, ed $A^2 - B = 784 - 300 = 484$, $\sqrt{A^2 - B} = 22$:

dunque

$$\sqrt{28 - 5\sqrt{12}} = \sqrt{\left(\frac{28 + 22}{2}\right)} \pm \sqrt{\left(\frac{28 - 22}{2}\right)} = \pm 5 \mp \sqrt{3}$$

Sia ancora

$$\sqrt{(bc + 2a^2 + 2a\sqrt{bc + a^2})},$$

qui è $A = bc + 2a^2$, $B = 4a^2bc + 4a^4$; dunque
 $A^2 - B = b^2c^2$: quindi

$$\sqrt{(bc + 2a^2 + 2a\sqrt{bc + a^2})} = \sqrt{(bc + a^2) + a\sqrt{}}$$

In ultimo sia

$$\sqrt{(bc + 2b\sqrt{bc - b^2})} + \sqrt{(bc - 2b\sqrt{bc - b^2})}.$$

Abbiamo $A = bc$, $B = 4b^3c - 4b^4$,

dunque $A^2 - B = b^2c^2 - 4b^3c + 4b^4 = b^2(c - 2b)^2$,

quindi

$$\sqrt{bc + 2b\sqrt{bc - b^2}} = \sqrt{bc - b^2} + b$$

$$\sqrt{bc - 2b\sqrt{bc - b^2}} = -\sqrt{bc - b^2} + b,$$

dunque

$$\sqrt{bc + 2b\sqrt{bc - b^2}} + \sqrt{bc - 2b\sqrt{bc - b^2}} = 2b.$$



ESERCIZI DEI RADICALI DI SECONDO GRADO,
E DELLE EQUAZIONI DI SECONDO GRADO.



$$\sqrt{3a^2x + 6abx + 3b^2x} = (a + b)\sqrt{3x}$$

$$\sqrt{a^3 - 3ax^2 + 2x^3} = (a - x)\sqrt{a + 2x}$$

$$\sqrt{a^3x^3 - 3ab^2x - 2b^3} = (ax + b)\sqrt{ax - 2b}$$

Dimostrate i seguenti risultamenti

$$(a + \sqrt{ab} + b)(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a\sqrt{a} - b\sqrt{b}$$

$$(\sqrt{x} + \sqrt{xy} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{xy} + \sqrt{y}) = x + \sqrt{xy} + y$$

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}\right) = \sqrt{\frac{x}{y}} + 2 + \sqrt{\frac{y}{x}}$$

$$4b\sqrt{(ax + bx^2)} - \frac{(a + 2bx)^2}{\sqrt{(ax + bx^2)}} = \frac{-a^2}{\sqrt{(ax + bx^2)}}$$

$$4c\sqrt{(a + bx + cx^2)} - \frac{(b + 2cx)^2}{\sqrt{(a + bx + cx^2)}} = \frac{4ac - b^2}{\sqrt{(a + bx + cx^2)}}$$

$$\frac{1}{a - \sqrt{a^2 - x^2}} - \frac{1}{a + \sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{2\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2}$$

$$\frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}} - \frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = 4x \sqrt{x^2 - 1}.$$

Il quadrato del binomio

$$\sqrt{(1-x+x^2)} + \sqrt{(1+x-x^2)} \text{ è } 2 + 2\sqrt{(1-x^2+2x^3-x^4)}.$$

La radice quadrata di

$$ax^2 + by^2 - 2xy\sqrt{ab} \quad \text{è} \quad x\sqrt{a} - y\sqrt{b},$$

$$\text{di} \quad \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} - \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) \sqrt{2 + \frac{5}{2}} \text{ è } \frac{x}{y} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{y}{x},$$

$$\text{di} \quad 1 + \frac{41a}{16} - \frac{3(1+a)}{2} \sqrt{a+a^2} \text{ è } 1 - \frac{3}{4} \sqrt{a+a^2},$$

$$\text{di} \quad 4a^2 + bx - y^2 - 2\sqrt{(4a^2bx - bxy^2)} \text{ è } \sqrt{(4a^2 - y^2)} - \sqrt{bx},$$

$$\text{di} \quad a + b + c + 2(\sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{bc}) \text{ è } \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c},$$

$$\text{di} \quad a + b + c + d + 2\sqrt{(ad + bd + cd)} \text{ è } \sqrt{(a + b + c)} + \sqrt{d},$$

$$\text{di} \quad a + b + c + d + 2\sqrt{(ac + bc + ad + bd)} \text{ è } \sqrt{(a + b)} + \sqrt{(c + d)},$$

$$\text{di} \quad 2a + 2\sqrt{(a^2 - x^2)} \text{ è } \sqrt{(a + x)} + \sqrt{(a - x)},$$

$$\text{di} \quad ax - 2a\sqrt{(ax - a^2)} \text{ è } \sqrt{(ax - a^2)} - a,$$

$$\text{di} \quad 2 + 2(1-x)\sqrt{(1+2x-x^2)} \text{ è } \sqrt{(1+2x-x^2)} + 1 - x.$$

La somma, e differenza delle frazioni

$$\frac{a+b\sqrt{-1}}{a-b\sqrt{-1}}, \frac{a-b\sqrt{-1}}{a+b\sqrt{-1}}$$

sono

$$\frac{2(a^2-b^2)}{a^2+b^2}, \frac{4ab\sqrt{-1}}{a^2+b^2}.$$

Il prodotto delle due frazioni

$$\frac{a+b\sqrt{-1}}{x+y\sqrt{-1}}, \frac{a-b\sqrt{-1}}{x-y\sqrt{-1}} \text{ è } \frac{a^2+b^2}{x^2+y^2}.$$

Estraete le radici seconde dalli seguenti binomi

$$\frac{9}{2} + 2\sqrt{2} = \frac{1}{2}(4 + \sqrt{2}),$$

$$\frac{7}{2} - \sqrt{10} = \frac{1}{2}(2 - \sqrt{10}),$$

$$\frac{16}{9} - \frac{8}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}(\sqrt{3} - 1).$$

Se $u = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$, e $v = \frac{1}{2}\left(y + \frac{1}{y}\right)$

provate le due uguaglianze

$$uv + \sqrt{(1-u^2)}\sqrt{(1-v^2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$$

$$uv - \sqrt{(1-u^2)}\sqrt{(1-v^2)} = \frac{1}{2}\left(xy + \frac{1}{xy}\right).$$

Risolvete l'equazioni di primo grado

$$x + \sqrt{2ax + x^2} = a, \quad x = \frac{a}{4},$$

$$\sqrt{4 + \sqrt{x^4 - x^2}} = x - 2, \quad x = \frac{17}{8},$$

$$\sqrt{a+x} - \sqrt{\frac{a}{a+x}} = \sqrt{2a+x}, \quad x = \sqrt{a} \frac{(1-2\sqrt{a-a})}{2+\sqrt{a}},$$

$$\frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}} = \sqrt{b}, \quad x = \frac{2a\sqrt{b}}{1+b^2},$$

$$\sqrt{\left(\frac{a^2}{x} + b\right)} - \sqrt{\left(\frac{a^2}{x} - b\right)} = \sqrt{c}, \quad x = \frac{4a^2c}{4b^2 + c^2},$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{a}} = \sqrt{\left(\frac{1}{a} + \sqrt{\left(\frac{4}{ax} + \frac{9}{x^2}\right)}\right)}, \quad x = 4a,$$

$$\sqrt{\sqrt{x+3a^2}} - \sqrt{\sqrt{x-3a^2}} = \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \sqrt[4]{x}, \quad x = \frac{9a^3b^2}{4(b-a)}.$$



EQUAZIONI INCOMPLETE DI SECONDO GRADO.



$$x\sqrt{6+x^2} = 1+x^2; \quad x = \frac{1}{2}; \quad x = -\frac{1}{2},$$

$$\sqrt{x-a} = \sqrt{x + \sqrt{b^2 + x^2}}; \quad x = \pm \sqrt{a^2 - b^2},$$

$$\frac{1}{a - \sqrt{a^2 - x^2}} - \frac{1}{a + \sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{a}{x^2}; \quad x = \pm \frac{1}{2} a\sqrt{3},$$

$$\frac{\sqrt{a^2 + x^2} + x}{\sqrt{a^2 + x^2} - x} = \frac{b}{c}; \quad x = \pm \frac{a(b - c)}{2\sqrt{bc}},$$

$$\frac{a + x + \sqrt{2ax + x^2}}{a + x - \sqrt{2ax + x^2}} = b; \quad x = \pm \frac{a\sqrt{(b \pm 1)^2}}{2\sqrt{b}},$$

$$\frac{ax + 1 + \sqrt{a^2x^2 - 1}}{ax + 1 - \sqrt{a^2x^2 - 1}} = \frac{1}{2} b^2x; \quad x = \pm \frac{2}{b\sqrt{(4a - b^2)}},$$

$$\sqrt{(b+c)^2 + x^2} + \sqrt{(b-c)^2 + x^2} = 2a;$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}}{a}.$$

EQUAZIONI DI SECONDO GRADO COMPLETE.

$$\frac{4x}{5-x} - \frac{20-4x}{x} = 15, \quad x = 4, \text{ e } -\frac{5}{3};$$

$$x - \frac{x^3 - 8}{x^2 + 5} = 2, \quad x = 2, \text{ e } \frac{1}{2};$$

$$\frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x} = \frac{13}{6}, \quad x = 2, \text{ e } -3;$$

$$\sqrt{(2x+3)(3x+7)} = 12, \quad x = 3, \text{ e } -\frac{41}{6};$$

$$2\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} = 5, \quad x = 4, \text{ e } \frac{1}{4};$$

$$x - 4 = (\sqrt{x} + 2)(x - 8), \quad x = 9, \text{ e } 4;$$

$$3\sqrt{112-8x}=19+\sqrt{3x+7}, x=6, \text{ e } 11\frac{523}{625};$$

$$\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+22x^2+32x}}=x+2, x=\pm\sqrt{2}, \text{ e } \pm 2\sqrt{-8};$$

$$(9+5\sqrt{3})x^2-(15+7\sqrt{3})x+6=0, x=2-\sqrt{3}, \text{ e } 3-\sqrt{3};$$

$$x^2-(a+b)x+ab=0, x=a, \text{ e } b;$$

$$ax^2-2a\sqrt{b}x=bx^2-ab, x=\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a+\sqrt{b}}};$$

$$(a-b)x^2-(a+b)x+2b=0, x=1, \text{ e } x=\frac{2b}{a-b};$$

$$(a^3-b^3)x-(a+b)^2(\sqrt{a}-\sqrt{b})=(a\sqrt{b}-b\sqrt{a})x^2,$$

$$x=\frac{a+b}{\sqrt{a}}, \text{ e } \frac{a+b}{\sqrt{b}};$$

$$a^3x^2+(1+b)a\sqrt{b}+a^2bx^2=(a^3\sqrt{b}+(a+b)(1+b))x,$$

$$x=\frac{a\sqrt{b}}{a+b}, \text{ e } \frac{1+b}{a^2};$$

$$1+\sqrt[3]{(2x+7)(4\sqrt{x}-7)}=2\sqrt{x}, x=9, \text{ e } 64;$$

$$x+4+\sqrt{\left(\frac{x+4}{x-4}\right)}=\frac{12}{x-4}, x=\pm 5, \text{ e } \pm 4\sqrt{2};$$

$$2\sqrt{x}+\sqrt{(4x+\sqrt{7x+2})}=1, x=1, \text{ e } \frac{1}{81};$$

$$\frac{5(3x-1)}{1+5\sqrt{x}}+\frac{2}{\sqrt{x}}=3\sqrt{x}; x=\frac{1}{9}, \text{ e } 4;$$

$$\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}=\frac{12a}{5\sqrt{a+x}}; x=\frac{4a}{5}, \text{ e } \frac{3a}{5};$$

$$\sqrt{3+\sqrt{x}} + \sqrt{4-\sqrt{x}} = \sqrt{7+2\sqrt{x}}; x = \frac{49 \pm \sqrt{97}}{8};$$

$$(a^{4m}+1)(\sqrt{x}-1)^2 = 2(x+1); x = \left(\frac{a^{2m} \pm 1}{a^{2m} \mp 1}\right)^2;$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} = 4; x = 1, \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5});$$

$$x^2 - 2x\sqrt{x} + 2x - \sqrt{x} = 6; x = 1, 4, e \frac{1}{2}(-5 \pm \sqrt{-11});$$

$$x^2(x+4) + 2x(x+4) = 2 - (x+4), x = -2, e -2 \pm \sqrt{3};$$

$$\frac{\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{1+x}} = \frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{1-x}}; x = 0, e \pm \frac{1}{2}\sqrt{3};$$

$$x^2 - 2x + 6\sqrt{x^2 - 2x + 5} = 11; x = 1, e 1 \pm 2\sqrt{15};$$

$$\frac{x-18}{\sqrt{x}-\sqrt{18}} + \frac{\sqrt{x-18}}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-18}}; x = 9 \pm \frac{27}{\sqrt{7}};$$

$$2x^2 - 2x + 2\sqrt{2x^2 - 7x + 6} = 5x - 6; x = 2, -\frac{3}{2}$$

$$\text{ed } \frac{1}{4}(7 \pm \sqrt{33});$$

$$ax = (\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1-x} + 1); x = 0, e \frac{4a(1-a^2)}{(1+a^2)^2};$$

$$x^2(x-2)^2 + 5x^2(x-2) = 2(x-2); x = 2, -1, e \pm \sqrt{3-1};$$

$$(x-4)^2 + 2(x-4) = \frac{2}{x} - 1; x = 2, e 2 \pm \sqrt{3};$$

$$x^2(x^2 - 18) = 4(x - 12); x = \pm 4, e \pm 2;$$

$$\text{Risolvete l'equazione } \frac{x+\sqrt{(x^2-y^2)}}{x-\sqrt{(x^2-y^2)}} = \frac{17}{4} - \frac{x-\sqrt{(x^2-y^2)}}{x+\sqrt{(x^2-y^2)}}$$

$$x(x+y) = 52 - \sqrt{(x^2+xy+4)}; \quad x = \pm 5, \quad y = \pm 4.$$

Risolvete $5y + \frac{1}{5} \sqrt{(x^2 - 15y - 14)} = \frac{x^2}{3} - 36$

$$\frac{x^2}{8y} + \frac{2x}{3} = \sqrt{\left(\frac{x^2}{3y} + \frac{x^2}{4}\right)} - \frac{y}{2}, \quad x=12, \text{ e } -\frac{19}{2}, \quad y=2, \text{ e } -\frac{19}{12}.$$

Risolvete le due equazioni

$$x - y + \sqrt{\left(\frac{x-y}{x+y}\right)} = \frac{20}{x+y}, \quad x^2 + y^2 = 34; \quad x=5, \quad y=3;$$

queste due altre

$$(x+y)(xy+1) = 18xy,$$

$$(x^2+y^2)(x^2y^2+1) = 208x^2y^2; \quad x=2\pm\sqrt{3}, \quad y=7\pm4\sqrt{3};$$

queste due

$$axy = x^2 - by^2, \quad x^2y^2 = x^2 + by^2;$$

$$x = \frac{\sqrt{(a\sqrt{(a^2+4b)} + \sqrt{(a^2+4b)^3})}}{2}.$$

Risolvendo le tre equazioni

$$x(y+z) = a, \quad y(x+z) = b, \quad z(x+y) = c$$

si ha

$$x = \pm \sqrt{\frac{(a-c+b)(a-b+c)}{2(c-a+b)}},$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{(b-c+a)(b-a+c)}{2(a-b+c)}},$$

$$z = \pm \sqrt{\frac{(c-a+b)(c-b+a)}{2(b-c+a)}}.$$

Risolvendo le tre

$$xyz = a^2(x + y), \quad xyz = b^2(y + z), \quad xyz = c^2(x + z)$$

si ha

$$x = \pm abc \sqrt{\frac{2(a^2b^2 + b^2c^2 - a^2c^2)}{(a^2b^2 + a^2c^2 - b^2c^2)(b^2c^2 + a^2c^2 - a^2b^2)}},$$

$$y = \pm abc \sqrt{\frac{2(b^2c^2 + a^2c^2 - a^2b^2)}{(a^2b^2 + a^2c^2 - b^2c^2)(a^2b^2 + b^2c^2 - a^2c^2)}},$$

$$z = \pm abc \sqrt{\frac{2(a^2b^2 + a^2c^2 - b^2c^2)}{(a^2b^2 + b^2c^2 - a^2c^2)(b^2c^2 + a^2c^2 - a^2b^2)}};$$

delle tre

$$x(x+y+z) = a^2, \quad y(x+y+z) = b^2, \quad z(x+y+z) = c^2$$

si ha

$$x = \frac{\pm a^2}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}}, \quad y = \frac{\pm b^2}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}}, \quad z = \frac{\pm c^2}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}};$$

delle quattro

$$xy = a, \quad yz = b, \quad xu = c, \quad xyxu = d$$

abbiamo

$$x = \pm \sqrt{\frac{abc}{d}}, \quad y = \pm \sqrt{\frac{ad}{bc}}, \quad z = \pm \sqrt{\frac{bd}{ac}}, \quad u = \pm \sqrt{\frac{cd}{ab}}.$$



PROBLEMI DI SECONDO GRADO.



A parte da Londra verso Jork; ed allo stesso istante parte B da Jork verso Londra. Essi s'incontrano per istrada, ed

A trova che ha percorso 30 miglia più di B. Ora dal punto d'incontro dice A di arrivare a Jork in 4 giorni, e B dice di arrivare a Londra in 9 giorni, e ciò viaggiando allo stesso modo che hanno viaggiato fino all'incontrarsi. Qual'è la distanza delle due dette città?

RISPOSTA. Miglia 150.

A, e B partono allo stesso tempo l'uno da Roma, e l'altro da Fuligno. S'incontrano per istrada, ed A trova di aver fatto 20 miglia più di B, e che in giorni $6\frac{2}{3}$ ha percorso tanta strada, quanta ne percorse B in tutto. Ora B continuando il viaggio collo stesso metodo arriva a Roma in 15 giorni. Si domanda la distanza delle due città.

RISPOSTA. Miglia 100.

Un mercante compra un certo numero di cavalli per 1200 monete. Se ne ritenne 15, e vende gli altri per 1080 lire, e guadagna 2 monete per ciascuno. Quanti cavalli comprò?

RISPOSTA. Cavalli 75.

Due mercanti vendono ciascuno delle canne di panno. Il secondo vende tre canne più del primo, e ricavano insieme 35 scudi. Ora il primo dice al secondo: dal vostro panno avrei ricavato 24 scudi. Il secondo poi dice al primo, ed io dal vostro avrei ricavato $12\frac{1}{2}$. Quante canne ha venduto ciascuno?

RISPOSTA. Se il primo ne ha vendute 15, il secondo ne ha vendute 18, e se il primo 5, il secondo 8.

Un negoziante dà una cambiale di scudi 6240 pagabile in 8 mesi, ed un'altra cambiale di scudi 7632 pagabile in 9 mesi. Ritira queste due cambiali, ed in loro vece ne dà una di scudi 14256 pagabile in un anno. Si domanda l'interesse annuo del 100.

RISPOSTA. Scudi 10.33 per cento all'anno.

Un tale avendo 13000 scudi li divide in due parti, che pone a frutto in guisa che ritira lo stesso per ambedue. Ora se facesse fruttare la prima parte, come la seconda, ritirerebbe

360 scudi d'interesse; e se facesse fruttare la seconda parte allo stesso saggio d'interesse annuo della prima ricaverebbe scudi 490. Si domandano i due interessi annui del 100.

RISPOSTA. Scudi 7, e 6.

Dividere due numeri a , b l'uno, e l'altro in due parti tali, che il prodotto d'una parte di a per una parte di b sia uguale a p ; e che il prodotto delle due altre parti di a , e di b sia uguale a p' .

Risolvere, e discutere il problema.

Trovare un numero tale, che il suo quadrato sia al prodotto delle differenze fra questo numero, e li due a , e b nel rapporto di $p : q$.

Risolvere, e discutere bene il problema.

Un tale compra un certo numero di canne di panno per 240 scudi. Se colla stessa somma avesse avuto 3 canne di meno, ciascuna canna gli sarebbe costata 4 scudi di più. Si domanda il numero delle canne comprate.

RISPOSTA. Le canne sono o 15, o — 12. Spiegare questa soluzione negativa.

Un negoziante sconta due cambiali, l'uno di 8776 scudi pagabile in 9 mesi; l'altra di 7488 pagabile in 8 mesi. Egli paga per la prima scudi 1200 di più che per la seconda. Si domanda il saggio dell'interesse del 100, con cui ha dovuto scontare.

RISPOSTA. Il detto saggio è 5. 86. Cosa dite della soluzione negativa?

Un tale compra un cavallo, che rivende per 24 luigi. In questa vendita perde tanto per 100 del prezzo della compra, che gli costa il cavallo. Si domanda per quanto ha comprato il cavallo.

RISPOSTA. L'ha pagato o 60, o 40 scudi.

All'estremità d'una linea di lunghezza a vi sono due lumi, l'uno ha alla distanza uno l'intensità b , e l'altro alla stessa distanza ha l'intensità c . Si domanda il punto della linea ugualmente rischiarato dai due lumi.

N. B. Fissate, che l'intensità della luce è in ragione inversa dei quadrati delle distanze.

Se si dice x la distanza fra il lume di chiarezza b , ed il punto domandato, e si dica p l'illuminazione a questo punto avremo la proporzione $b : p = x^2 : 1^2$. Cioè chiarezza alla distanza 1 sta alla chiarezza alla distanza x , come il quadrato di questa distanza è al quadrato di 1; dove si vede il rovescio richiesto dalla ragione inversa.

Il problema è capace di molta discussione ajutata dal caso fisico.

Si poteva far uso del metodo dato (A. G. §. 167.) di esprimere la ragione inversa. Nel nostro caso l'intensità p alla distanza x è in ragione inversa del quadrato di x ; dunque $px^2 = c$, ove c è una costante. Per determinarla, il problema fissa, che alla distanza 1 l'intensità è b : dunque nell'uguaglianza antecedente ponendo $x=1$ deve porsi $p=b$, onde la detta uguaglianza ci dà $c=b$, quindi $px^2=b$, e $p=\frac{b}{x^2}$: come abbiamo dalla proporzione superiore.

Due socii A, B hanno guadagnato 140 lire nel loro traffico. Il denaro di A fu in commercio tre mesi, ed il suo guadagno fu di 60 lire minore della sorte. Il denaro poi di B, che era di 50 lire maggiore di A fu in commercio per 5 mesi. Quale fu la sorte di A?

RISPOSTA. Fu scudi 100.

Due socii A, B hanno guadagnato in un negozio lire 18, e soldi 15. Il denaro di A fu in traffico 12 mesi, e ricevette 26 lire fra sorte e guadagno. B poi tenne le sue 30 lire in commercio per 17 mesi. Qual denaro ha posto A in commercio?

RISPOSTA. Ha posto 20 lire.

Tre mercanti A, B, C calcolando i loro guadagni trovavano, che hanno guadagnato insieme scudi 3037; che il guadagno di B aggiunto alla radice del guadagno di A dà scudi

871; ma se si aggiungesse alla radice del guadagno di C sarebbe 877. Quali sono i parziali guadagni?

RISPOSTA. Il primo ha guadagnato 900; il secondo 841, ed il terzo 1296.

Tre mercanti A, B, C uniscono i loro denari. La somma di A è minore di quella di B di 13 scudi. Le somme di B, e C unite danno scudi 175; il loro guadagno supera la somma totale di scudi 48, e la parte di A di questo guadagno fu scudi 78; quale fu la sorte e guadagno di ciascuno?

RISPOSTA. La sorte di A fu scudi 65.

Trovate due numeri tali, che tolti dalla somma dei loro quadrati diano 78; e la loro somma aggiunta al loro prodotto dia 39.

RISPOSTA. Sono 9, e 3.

Quali sono quei due numeri, il di cui prodotto è 6, e la loro somma aggiunta alla somma dei loro quadrati dà 18?

RISPOSTA. Sono 3, e 2.

Si cercano due numeri tali, che la loro differenza moltiplicata per la differenza de'loro quadrati dia 576; e la loro somma moltiplicata per la somma de'loro quadrati dia 2336.

RISPOSTA. I numeri sono 11, e 5.

Trovate i valori di x , y , z , v nelle seguenti equazioni:

$$x + y = 10, \quad v + z = 20, \quad xy + vz = 120,$$

$$(x + y + v)v + (y + u + z)y = 360.$$

RISPOSTA. $x = 3$, $y = 7$, $v = 9$, $z = 11$.

Quali sono due numeri, la di cui somma, il di cui prodotto, e differenza de'quadrati siano uguali fra loro.

RISPOSTA. Sono $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

Vi sono tre numeri i di cui quadrati hanno uguali differenze; la loro somma è 13, e la somma de'loro quadrati è 75. Quali sono questi numeri?

RISPOSTA. Sono 1, 5, 7.

Quali sono quei due numeri, la di cui somma moltiplicata pel più grande dia 77; e la di cui differenza moltiplicata per il minore dia 12?

RISPOSTA. Sono 7, 4.

Trovate due numeri tali, che la loro somma sia 5, e quella delle loro quinte potenze sia 275.

RISPOSTA. Sono 3, 2.

Vi sono tre numeri, le di cui differenze sono uguali; la loro somma è 9, e la somma della quarte potenze è 707. Trovate i numeri.

RISPOSTA. 1, 3, 5.

In una ricreazione uomini, e ragazzi spesero insieme 53 paoli. Ogni uomo spese tanti paoli quanti erano uomini nella società; e ciascun dei ragazzi spese un paolo. Ora se i numeri degli uomini, e ragazzi si fossero scambiati, la spesa regolata come innanzi sarebbe ascesa a paoli 23. Quanti erano gli uomini, ed i ragazzi?

RISPOSTA. I ragazzi erano 4.

Vi sono tre numeri, che hanno uguali differenze. Se il quadrato del più piccolo sia aggiunto al prodotto dei due più grandi, la somma sarà 576: ma se il quadrato del più grande sia aggiunto al prodotto degli altri due, la somma sarà 792. Quali sono i numeri?

RISPOSTA. Uno dei numeri è 18.

Trovate due numeri, la somma de' quali sia 14, e la somma dei loro quadrati moltiplicata per la somma delle loro terze potenze dia 72800.

RISPOSTA. I numeri sono 8, e 6.

Un tale giuocando vinse tanto quanto aveva portato; in un secondo giuoco vinse 5 paoli di più della radice di ciò, che aveva al principio di questo secondo giuoco. Nel terzo vinse il quadrato di tutto ciò che aveva, e con ciò si trovò 112 paoli, ed 8 bajocchi. Quanto aveva al principio?

RISPOSTA. Aveva 18 paoli.

Trovare quattro numeri, la di cui somma sia 32; la som-

ma de' quadrati 340, la somma delle terze potenze sia 4256, e che siano in proporzione geometrica.

RISPOSTA. Se i numeri sono x, y, z, u , troverete
 $x + z = 18, y + u = 14.$

~~-----~~

CAPO TERZO

DELLE POTENZE MONOMIE, E DE' RADICALI,

~~-----~~

Avendo trattato abbastanza delle potenze seconde, ora trattiamo delle potenze qualunque, e queste monomie. Già abbiamo detto (§. 6, 7, 8, 9.) cosa è potenza di una quantità di un dato grado, e di qui è venuto il metodo di trovarla. Consiste questo nel ripetere la quantità come fattore tante volte, quanto è il grado della potenza, o nel moltiplicarla in se stessa tante volte meno una quanto è il detto grado.

Riguardo alle operazioni di somma, sottrazione, moltiplicazione, e divisione delle potenze nulla si deve aggiungere a ciò che si è detto nell'Aritmetica generale intorno a queste operazioni fatte sulle quantità coll'esponente, perchè cotali quantità sono potenze.

77. Potenze omogenee si dicono quelle, che hanno la stessa lettera, e lo stesso esponente; quando una, o ambedue queste condizioni manchino le potenze si dicono eterogenee. Sono omogenee $5a^5, 2a^5; a^m b^n, a^m b^n$; e sono eterogenee $a^n, b^n; a^n, a^r; a^m b^n, a^m c^n; a^m b^n, a^m b^r$.

78. Nella somma, e sottrazione richiedendosi per eseguirle, che le potenze siano omogenee, dalla regola antecedente si conosce quando si potranno eseguire o no le dette operazioni.

79. Nella moltiplicazione delle potenze, se queste avranno la stessa lettera, nel prodotto si scriverà la lettera comune dandogli per esponente la somma degli esponenti dei fattori. Così $a^m \cdot a^n \cdot a^p = a^{m+n+p}$. Infatti nella moltiplicazione si debbono unire senza segno tutte le lettere; ma in a^m vi sono m lettere a , in a^n , n lettere a , in a^p , p lettere a , dunque nel prodotto vi saranno $m + n + p$ fattori a , o a ripetuta $m + n + p$ volte come fattore.

80. Nella divisione di due potenze, se queste abbiano la stessa lettera, si scrive la lettera comune dandogli per esponente l'esponente del dividendo meno quello del divisore: quindi $\frac{a^m}{a^n}$, se $m > n$, darà a^{m-n} . Infatti nella divisione si tolgono le lettere comuni: dunque togliendo le n lettere a comuni ne rimarranno $m - n$: ossia nel quoto la a sarà ripetuta $m - n$ volte come fattore.

81. Si supponga ora $m = n$ si vuol dire, che $\frac{a^m}{a^n}$ dà a^{m-n} , o a^0 : ma evidentemente $\frac{a^m}{a^n} = 1$, dunque si conchiude $a^0 = 1$: ma ciò è falso. Infatti la sottrazione degli esponenti è fondata nel togliere i fattori comuni al dividendo, ed al divisore: ora questo togliere i fattori comuni in fondo è avere tanti quoti unità moltiplicate insieme. Se si abbia $\frac{abcd}{bc}$, il quoto è cd , perchè $abcd$ è lo stesso che $ad \cdot bc$, dunque diviso il prodotto $ad \cdot bc$ pel fattore bc deve venire l'altro fattore ad : ma viene lo stesso se i due fattori b, c di $adbc$ si dividono per i due fattori b, c del divisore bc : dunque il quoto sarà ancora $ad \cdot 1 \cdot 1$ ossia ad .

Sia ora $\frac{a^m}{a^n}$. In questo togliere i fattori comuni al dividendo, ed al divisore è dividere i fattori a in $a \cdot a \cdot a \dots$, o a^m del dividendo per i fattori a in $a \cdot a \cdot a \dots$, o a^n del

divisore, ora è evidente, che avremo di quoto 1.1.1.1... ossia 1, come lo abbiamo subito dicendo, che a^m in a^n entra una volta: dunque la divisione $\frac{a^m}{a^m}$ non dà che 1, e non a^0 . Ciò non ostante riterremo a^0 come simbolo arbitrario dell'unità; ed a ragione come mero simbolo di convenzione, perchè a^0 non può essere mai una potenza. La potenza di una quantità è la ripetizione della quantità come fattore un certo numero di volte; ora a^0 se fosse vera quantità esprimerebbe la a ripetuta zero volte, che è una espressione senza significato.

82. Nella espressione $\frac{a^m}{a^n}$ si suppone anche $m < n$. Sia per esempio $n = m + r$ sarà $\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^{m+r}}$. Semplificando questa frazione col dividere i due termini per a^m avremo $\frac{a^m}{a^{m+r}} = \frac{1}{a^r}$: ma, si soggiunge, facendo la sottrazione degli esponenti si ha

$$\frac{a^m}{a^{m+r}} = a^{-r} :$$

dunque si conchiude

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r} :$$

cioè una quantità coll'esponente negativo è uguale all'unità divisa per la stessa quantità coll'esponente positivo.

Ma qui ancora se si vuol ritenere la sottrazione degli esponenti nella divisione non si può supporre, che l'esponente del numeratore sia minore dell'esponente del denominatore. Per mostrar ciò si riprenda la frazione $\frac{a^m}{a^{m+r}}$.

Intendo come innanzi, che il togliere i fattori comuni al dividendo, ed al divisore è aver di quoto altrettante unità;

quindi si vede, che il risultamento sarà solamente $\frac{1}{a^r}$, come per la riduzione della frazione a più semplice espressione, e non a^{-r} .

83. Ritorna poi qui il discorso consimile all'antecedente (§. 81.), che la potenza di a è la ripetizione di questa quantità un certo numero di volte, ma se a^{-r} fosse potenza si dovrebbe dire, che a si deve ripetere meno r volte, che è una espressione senza significato. Ciò non ostante si ritiene a^{-r} per simbolo di convenzione di $\frac{1}{a^r}$: quindi si stabilisca, che *il simbolo della frazione espressa dall'unità divisa per una potenza, è la stessa potenza cambiato il segno al suo esponente.*

84. Così ancora se si ha $\frac{b}{a^r}$ considerandosi questa quantità uguale a $b \cdot \frac{1}{a^r}$, se si ponga invece di $\frac{1}{a^r}$ il suo simbolo a^{-r} , sarà $\frac{b}{a^r} = b a^{-r}$, e quindi si stabilisce, che *in una frazione il denominatore si porta a moltiplicare il numeratore cambiando il segno all'esponente. Con questa regola si conoscono le uguaglianze*

$$\frac{b}{a} = b a^{-1}; \quad \frac{bc}{a^2 d^3} = b c a^{-2} d^{-3}; \quad \frac{a}{d^{-m}} = a d^m.$$

85. Se fissiamo, che queste espressioni cogli esponenti negativi sono meri simboli delle quantità che abbiamo come fattori nei denominatori cogli esponenti positivi, si possono ritenere cotali simboli; anzi è utile il ritenerli e servirsene, perchè così le frazioni semplici, e le frazioni di potenze si riducono ad interi. Ed invero invece della frazione semplice $\frac{a}{b}$ possiamo porre $a b^{-1}$; ed in luogo di $\frac{a^3}{c^7}$, che è frazione di potenza, possiamo scrivere $a^3 c^{-7}$.

Con questo non è necessario di ricordarci delle operazioni sulle frazioni, non avendosi più queste per mezzo delli nostri simboli.

86. Per servirci però di questi simboli egli è necessario di provare prima, che tanto è operare su di essi, che sopra le reali quantità; e ciò è facile. Si debba moltiplicare $\frac{a^7}{b^8}$ per $\frac{b^5}{a^9}$. Ridotte queste frazioni a simboli abbiamo a^7b^{-8} , b^5a^{-9} . Si moltiplichino queste come se fossero reali potenze, ed il prodotto sarà $a^{-2}b^{-3}$, ossia passando dal simbolo alla real quantità il prodotto sarà $\frac{1}{a^2b^3}$.

Ora moltiplicate le due frazioni di potenze $\frac{a^7}{b^8}$, $\frac{b^5}{a^9}$ colla regola delle frazioni abbiamo $\frac{a^7b^5}{a^9b^8} = \frac{1}{a^2b^3}$, come si è avuto coi simboli.

87. Sia da dividersi $\frac{a^{17}}{b^{12}}$ per $\frac{a^{18}}{b^7}$; coi simboli dovremo dividere $a^{17}b^{-12}$ per $a^{18}b^{-7}$, e fatta la divisione, come nelle reali potenze, sarà $a^{-1}b^{-5}$, ossia passando alla vera quantità sarà $\frac{1}{ab^5}$, che viene appunto dividendo $\frac{a^{17}}{b^{12}}$ per $\frac{a^{18}}{b^7}$ colla regola della divisione delle frazioni.

Riguardo alle operazioni sulle potenze monomie ci rimane l'innalzamento a potenza delle potenze.

88. Abbiamo stabilito (§. 9.), che una quantità s'innalza ad una data potenza moltiplicandola in se stessa tante volte meno una per quante unità sono nella potenza. Questa regola si ritiene nell'innalzamento dei numeri. Così se 2 si deve elevare alla 5 potenza si moltiplica in se stesso 4 volte.

89. Le potenze poi si elevano a potenza moltiplicando per questa i loro esponenti. Così $(a^m)^n = a^{mn}$. Infatti $(a^m)^n = a^m \cdot a^m \cdot a^m \cdot a^m \dots$, ove a^m si deve ripetere come fattore

m volte. Ora nella moltiplicazione delle potenze della stessa lettera si scrive una volta la lettera dandogli per esponente la somma degli esponenti dei singoli fattori; dunque nel nostro prodotto si scriverà una volta la lettera a , e gli si darà per esponente la somma di tutti gli m , questi sono di numero n , dunque l'esponente di a nel detto prodotto sarà mn .

90. Se un prodotto di potenze si dovrà elevare ad una potenza, per questa si moltiplicheranno i loro esponenti. Così $(a^m b^n c^r)^p = a^{mp} b^{np} c^{rp}$. Infatti per elevare alla potenza p il prodotto $a^m b^n c^r$ si deve questo ripetere p volte come fattore; ora è chiaro, che con questo ogni fattore è ripetuto p : dunque ogni fattore deve essere elevato alla potenza p , ciò che si ottiene, pel teorema antecedente, moltiplicando per p gli esponenti dei fattori stessi.

91. Quindi se nel monomio da elevarsi a potenza vi sia un coefficiente questo si moltiplicherà tante volte in se stesso quante sono le unità meno una della potenza cui si eleva il monomio: dunque $(3a^4b^2)^4 = 81a^{16}b^8$.

92. Se si propone ad elevare a potenza una frazione ci ricorderemo (§. 27), che ciò si dice impropriamente, perchè a dir vero della data frazione successivamente si prendono tante frazioni ad essa uguali quante sono le unità meno una dell'esponente, cui si dice elevarsi la frazione.

Quindi $\left(\frac{a}{b}\right)^m$ a rigore vuol dire, che della frazione $\frac{a}{b}$ si prendano successivamente $m - 1$ frazione $\frac{a}{b}$. Così an-

cora $\left(\frac{2}{3}\right)^7$ vuol dire, che del $\frac{2}{3}$ si debbono prendere successivamente 6 volte due terze parti. Ci ricorderemo, che il vero risultamento è la frazione delle potenze dei due termini della frazione proposta, e potenze uguali al numero delle frazioni, che si sono prese della frazione

zione data cresciuto d'una unità: quindi

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}, \left(\frac{a^n}{b^r}\right)^m = \frac{a^{nm}}{b^{mr}}, \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8}{125}.$$

Quindi non è maraviglia, che questi risultamenti siano minori della frazione data, e tanto minori per quanto è più grande la potenza cui s'inalzano i suoi due termini, perchè tante più frazioni si prendono della frazione stessa. Qui ancora invece d'inalzare a potenza la frazione si può elevare a potenza il suo simbolo. Infatti

$$\left(\frac{a^n}{b^r}\right)^m = (a^n b^{-r})^m = a^{nm} b^{-mr} = \frac{a^{nm}}{b^{mr}},$$

come innanzi.

93. Abbiamo veduto (§. 17.), che una quantità positiva, e negativa si può elevare alla seconda potenza, e che in ambedue i casi il risultamento è positivo. Da ciò viene che una quantità positiva, e negativa si può elevare ad una potenza qualunque. Pel segno del risultamento distingueremo due casi, o l'esponente cui si deve elevare è pari, o è dispari. Se è pari la quantità o positiva, o negativa si dovrà ripetere come fattore un numero pari di volte, ossia si dovrà ripetere tante paja di volte come fattore, quante sono le unità, che vengono dalla metà dell'esponente; ma ogni pajo di fattori (§. 17.) dà il positivo, dunque il total risultamento sarà positivo.

94. Se poi la quantità positiva, o negativa sia elevata a potenza dispari, il risultamento avrà il segno della quantità elevata a potenza. Infatti la quantità elevata a potenza dispari è ripetuta come fattore un numero pari di volte, ed un'altra volta: ora la ripetizione pari dà il positivo (§. 93.), qualunque sia il segno della quantità, dunque l'ultima ripetizione come fattore farà sì, che il risultamento sia positivo se la quantità è positiva; sia negativo se questa è negativa.

95. I due casi ora considerati sono nei due esempi:

$$(\pm a^m)^{2r} = a^{2mr}, \quad (\pm a^m)^{2r+1} = \pm a^{2mr+m}.$$

Nel primo caso la quantità è elevata all'esponente pari $2r$, e quantunque affetta di doppio segno ha dato il positivo; nel secondo è elevata a potenza dispari $2r + 1$, e nel risultamento ha dato i segni proprii.

Ecco dunque la regola generale per elevare i monomii a potenza.

96. *Un monomio si eleva a potenza elevando ciascun suo fattore, e se è frazione elevando ambedue i suoi termini. Il coefficiente si eleva moltiplicandolo in se stesso tante volte meno una quante unità sono nell'esponente cui si eleva; i fattori poi si elevano moltiplicando i loro esponenti per l'esponente della potenza, cui si eleva il prodotto. Riguardo ai segni; se la potenza è pari il risultamento è sempre positivo, se è dispari il risultamento ha il segno della quantità elevata a potenza.*

Ecco nuovi esempi.

$$\left(\frac{-a^3 b^4}{3c^5}\right)^3 = \frac{-a^9 b^{12}}{27c^{15}}, \quad \left(\frac{-2a^4 b^7}{5c^9}\right)^4 = \frac{16a^{16} b^{28}}{625c^{36}}.$$

97. Nel (§. 6.) abbiamo veduto cosa è radice di una quantità. Da ciò si ricava la regola per estrarre la radice da un monomio. *Riguardo al coefficiente si cerca il numero, che elevato al grado della radice dia lo stesso coefficiente. Riguardo poi al monomio algebrico, si estrae la radice di ciascun fattore, e ciò dividendo i loro esponenti per l'esponente della radice. Se il monomio sia fratto si estrae la radice dai due termini della frazione. Pel segno poi del risultamento; se l'esponente della radice è pari, ed il monomio da cui si estrae la radice è positivo, il segno della radice sarà più e meno, perchè con ambedue questi segni la radice elevata all'esponente pari del suo grado dà il positivo. Se poi, essendo la radice pari, il monomio da cui si estrae è negativo, la radice sarà*

immaginaria, perchè dall'elevare a potenza pari una quantità positiva e negativa non può venire che il positivo. Finalmente, se l'esponente della radice è dispari, il segno del risultato è quello del monomio da cui si estrae la radice.

Ecco gli esempi:

$$\sqrt[4]{16a^{18}c^{40}} = \pm 2a^4c^{10}$$

$$\sqrt[6]{\frac{64a^{12}b^6}{c^{18}}} = \pm \frac{2a^2b}{c^3}$$

$$\sqrt[4]{-a^8} \text{ è immaginaria } \bullet$$

$$\sqrt[3]{27a^9b^{12}} = 3a^3b^4$$

$$\sqrt[5]{\frac{-32a^{15}}{b^{25}}} = -\frac{2a^3}{b^5}.$$

98. Da ciò che abbiamo detto (§. 97.) si ricava, che in genere per quantità immaginaria s'intende la radice pari di quantità negativa.

99. Se la radice non si può estrarre si esprime col noto segno della radice, e questa espressione si dice *radicale*: dunque per radicale s'intende l'espressione di una radice, che non si può estrarre. Radicali sono

$$\sqrt[m]{a}, \quad \sqrt[3]{a^2}, \quad \sqrt[5]{7}.$$

Pel calcolo di questa nuova specie di quantità è duopo stabilire alcuni teoremi.

100. La radice di un grado qualunque d'un prodotto è uguale al prodotto delle radici dello stesso grado dei fattori.

$$\text{Così } \sqrt[m]{abc} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} \cdot \sqrt[m]{c}. \text{ Infatti il secondo mem-}$$

bro è la radice m di abc se elevata alla potenza m^{ma} da abc (§. 12.), ma elevandolo alla potenza m^{ma} si eleva ciascun fattore, e questa potenza m^{ma} distrugge le radici m^{me} , dunque si ha veramente abc .

101. La radice d'un grado qualunque d'una frazione si ottiene estraendola da' suoi due termini.

$$\text{Così } \sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}. \text{ Si avvertirà come nel (§. 31.),}$$

che per mera convenzione, e conoscendone il significato si dice di estrarre la radice da una frazione estraendo la radice dai suoi due termini, e che di questa operazione (§. 29) abbiamo bisogno nella soluzione delle equazioni di grado superiore al primo. Infatti se fosse $x^m = \frac{a}{b}$ si avrebbe

$$bx^m = a, \quad x\sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a}, \quad \text{ed } x = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}.$$

102. Moltiplicando, e dividendo l'esponente del segno della radice, e l'esponente della quantità sotto il vincolo per una stessa quantità il radicale non cambia di valore.

Così sarà $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[mr]{a^{nr}}$, per la prima parte del teorema. Scrivendo a rovescio, l'equazione $\sqrt[mr]{a^{nr}} = \sqrt[m]{a^n}$ esprime la seconda parte, poichè da $\sqrt[mr]{a^{nr}}$ si passa a $\sqrt[m]{a^n}$ dividendo ambedue gli esponenti per la stessa quantità r .

103. Per dimostrare il teorema provo, che il moltiplicare l'esponente della quantità sotto il vincolo per r , che è innalzare la stessa quantità alla potenza r , è pure innalzare alla potenza r il radicale. Infatti

$$(\sqrt[m]{a^n})^r = \sqrt[m]{a^n} \cdot \sqrt[m]{a^n} \cdot \sqrt[m]{a^n} \dots,$$

cioè $\sqrt[m]{a^n}$ ripetuto r volte come fattore, ora il prodotto (§. 100.) delle radicali dello stesso esponente è uguale alla radice con questo esponente del prodotto delle quantità sotto i vincoli, dunque $(\sqrt[m]{a^n})^r = \sqrt[m]{a^n \cdot a^n \cdot a^n \dots}$, ove a^n essendo ripetuto r volte ci darà finalmente $(\sqrt[m]{a^n})^r = \sqrt[m]{a^{nr}}$.

104. Dimostro inoltre, che il moltiplicare per r l'esponente m della radice in $\sqrt[m]{a^n}$ è estrarre da questa la radice r^{ma} . Infatti si è dimostrato, che $(a^n)^r = a^{nr}$: dunque tanto è inalzare a all'esponente m , e poi all'esponente r , quanto elevarla subito all'esponente mr : dunque tanto è estrarre da a successivamente prima la radice m^{ma} , e poi la radice r^{ma} , che estrarre subito la radice mr^{ma} : queste due operazioni si esprimono coll'uguaglianza $\sqrt[r]{\sqrt[m]{a^n}} = \sqrt[mr]{a^n}$: dunque moltiplicare per r l'esponente m in $\sqrt[m]{a^n}$ è estrarre la radice r^m da $\sqrt[m]{a^n}$.

105. Dopo queste due dimostrazioni diremo, che moltiplicando l'esponente della quantità sotto il vincolo per r si eleva il radicale alla potenza r , e moltiplicando per r l'esponente del vincolo si estrae dal radicale la radice r^{ma} : dunque facendo nello stesso radicale queste due operazioni il radicale non cambia di valore.

106. Dalla dimostrazione del teorema antecedente ricaviamo.

I. Che i radicali dello stesso esponente si moltiplicano col moltiplicare le quantità sotto i vincoli e dare al prodotto il segno radicale coll'esponente comune. Ciò si ricava dall'uguaglianza dimostrata (§.103.) $\sqrt[m]{a^n} \cdot \sqrt[m]{a^n} \cdot \sqrt[m]{a^n} \dots = \sqrt[m]{a^n \cdot a^n \cdot a^n \dots}$

II. Un radicale si eleva a potenza elevando la quantità sotto il vincolo: perchè si è dimostrato (§.103.) $(\sqrt[m]{a^n})^r = \sqrt[mr]{a^n}$.

III. Moltiplicando l'esponente del segno della radice per r

si estrae la radice r^{ma} del radicale. Ciò viene dall'uguaglianza dimostrata (§. 104.) $\sqrt[m]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mr]{a}$.

107. Il raziocinio, che dimostra questa uguaglianza si estende al caso, che più radici successivamente si estraggano da una stessa quantità, ciò che si esprime scrivendo

$\sqrt[p]{\sqrt[q]{\sqrt[r]{a}}} = \sqrt[pqr]{a}$. Infatti se è vero, che $\sqrt[q]{\sqrt[r]{a}} = \sqrt[qr]{a}$, sarà

anche vero $\sqrt[p]{\sqrt[q]{\sqrt[r]{a}}} = \sqrt[p]{\sqrt[qr]{a}}$; ora per l'antecedente

uguaglianza (§.106.III.) il secondo membro è $\sqrt[pqr]{a}$; dunque

$$\sqrt[p]{\sqrt[q]{\sqrt[r]{a}}} = \sqrt[pqr]{a}.$$

108. Il primo teorema (§. 100.) serve per portar fuori del radicale quel fattore, che si può. Sia $\sqrt[3]{a^8 b^{19}}$ avremo

$$\sqrt[3]{a^8 b^{19}} = \sqrt[3]{a^6 b^{18}} a^2 b = (\text{pel detto teorema primo})$$

$$\sqrt[3]{a^6 b^{18}} \cdot \sqrt[3]{a^2 b} = a^2 b^6 \sqrt[3]{a^2 b}.$$

Avremo ancora

$$\sqrt[4]{\frac{32a^7 b^{21}}{243c^{17} m^{19}}} = \sqrt[4]{\frac{16a^4 b^{20} \cdot 2a^3 b}{81c^{16} m^{16} \cdot 3cm^3}} =$$

$$\sqrt[4]{\frac{16a^4 b^{20}}{81c^{16} m^{16}}} \cdot \sqrt[4]{\frac{2a^3 b}{3cm^3}} = \frac{2ab^5}{3c^4 m^4} \sqrt[4]{\frac{2a^3 b}{3cm^3}}.$$

109. Per portare fuori del vincolo radicale i fattori, si dividono gli esponenti di questi per l'esponente della radice; i quoti si danno alle lettere dei fattori, e si portano fuori del vincolo, ed i residui si danno alle stesse lettere, e si lasciano dentro. Se la quantità sotto il vincolo è fratta si fa lo stesso nel numeratore, e nel denominatore. Se vi è un coefficiente si spezza, se si può, in due fattori, da uno dei quali si possa e-

strarre la radice esattamente. Allora si estrae questa radice, e si porta fuori del vincolo, e l'altro fattore si lascia dentro.

110. Da ciò è chiaro, che se una quantità da fuori del vincolo si voglia portar dentro, si dovrà elevare all'esponente del vincolo, e moltiplicarla per la quantità, che è dentro, e ciò perchè quando si porta fuori si estrae una radice di grado uguale all'esponente del radicale.

111. Dal terzo teorema (§.102.) viene il metodo di ridurre i radicali allo stesso esponente. Ciò si eseguisce moltiplicando gli esponenti di tutti i radicali, e dando questo per esponente comune ai nuovi radicali; la quantità poi di ciascun vincolo si eleva ad un esponente, che sarà il prodotto degli esponenti degli altri vincoli. Così i radicali $\sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt{a}$, $\sqrt[4]{a^3}$ si

riducono a $\sqrt[24]{a^{16}}$, $\sqrt[24]{a^{12}}$, $\sqrt[24]{a^{18}}$. Si vede, che con questo metodo l'esponente di ciascun radicale, e l'esponente della quantità sotto il vincolo si moltiplicano per il prodotto degli esponenti degli altri vincoli, ciò che si può fare pel terzo teorema. Così nel primo radicale $\sqrt[3]{a^2}$ il 3 ed il 2 si sono moltiplicati per 8, che è il prodotto degli esponenti degli altri due radicali.

Posti questi teoremi andiamo alle operazioni sopra i radicali.

112. E prima si fissi, che per radicali omogenei intendiamo radicali degli stessi esponenti, e colle quantità stesse sotto i vincoli. Quindi radicali omogenei sono $\sqrt[3]{a^2b}$, $\sqrt[3]{a^2b}$; ma sono eterogenei $\sqrt[3]{a^4}$, $\sqrt[3]{a^2}$; $\sqrt[5]{ab^3}$, $\sqrt[5]{a^2b^3}$; $\sqrt[6]{a^2b}$, $\sqrt[7]{a^2b}$.

113. La somma e sottrazione si eseguisce nei radicali omogenei facendo la riduzione dei coefficienti, avendo prima mutato i segni al minutore nella sottrazione. Quindi la somma di

$$3a^2\sqrt[3]{a}, - 5a^2\sqrt[3]{a}, 7a^2\sqrt[3]{a} \text{ è } 5a^2\sqrt[3]{a}.$$

Se da $5a\sqrt[3]{a^4} - 7ab\sqrt[5]{a^3}$ si sottrae $-8a\sqrt[3]{a^4} - 3ab\sqrt[5]{a^3}$ il risultamento sarà $13a\sqrt[3]{a^4} - 4ab\sqrt[5]{a^3}$.

114. Nella moltiplicazione vi sono tre casi. Primo quando qualche quantità che moltiplica i radicali non è radicale, ossia, come si dice, è razionale. Secondo quando i radicali da moltiplicarsi hanno lo stesso esponente. Terzo quando hanno diverso esponente.

115. Sia per il primo caso a^3 da moltiplicarsi per $a^2\sqrt[5]{a^2}$: il prodotto si fa moltiplicando fuori del vincolo per la quantità razionale. Il nostro prodotto sarà $a^5\sqrt[5]{a^2}$. Così $3a^3$ per $\sqrt[4]{a}$ darà $3a^3\sqrt[4]{a}$.

116. Il prodotto dei radicali dello stesso esponente si fa per la regola (§. 106, 1.). Così

$$2a\sqrt[3]{a^2} \cdot 3a^2\sqrt[3]{a^4} \cdot 4a^4\sqrt[3]{a} = 24a^7\sqrt[3]{a^7} = 24a^9\sqrt[3]{a}.$$

117. Se i radicali da moltiplicarsi abbiano diverso esponente si riducono allo stesso esponente (§. 111.), e poi si fa la moltiplicazione colla regola antecedente (§. 116.). Così

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[5]{a} \cdot \sqrt[5]{a^3} &= \sqrt[30]{a^{20}} \cdot \sqrt[30]{a^{15}} \cdot \sqrt[30]{a^{18}} = \\ \sqrt[30]{a^{20} \cdot a^{15} \cdot a^{18}} &= \sqrt[30]{a^{53}} = a\sqrt[30]{a^{23}}. \end{aligned}$$

118. Si può dare questa regola per la moltiplicazione dei radicali di diverso esponente. Si scrive la radice con un esponente, che è il prodotto di tutti gli esponenti dei radicali, e sotto il segno si pone il prodotto di tutte le quantità che sono sotto i vincoli ciascuna elevata al prodotto degli esponenti degli altri radicali.

Infatti abbiamo trovato

$$\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[5]{a} \cdot \sqrt[5]{a^3} = \sqrt[30]{a^{20} \cdot a^{15} \cdot a^{18}},$$

ove nel prodotto la radice ha per esponente 30, che è il prodotto di tutti gli esponenti 3, 2, 5 dei radicali, e sotto il segno della radice si è posto il prodotto di tutte le quantità a^3 , a , a^5 che erano sotto i vincoli dei dati radicali, ciascuna elevata agli esponenti degli altri. Così a^3 è stato elevato al 10, a elevato al 15 a^5 elevato al 6.

119. Nella divisione ancora vi sono tre casi. Primo quando una delle due quantità della divisione è razionale; secondo quando ambedue sono radicali dello stesso esponente; terzo quando abbiano esponenti diversi.

Nel secondo caso si farà il quoto delle quantità sotto i due vincoli, ed al risultamento si darà il segno della radice coll' esponente comune. Ciò viene dal teorema

(§. 111.), ove si è stabilito $\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$: dunque la

divisione di $\sqrt[m]{a}$ per $\sqrt[m]{b}$ dà $\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$, cioè il quoto delle due quantità a , e b sotto i due vincoli, e questo quoto posto sotto il segno della radice coll'esponente comune m : da ciò viene

$$\frac{\sqrt[3]{a^5}}{\sqrt[3]{a^4}} = \sqrt[3]{a}; \quad \frac{\sqrt[7]{a^4 b^5}}{\sqrt[7]{a^5 b^3}} = \sqrt[7]{\frac{b^2}{a}}.$$

120. *Se una delle due quantità della divisione è razionale gli si dà il segno della radice coll'esponente del radicale dell'altra quantità, ed allo stesso tempo per compensare l'errore, la quantità razionale si eleva all'esponente stesso. Ridotto così il caso a quello della divisione di due radicali dello stesso esponente, si eseguirà l'operazione colla regola antecedente.* Così

$$\frac{a^4}{\sqrt[5]{a^2}} = \frac{\sqrt[5]{a^{20}}}{\sqrt[5]{a^2}} = \sqrt[5]{a^{18}} = a^3 \sqrt[5]{a^3};$$

$$\frac{\sqrt[7]{a^3}}{a^4} = \frac{\sqrt[7]{a^3}}{\sqrt[7]{a^{28}}} = \sqrt[7]{\frac{1}{a^{25}}} = \frac{\sqrt[7]{1}}{\sqrt[7]{a^{25}}} = \frac{1}{a^3 \sqrt[7]{a^4}}.$$

Qui invece della radice 7^{ma} di 1 si è posto uno, perchè come qualunque potenza di 1 è sempre 1, così la radice di qualunque grado di uno è uno. Qualunque potenza poi di 1 è uno, perchè uno moltiplicato in se stesso quante volte si voglia dà l'unità.

121. Finalmente se i due radicali della divisione sono di diverso esponente si ridurranno allo stesso (§. 111.) e si farà la divisione, come nel secondo caso proposto (§. 119.). Così

$$\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[5]{a^3}} = \frac{\sqrt[15]{a^{10}}}{\sqrt[15]{a^9}} = \sqrt[15]{a};$$

$$\frac{\sqrt[7]{a}}{\sqrt[7]{a^6}} = \frac{\sqrt[14]{a^7}}{\sqrt[14]{a^{12}}} = \sqrt[14]{\frac{1}{a^5}} = \frac{1}{\sqrt[14]{a^5}}.$$

122. Si può dare anche questa regola più breve. La divisione di due radicali di diverso esponente si eseguisce dividendo la quantità sotto il vincolo del dividendo elevata al grado del vincolo del divisore per la quantità sotto il vincolo del divisore elevata al grado del radicale dividendo, e dando al risultamento il segno della radice con un esponente, che sia il prodotto degli esponenti dei due radicali dati a dividersi.

Infatti secondo la regola abbiamo

$$\frac{\sqrt[r]{a^k}}{\sqrt[p]{b^p}} = \frac{\sqrt[mr]{a^{kr}}}{\sqrt[mr]{a^{mp}}} = \sqrt[mr]{\frac{a^{kr}}{a^{mp}}} :$$

dunque si è diviso a^n sotto il vincolo del dividendo elevato ad r esponente del vincolo del divisore, per b^p sotto il vincolo del divisore elevato all'esponente m del radicale dividendo, ed al quoto si è dato il segno della radice col l'esponente mr , che è il prodotto dei due esponenti dei radicali.

123. Si vuol dimostrare, che un radicale si può rappresentare con una potenza fratta. Così si vuol dimostra-

re, che $\sqrt[m]{a^n}$ è uguale ad $a^{\frac{n}{m}}$, cioè uguale alla quantità sotto il vincolo diviso il suo esponente per l'esponente della radice: ma la dimostrazione è falsa; e tale deve essere, perchè la potenza di una quantità è la ripetizione della quantità come fattore un numero di volte uguale alle unità del suo esponente, ora non s'intende cosa voglia dire una quantità ripetuta un numero fratto di volte come fattore.

Per es. $a^{\frac{2}{3}}$ vorrebbe dire la a ripetuta due terze volte.

124. Ciò non ostante adottiamo questa espressione come simbolo di convenzione del radicale, ma provando, come si fece nei simboli (§. 86, 87.) delle frazioni di potenze, che si ottiene lo stesso tanto facendo le operazioni nei radicali, quanto nei loro simboli. Anzi se ciò sia provato ridurremo alle regole delle operazioni delle potenze le regole delle operazioni dei radicali; e quindi ossia, che le potenze siano in frazioni, o che le potenze si trovino in radicali, sempre eseguiremo nelle operazioni le regole delle potenze; per esempio di sommare gli esponenti nella moltiplicazione della stessa lettera; della sottrazione degli esponenti nella divisione delle potenze della stessa lettera; della moltiplicazione degli esponenti nell'innalzamento a potenza delle potenze.

Ripetiamo dunque le operazioni sopra i radicali, e facciamo vedere come i risultamenti riescono gli stessi col fare le operazioni sopra i loro simboli.

125. Fissiamo dunque, che il simbolo di un radicale è la quantità sotto il vincolo diviso il suo esponente per l'esponente della radice. Così

$$\sqrt[3]{a^2}, \sqrt[5]{a^2b^3}, \sqrt{\frac{ab^3}{c}}$$

hanno per simboli

$$a^{\frac{2}{3}}, a^{\frac{2}{5}} b^{\frac{3}{5}}, \frac{a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{3}{2}}}{c^{\frac{1}{2}}}.$$

Dopo ciò si debbano moltiplicare i radicali $\sqrt[3]{a^2}, \sqrt[5]{a^4}, \sqrt{a^5}$, per la regola data (§. 118.) il prodotto sarà $\sqrt[30]{a^{119}}$. Ora ridotti a simboli i tre radicali si moltiplicheranno le tre espressioni $a^{\frac{2}{3}}, a^{\frac{4}{5}}, a^{\frac{5}{2}}$ come se fossero tre potenze, onde il prodotto sarà $a^{\frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{5}{2}}$. Sommate le tre frazioni, avendole prima ridotte allo stesso denominatore, il prodotto sarà rappresentato da $a^{\frac{119}{30}}$, ossia, passando dal simbolo al radicale, il risultamento sarà $\sqrt[30]{a^{119}}$, come si è avuto col prodotto dei radicali.

126. Si voglia dividere a^3 per $\sqrt[5]{a^4}$; per la regola dei radicali (§. 120.) il quoto sarà $\sqrt[5]{a^{11}}$. Coi simboli si dividerà a^3 per $a^{\frac{4}{5}}$, ed il quoto sarà rappresentato da $a^{3 - \frac{4}{5}}$, ossia da $a^{\frac{11}{5}}$, che ridotto a radicale tornerà $\sqrt[5]{a^{11}}$.

127. Sia da dividersi $\sqrt[3]{a^2}$ per $\sqrt[7]{a^3}$, il quoto sarà $\sqrt[21]{a^5}$ (§. 122.). Coi simboli si dovrà dividere $a^{\frac{2}{3}}$ per $a^{\frac{3}{7}}$; il

queto sarà espresso da $a^{\frac{3}{3}} - \frac{3}{7}$, o da $a^{\frac{5}{12}}$, o sarà $\sqrt[21]{a^5}$, come innanzi.

128. Sia da elevarsi $\sqrt[3]{a^2}$ alla quarta potenza; il risultato sarà (§. 105, II.) $\sqrt[3]{a^8}$. Ora invece di $(\sqrt[3]{a^2})^4$ si ponga $(a^{\frac{2}{3}})^4$, che colla regola delle potenze (§. 89.) darà $a^{\frac{8}{3}}$, da cui $\sqrt[3]{a^8}$.

Finalmente sia $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^3}}$, il suo valore sarà (§. 105, III.) $\sqrt[12]{a^3}$. Ora si ponga $a^{\frac{3}{4}}$ invece di $\sqrt[4]{a^3}$, allora $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^3}}$ sarà $(a^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{3}}$, da cui $a^{\frac{3}{12}}$, o $\sqrt[12]{a^3}$.

129. Dunque invece dei radicali si può far uso dei simboli.

Terminiamo il trattato dei radicali col calcolo delle quantità immaginarie.

130. Abbiamo detto (§. 98.), che la quantità immaginaria è una radice pari di quantità negativa; per esempio $\sqrt[4]{-a^2}$, $\sqrt[2m]{-b^2}$ sono quantità immaginarie, perchè a^2 , b^2 sono sempre quantità positive. Queste si possono (§. 100.) ridurre alla forma

$$\sqrt[4]{a^2} \cdot \sqrt[4]{-1}, \quad \sqrt[2m]{b^2} \sqrt[2n]{-1};$$

cioè qualunque quantità immaginaria si può ridurre alla forma $b\sqrt[2m]{-1}$, ossia ad una quantità reale moltiplicata per la radice pari di -1 . Vedremo in seguito, che questa radice pari di meno uno si può sempre ridurre alla radice seconda di meno uno; quindi eseguiremo il calcolo sopra le quantità immaginarie della forma $a\sqrt{-1}$.

131. Nulla vi è di rimarchevole nella somma, e sottra-

zione degli immaginari, avvertendo solo, che questi sono omogenei, quando le quantità in lettere fuori di $\sqrt{-1}$ sono identiche.

132. Sia da moltiplicarsi $a\sqrt{-1}$ per $b\sqrt{-1}$; secondo la regola pel prodotto dei radicali dello stesso esponente, sarà il prodotto domandato $ab\sqrt{-1}$. Si è fissato, che la radice ha doppio segno, ma ciò s'intende quando non si conosca questa radice; che se si sappia, che la radice è positiva, o negativa, si deve assegnare uno solo di questi due segni; ora sappiamo, che l'unità sotto il vincolo antecedente proviene da -1 moltiplicato in se stesso, dunque estraendo la radice, dovremo scrivere -1 , e così il prodotto di $a\sqrt{-1}$ per $b\sqrt{-1}$ sarà $-ab$.

Il prodotto delle quantità $a\sqrt{-1}$, $b\sqrt{-1}$, $c\sqrt{-1}$ sarà $-abc\sqrt{-1}$, perchè il prodotto di $a\sqrt{-1}$ per $b\sqrt{-1}$ dà $-ab$.

Se si dovessero moltiplicare $a\sqrt{-1}$, $b\sqrt{-1}$, $c\sqrt{-1}$, $d\sqrt{-1}$, poichè ogni coppia di fattori dà -1 , il prodotto sarà $abcd$.

133. Quindi o il numero degli immaginari da moltiplicarsi è pari, o è dispari. Se è pari numerate le coppie dividendo il detto numero per 2; se queste sono di numero pari daranno il prodotto positivo delle quantità fuori dei vincoli; se poi queste coppie sono di numero dispari, sarà negativo il prodotto delle quantità fuori de' vincoli.

134. Se poi i fattori immaginari saranno di numero dispari, scrivete il prodotto delle quantità fuori dei vincoli, e moltiplicatelo per $\sqrt{-1}$. Riguardo al segno escludete uno nel numero degli immaginari da moltiplicarsi, e contate le 'paja degli altri dividendo per 2 il numero risultante; se queste sono di numero pari, date al prodotto antecedente il segno più, se sono dispari, date il segno meno.

135. Sia da dividersi a per $b\sqrt{-1}$. Invece di a ponete $-a\sqrt{-1}$. $\sqrt{-1}$, e dividendo questo prodotto per $b\sqrt{-1}$ avrete $-\frac{a}{b}\sqrt{-1}$.

Se sia $a\sqrt{-1}$ da dividersi per $b\sqrt{-1}$ il quoto sarà $\frac{a}{b}$.

136. Si debba ora innalzare a potenza un'immaginario $a\sqrt{-1}$. O l'esponente, cui si deve innalzare è pari, o è dispari. Se è pari dovrete ripetere $a\sqrt{-1}$ un numero pari di volte, quindi nel risultamento sparirà $\sqrt{-1}$, ed a sarà elevata all'esponente dato. Riguardo al segno (§. 133.) contate le paga di ripetizioni da farsi del radicale come fattore, se questo numero di paga è pari, darete il segno più al risultamento, se sarà dispari darete il segno meno.

137. Se poi l'immaginario si eleverà a potenza dispari (§. 134.), scrivete la quantità a fuori del vincolo elevato a questa potenza, e poi $\sqrt{-1}$. Riguardo al segno, escludete una ripetizione di $a\sqrt{-1}$, e contate le paga delle altre ripetizioni; se darà un numero pari, scrivete il più; se un numero dispari, scrivete il meno.

138. Queste regole si potranno presentare insieme dicendo. *Se l'esponente, a cui dovete elevare $a\sqrt{-1}$ è pari scrivete a con questo esponente, e dategli il segno più o meno, secondo che la metà di questo esponente è pari, o dispari. Se poi l'esponente è dispari, scrivete a con questo esponente moltiplicata per $\sqrt{-1}$. Riguardo al segno togliete all'esponente una unità; se il resto diviso per due dà un numero pari, nel risultamento ponete il più; se dà numero dispari, scrivete il meno. Quindi $(a\sqrt{-1})^{2m} = \pm a^{2m}$, secondo che m è pari, o dispari.*

$(a\sqrt{-1})^{2m+1} = \pm a^{2m+1} \sqrt{-1}$ secondo che m è pari, o dispari.



ESERCIZI DEI RADICALI.



Portate fuori dei radicali

$$\frac{a^3 b^4}{c^7 d^9} \sqrt[6]{\frac{c^{19} d^{12}}{a^{19} b^{27}}}, \frac{a}{d} \sqrt[3]{\frac{d^{18}}{a^{17}}}.$$

Portate dentro nei radicali

$$\frac{2a^3}{3b^7} \sqrt[5]{\frac{3b^4}{2a^3}}.$$

Riducete ad essere omogenei i radicali

$$\frac{1}{2} \sqrt[3]{8a^3}, \quad \frac{1}{3a} \sqrt[3]{18a^7}, \quad \frac{2}{a^8} \sqrt[3]{162a^{19}}.$$

Fate la moltiplicazione dei polinomii con tutte le riduzioni

$$2a^2 \sqrt[3]{a^3} - 4a \sqrt[5]{a^3} + 3a \sqrt{a} - a,$$

$$5a^2 \sqrt[3]{a^3} + 2a \sqrt[5]{a^3} + 2a \sqrt{a} + 2a,$$

e poi dividete il prodotto per uno dei due fattori.
Fate lo stesso nei polinomii

$$\frac{a}{b} \sqrt[3]{\frac{b^3}{a^4}} - c^2 \sqrt[7]{\frac{b^3}{a^5}} - \sqrt{\frac{a}{b}};$$

$$\frac{2a}{b} \sqrt[3]{\frac{b^3}{a^4}} - 3c^2 \sqrt[7]{\frac{b^3}{a^5}} - \frac{1}{5} \sqrt{\frac{a}{b}};$$

e nelle frazioni

$$\frac{\sqrt[3]{a^2} - 2a\sqrt[5]{a}}{\sqrt[3]{a} + 3a\sqrt[3]{a}}, \quad \frac{2\sqrt[3]{a^2} - 4a\sqrt[5]{a}}{3\sqrt[3]{a} - 2a\sqrt[3]{a}}.$$

Dividete fino a sei termini del quoto il binomio

$$\sqrt[3]{a^2} - 2a\sqrt[5]{a} \text{ per } a^2 - \sqrt[3]{a^2}.$$

Lo stesso fate nei polinomi

$$a^7 - b\sqrt[5]{a}, \quad \sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a}.$$

Sviluppate

$$\left(\frac{a^2}{b^3}\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{a^3} - \frac{1}{a^3}\right)^2 (a)$$

e l'altro

$$\left(a\sqrt[3]{a} - \frac{1}{\sqrt[3]{a}} + \frac{1}{2a} - \sqrt[3]{a}\right)^2 (b)$$

e l'ultimo

$$\left(2a\sqrt[3]{a} - \frac{2a}{\sqrt[3]{a}}\right)^4,$$

dai due risultamenti (a), (b) estraete la radice seconda, e dall'ultimo estraete successivamente due radici seconde. Per approssimazione estraete le radici seconde fino a cinque termini dalle espressioni

$$a^2 - b, \quad \sqrt[3]{a} - \frac{1}{\sqrt[3]{a}}, \quad 2 - \frac{1}{\sqrt[3]{a}}.$$

Eseguite tutte le operazioni nelle espressioni

$$\sqrt[3]{a^2} \sqrt[5]{a^5}, \quad \sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}}$$

Moltiplicate i polinomi

$$\sqrt[m]{a^n} - n\sqrt[r]{a} + \sqrt[p]{a^r}, -2\sqrt[m]{a^n} + 3n\sqrt[r]{a} + 5\sqrt[p]{a^r};$$

poi moltiplicateli riducendoli a simboli per ottenere lo stesso risultamento.

Sviluppate

$$\left(a^n \sqrt[m]{a} - \frac{1}{a^r \sqrt[r]{a}} + a \right),$$

e poi estraete la radice seconda.

Eseguite la divisione in

$$\frac{1}{\sqrt[m]{a} - \sqrt[m]{b}}$$

fino a quattro termini coi simboli, e senza.

Eseguite la divisione fino a cinque termini dell'unità per

$$a^m + m a^{m-1} b + \frac{m(m-1)}{2} a^{m-2} b^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} a^{m-3} b^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} a^{m-4} b^4$$

riducendo a simboli il risultamento troverete

$$a^m - m a^{m-1} b + m \frac{(m+1)}{2} a^{m-2} b^2 - m \frac{(m+1)(m+2)}{2 \cdot 3} a^{m-3} b^3 \text{ ec.}$$

CAPO QUARTO

DELLE POTENZE DEI POLINOMI, E DELLE RADICI
DEI POLINOMI, E DEI NUMERI.

139. Se il binomio $a+b$ si eleva alle successive potenze moltiplicandolo in se stesso una volta, due volte, tre, ec. volte, avremo i seguenti risultamenti

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6.$$

ec.

Se si osservano questi risultamenti, o sviluppi delle potenze del binomio $a+b$ si potrà dare una regola generale per elevare un binomio ad una potenza qualunque. Questa regola riguarda le lettere, gli esponenti, ed i coefficienti.

140. *Riguardo alle lettere nel primo, ed ultimo termine dello sviluppo vi è la prima, e la seconda lettera del binomio. Così nello sviluppo di $(a+b)^5$ per primo termine si ha a^5 , e per ultimo b^5 ; negli altri termini poi interposti vi sono ambedue le lettere.*

Riguardo agli esponenti. L'esponente del primo termine dello sviluppo è l'esponente del binomio. Così se si sviluppa $(a+b)^6$ il primo termine è a^6 , se $(a+b)^5$ il primo termine è a^5 .

Nei successivi termini poi l'esponente della prima lettera va continuamente diminuendo d'una unità, ed al contrario l'esponente della seconda lettera va crescendo d'una unità.

Nello sviluppo di $(a \pm b)^5$ i diversi termini fra i due estremi hanno i fattori a^4b , a^3b^2 , a^2b^3 , ab^4 .

Finalmente riguardo ai coefficienti; il primo termine dello sviluppo non ha coefficiente; il coefficiente del secondo termine è sempre l'esponente del binomio; ed il coefficiente d'un termine qualunque si trova moltiplicando il coefficiente del termine antecedente per l'esponente, che in esso ha la prima lettera, diviso il prodotto pel numero de' termini precedenti l'attuale. Così nello sviluppo di $(a \pm b)^6$ il coefficiente del terzo termine è uguale al coefficiente del termine antecedente, cioè 6, moltiplicato per 5, esponente di a in esso termine, diviso il prodotto per 2, perchè due sono i termini innanzi all'attual terzo. Il coefficiente del quinto termine si ottiene moltiplicando il coefficiente antecedente 20 per l'esponente 3, che in esso ha la lettera a , diviso il prodotto per 4, che è il numero de' termini antecedenti all'attuale.

Finalmente se si moltiplica il coefficiente 6 del sesto termine per l'esponente di a , che non esiste, non si ha nulla, e di fatti l'ultimo termine dello sviluppo non ha coefficiente. Abbiamo supposto positivi ambedue i termini del binomio.

141. Se fossero ambedue negativi, si osservi l'esponente, cui il binomio si deve elevare. Se questo è pari, il risultamento sarà tutto positivo (§. 96.), se dispari, il risultamento sarà tutto negativo; quindi un binomio o positivo, o negativo elevato ad esponente pari darà positivo tutto lo sviluppo. E se l'esponente è dispari, tutto lo sviluppo avrà il segno di tutto il binomio.

142. Se finalmente uno dei due termini del binomio sarà negativo, si darà il segno negativo a quei termini dello sviluppo, ove la lettera negativa avrà esponente dispari. Sia $(\mp a \pm b)^7$. Se $\mp a \pm b$ si moltiplichino sei volte in se stessa si troverà lo sviluppo

$$\mp a^7 \pm 7a^6b \mp 21a^5b^2 \pm 35a^4b^3 \mp 35a^3b^4 \\ \pm 21a^2b^5 \mp 7ab^6 \pm b^7.$$

Ove si vede, che se a è negativa, nello sviluppo sono negativi il primo, il terzo, il quinto, ed il settimo termine, nei quali la a ha esponenti dispari. Se poi è negativa la b , per la stessa ragione sono negativi il secondo, il quarto, il sesto, e l'ottavo termine.

143. Dopo ciò il binomio $a + b$ si debba elevare ad una potenza qualunque m . Il primo termine dovendo essere la prima lettera elevata all'esponente del binomio sarà a^m ; gli altri termini avranno i fattori $a^{m-1}b$, $a^{m-2}b^2$, $a^{m-3}b^3$, $a^{m-4}b^4$ ec., e ciò per la regola (§. 140.). Il coefficiente del secondo termine deve essere l'esponente del binomio; dunque questo secondo termine sarà $ma^{m-1}b$. Un coefficiente poi qualunque (§. 140.) avendosi dal coefficiente antecedente moltiplicato per l'esponente della prima lettera, diviso il prodotto pel numero de' termini precedenti l'attuale; il coefficiente del terzo termine sarà il coefficiente m del termine antecedente moltiplicato per l'esponente $m - 1$ della prima lettera, il prodotto diviso per 2, perchè 2 sono i termini innanzi al terzo: dunque il terzo termine sarà $m\left(\frac{m-1}{2}\right)a^{m-2}b^2$. Se in questo si moltiplica il coefficiente $m\left(\frac{m-1}{2}\right)$ per l'esponente $m - 2$ di a , ed il prodotto $m\left(\frac{m-1}{2}\right)(m-2)$ si divide per 3, si avrà il coefficiente del quarto termine, il quale tutto insieme sarà $m\left(\frac{m-1}{2}\right)\left(\frac{m-2}{3}\right)a^{m-3}b^3$. Si conosce il metodo come trovare gli altri termini, quindi avremo

$$(a + b)^m = a^m + \frac{m}{1} a^{m-1}b + \frac{m}{1}\left(\frac{m-1}{2}\right)a^{m-2}b^2 \\ + \frac{m}{1}\left(\frac{m-1}{2}\right)\left(\frac{m-2}{3}\right)a^{m-3}b^3 + \frac{m}{1}\left(\frac{m-1}{2}\right)\left(\frac{m-2}{3}\right)\left(\frac{m-3}{4}\right)a^{m-4}b^4 \text{ ec.}$$

Questa è la formola detta newtoniana dello sviluppo d'un binomio elevato ad una potenza qualunque.

144. Se si osservano i diversi termini di questo sviluppo si vedrà, che il coefficiente d'un termine qualunque è di questa forma $\frac{m}{1} \left(\frac{m-1}{2} \right) \left(\frac{m-2}{3} \right) \left(\frac{m-3}{4} \right) \dots$, dove i fattori del numeratore si ottengono sottraendo da m successivamente l'unità finchè si ottiene un m da cui si tolgono le unità esprimenti il suo posto meno due. Così nel coefficiente antecedente del quinto termine l'ultimo fattore $m-3$ si ottiene togliendo da m il 3, che è cinque, cioè il numero del posto diminuito di due. Ciò viene da questo, che nel terzo termine da m si comincia a togliere l'unità, quindi nel terzo posto si toglie uno. Il denominatore poi del coefficiente è il prodotto dei numeri 1, 2, 3, ec. fino a quello, che esprime il posto del termine diminuito d'una unità, e ciò perchè il secondo termine si divide per uno, ed il terzo per 1. 2. Dopo il coefficiente, vi è il prodotto delle due lettere. L'esponente della prima è la m , da cui sono tolte le unità del posto meno una, perchè nell'esponente di a l'unità da m si comincia a togliere nel secondo termine. Ciò che si toglie da m nell'esponente di a si dà per esponente a b , talchè in ogni termine la somma degli esponenti delle due lettere è sempre l'esponente del binomio.

145. Dopo ciò si può risolvere il problema. *Nello sviluppo generale della potenza qualunque m d'un binomio, trovate il termine, che è al posto n^{mo} .* Questo termine sarà

$$\frac{m}{1} \left(\frac{m-1}{2} \right) \left(\frac{m-2}{3} \right) \dots \left(\frac{m-(n-2)}{n-1} \right) a^{m-(n-1)} b^{n-1} :$$

ove si vede, che nell'ultimo fattore del numeratore si sono tolte le unità del posto meno due; che l'ultimo fattore del denominatore è la $n-1$, cioè il numero del posto diminuito di una unità; che nell'esponente di a dalla m

si sono tolte le unità del posto meno una, e che questa quantità sottratta si è data per esponente alla b .

146. Il numero dei termini dello sviluppo di una potenza qualunque d'un binomio è sempre l'esponente del binomio cresciuto d'una unità. Ciò è chiaro, poichè nei successivi termini dall'esponente m di a si toglie una unità, così da a ripetuto m volte come fattore, si giunge ad a semplice, per lo che è chiaro, che ci vogliono m termini: poi vi è l'ultimo termine, ove il b è elevato all'esponente del binomio.

147. Da ciò viene, che se l'esponente del binomio è pari il numero dei termini sarà dispari, e se l'esponente sarà dispari il numero dei termini dello sviluppo sarà pari. Nel primo caso lo sviluppo avrà un termine medio, e nel secondo avrà due termini nei medii.

148. Se si osservano gli sviluppi (§. 139.) delle successive potenze di $a + b$ si vedrà, che quando vi è termine medio, dopo questo ritorna il coefficiente antecedente, e poi l'altro coefficiente, e così di seguito; cosicchè i termini equidistanti dal medio hanno lo stesso coefficiente. Se poi vi sono due termini medii, il secondo di questi ha lo stesso coefficiente del primo, e poi l'altro coefficiente è uguale a quello del termine anteriore al primo medio, e così di seguito, in guisa che i termini equidistanti dal segno medio $+$ o $-$ hanno lo stesso coefficiente. Questi due casi si riuniscono in un solo dicendo, che nello sviluppo di una potenza qualunque del binomio i termini equidistanti dagli estremi hanno gli stessi coefficienti. Questa riflessione dimezza la fatica per trovare i coefficienti dello sviluppo della potenza d'un binomio.

149. Sia m pari, e si voglia il termine medio. Il numero totale dei termini è $m + 1$; supponendo, che questo uno sia il termine medio, prima, e dopo questo vi saranno termini di numero $\frac{m}{2}$; dunque quel termine medio sarà

al posto $\frac{m}{2} + 1$: se dunque nell'espressione superiore (§. 145.) d'un termine al posto n^{o} si faccia $n = \frac{m}{2} + 1$ avremo il termine medio domandato, che sarà espresso da

$$m \left(\frac{m-1}{2} \right) \left(\frac{m-2}{3} \right) \dots \left(\frac{m+2}{2} \right) a^{\frac{m}{2}} b^{\frac{m}{2}}.$$

Quando l'esponente è dispari, sia proposto di trovare i due termini medii. Essendo il numero dei termini dello sviluppo della potenza m^{a} d'un binomio uguale ad $m+1$, il primo dei due termini medii sarà al posto $\frac{m+1}{2}$: dunque

$$n = \frac{m+1}{2};$$

e perciò questo termine sarà

$$m \left(\frac{m-1}{2} \right) \left(\frac{m-2}{3} \right) \dots \frac{m+3}{2} a^{\frac{m+1}{2}} b^{\frac{m-1}{2}}.$$

Si troverà poi per l'altro termine

$$m \left(\frac{m-1}{2} \right) \left(\frac{m-2}{3} \right) \dots \frac{m+3}{2} a^{\frac{m-1}{2}} b^{\frac{m+1}{2}}.$$

Andiamo alle potenze dei polinomii.

150. Abbiamo veduto (§. 35, 36.) qual sia la seconda

potenza d'un polinomio qualunque. Troviamo ora il modo di elevare un polinomio alle altre potenze.

Sia $(a + b + c + d)^3$. Considerando $a + b + c$ come un monomio, avremo (§. 139.)

$$(a + b + c)^3 + 3(a + b + c)^2d + 3(a + b + c)d^2 + d^3.$$

Sviluppando $(a + b + c)^2$ col considerare $a + b$ come un monomio avremo

$$\begin{aligned} (a + b)^3 + 3(a + b)^2c + 3(a + b)c^2 + c^3 + 3(a + b + c)^2d \\ + 3(a + b + c)d^2 + d^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ + 3(a + b)^2c + 3(a + b)c^2 + c^3 + 3(a + b + c)^2d \\ + 3(a + b + c)d^2 + d^3. \end{aligned}$$

Da ciò si ricava la regola generale. Si eleva un polinomio qualunque alla terza potenza elevando alla terza potenza il primo termine; si aggiungerà poi 3 volte il quadrato del primo termine nel secondo, cioè moltiplicato nel secondo, più tre volte il quadrato del secondo nel primo, più la terza potenza del secondo termine. Più il triplo quadrato dei due primi termini nel terzo, più il triplo quadrato del terzo nei due primi termini, più la terza potenza del terzo termine. Più il triplo quadrato dei tre primi termini nel quarto, più il triplo quadrato del quarto nei tre primi termini, più la terza potenza del quarto. Si direbbe poi, se vi fosse un quinto termine, il triplo quadrato dei quattro primi termini nel quinto, più il triplo quadrato del quinto nei quattro primi termini, più la terza potenza del quinto. E così si proseguirebbe, se vi fossero altri termini nel dato polinomio. Se poi si volesse l'ultimo sviluppo in monomii, basterebbe eseguire i quadrati del binomio, del trinomio, del quadriminomio ec. nel risultamento antecedente, e poi eseguire i prodotti da questo indicati.

151. Se si stabilisce, che la quarta potenza d'un binomio (§. 139.) dà la quarta potenza del primo termine, più quattro volte la terza potenza del primo termine nel secondo, più sei volte il quadrato del primo nel quadrato del secondo termine, più quattro volte il primo termine nella terza potenza del secondo, più la quarta potenza del secondo, si ha subito il metodo di elevare a potenza quarta un polinomio qualunque.

Si fa la quarta potenza del primo termine più quattro volte la terza potenza del primo moltiplicata nel secondo termine, più sei volte il quadrato del primo nel quadrato del secondo termine, più quattro volte il primo nella terza potenza del secondo termine, più la quarta potenza di questo secondo. Inoltre si dirà, ritenendo gli stessi coefficienti e potenze dello sviluppo. Quattro volte la terza potenza dei due primi termini nel terzo, più sei volte il quadrato dei due primi termini nel quadrato del terzo, più quattro volte i due primi termini nella terza potenza del terzo, più la quarta potenza di questo terzo. Poi si prosegue come ora si è fatto, solo sostituendo ai due primi termini i tre primi, ed al terzo sostituendo il quarto termine. Collo stesso metodo invece dei tre primi termini si dirà i quattro termini, ed in luogo del quarto si dirà il quinto, e così di seguito, se nel dato polinomio vi fosse un quarto, un sesto ec. termine.

Se poi nello sviluppo si vorranno tutti monomii, si faranno gli sviluppi della seconda, e terza potenza del binomio, del trinomio ec., e ciò coi metodi dati, ed in ultimo si faranno le moltiplicazioni indicate nel nostro sviluppo avuto.

152. Sapendosi elevare un binomio alla quinta potenza, si eleva alla quinta potenza anche un polinomio, perchè si avrà prima lo sviluppo della quinta potenza del binomio dei due primi termini, poi nel risultamento cominciando dal secondo termine invece del primo termine del

binomio vi si porranno per tutto i due primi termini, ed invece del secondo, vi si porrà il terzo. Inoltre nello stesso primo sviluppo del binomio, cominciando dal suo secondo termine, si porranno per tutto invece del primo termine del binomio i tre primi termini, ed invece del terzo si scriverà il quarto, e così innanzi, qualunque fosse il numero dei termini del dato polinomio da elevarsi alla quinta potenza. Per avere poi lo sviluppo in monomii, nel risultamento antecedente si eseguirebbero coi metodi dati la seconda, la terza, e la quarta potenza del binomio, del trinomio, del quadrinomio ec.

153. Dopo ciò, se fosse dato un polinomio da elevarsi alla potenza m^a ; prima si farà lo sviluppo del binomio formato dai due primi termini alla potenza m , e ciò col metodo dato (§. 143). Nel risultamento cominciando dal secondo termine, per tutto invece del primo termine del binomio si scriveranno i due primi termini, ed invece del secondo si porrà il terzo; poi negli stessi termini del primo sviluppo in luogo del primo termine del binomio si scriveranno i tre primi, ed invece del secondo si porrà il quarto termine, e così si andrà innanzi finché, supponendo il polinomio di n termini, si sostituiranno nel primo sviluppo invece del primo termine del polinomio i suoi $n - 1$ termini, ed invece del secondo il suo termine n^{mo} . Volendosi poi lo sviluppo in monomii, nel risultamento antecedente si faranno gli sviluppi delle potenze seconda, terza, quarta ... $(m-1)^{ma}$ del binomio, del trinomio e del polinomio formato di $n-1$ primi termini del polinomio dato, e si eseguiranno le moltiplicazioni indicate dal risultamento antecedente.

154. Da ciò viene il metodo per estrarre la radice di un grado m^o qualunque da un polinomio.

Quando questo sia ordinato per le potenze decrescenti d'una data lettera, il primo termine sarà la potenza m del primo termine della radice, dunque vi si estrarrà la ra-

dice m^a , e questa si porrà nel luogo della radice; se ne farà la potenza m^a per togliere il termine, da cui si è avuta la radice, e reso perciò inutile. Il primo termine del residuo deve essere m volte la potenza $(m-1)^{ma}$ della radice trovata moltiplicata nella seconda radice incognita: si faccia dunque la potenza $(m-1)^{ma}$ della radice trovata, e moltiplicata per m , pel risultamento si divida quel primo termine del residuo; il quoto sarà la seconda radice, che si porrà nel luogo della radice. Adesso nel polinomio dato è inutile la serie de' termini, che vengono dall'inalzare la nostra radice binomia alla potenza m^a ; si faccia dunque questa potenza, e si sottragga dal detto polinomio. Il primo termine del nuovo residuo deve essere m volte la potenza $(m-1)^{ma}$ della radice binomia trovata, moltiplicata nella terza radice incognita; si faccia dunque m volte la potenza $(m-1)^{ma}$ della detta radice trovata, e per questa si divida il primo termine del residuo, e si avrà la terza radice. Ora in tutto il polinomio dato sarà inutile la serie de' termini, che sono lo sviluppo della potenza m^{ma} della nostra radice trinomia avuta; si faccia dunque questa potenza, e si sottragga dal detto polinomio. Di nuovo il primo termine del residuo deve essere m volte la potenza $(m-1)^{ma}$ di tutta la radice trovata moltiplicata nella quarta. Si faccia dunque la potenza $(m-1)^{ma}$ della radice trovata, e moltiplicata per m , per questo risultamento si divida il detto primo termine del residuo, e si avrà la quarta radice. Si vada poi innanzi collo stesso metodo.

155. Dopo ciò è facile di estrarre la radice terza, quarta ec. da un numero qualunque.

Per estrarre la radice terza si stabiliscano queste verità.

I. La terza potenza, o, come si dice, il cubo di un numero di una sola cifra non può avere più di tre cifre; perchè il 9, che è il maggior numero d'una cifra nel cubo dà 729.

II. *Il triplo quadrato delle decine nelle unità non può dar meno delle centinaja*, perchè il solo quadrato di 10 dà 100.

III. *Il cubo delle decine non può essere inferiore alle migliaia*; perchè il 10, che è il più piccolo numero di decine dà 1000 nel cubo.

156: Dopo ciò sia proposto di estrarre la radice da 2299968. Si dirà questo numero ha più di tre cifre, dunque è il cubo d'un binomio di decine, e di unità; ora si deve separare in esso la parte, che contenga il cubo delle decine per estrarvi la radice terza; ma per la terza verità (§. 155.) il cubo delle decine non può essere inferiore alle migliaia, dunque nel dato numero si deve escludere 968, che non ha parte delle migliaia, e nel 2299 vi dovrà essere il cubo delle decine: ma questo numero ha più di tre cifre, dunque il numero delle decine ha più d'una cifra, quindi il detto numero 2299 è il cubo delle decine, più le unità. Qui ancora si deve separare la parte, che contenga il cubo delle decine, dunque con una virgola si separerà il 299, che non fa parte delle migliaia. Con questo si vede, che il numero si deve dividere con virgola di tre in tre cifre cominciando da dritta. Ora la radice terza prossima di 2 è 1. Si segni questa radice nel suo posto, e fattone il cubo si sottragga da 2, avremo il residuo 1, accanto al quale si calino le tre cifre, che danno il numero 299, dunque si avrà 1299. In questo si deve separare la parte, che contenga il triplo quadrato delle decine trovate nell'unità incognite; questa quantità non può essere minore delle centinaja pel secondo principio (§. 155.), dunque dovrà trovarsi nel 12, che sono 12 centinaja, e quindi con una virgola si separi il 99. Il quadrato di 1 è 1, il triplo è 3; ora il 3 entra nel 12 quattro volte; si ponga questo 4 nel posto della radice dopo l'unità. Si faccia ora il cubo di 14, ed il risultamento si sottragga da 2299, si vedrà che questa sottrazione non si potrà eseguire, quindi invece di 4 si ponga 3 nella radice, ed il suo cubo 2197

si tolga dal detto 2299, ed accanto al residuo 102 si cali l'altra terna di cifre, che dà 968. Qui ancora nel numero 102968 si separi il 68, che non fa parte delle centinaia, si faccia il triplo quadrato della radice trovata 13, e pel risultamento 507 si divida 1029; il quoto è 2, che si ponga nel posto della radice. Si elevi 132 alla terza potenza si avrà il numero proposto, dunque 132 è la sua radice terza.

157. Qui ancora si voglia la radice di un intero prossima al vero d'una data frazione decimale. Per esempio si vogli la radice di 35, che differisca dal vero suo valore di meno di $\frac{1}{100}$. Si aggiunga a 35 il triplo dei zeri di que-

sto denominatore, e del numero, che viene, si trovi la radice prossima intera. In questa poi da dritta a sinistra si separino due cifre, perchè due sono i zeri della nostra frazione. La verità di ciò si dimostra come nel (§. 46.). Sia a la quantità, da cui si deve estrarre la radice, e si moltiplichi questa, e si divida per b^3 , se si voglia, che la radice terza intera approssimativa di a differisca dalla vera di meno di $\frac{1}{b}$; si dovrà dunque estrarre la radice da $\frac{ab^3}{b^3}$.

Si estraiga la radice prossima intera da ab^3 , e sia r , quindi la radice terza prossima di $\frac{ab^3}{b^3}$, o di a sarà $\frac{r}{b}$.

Ora $\sqrt[3]{ab^3}$ è compresa fra r , ed $r+1$, dunque $\sqrt[3]{\frac{ab^3}{b^3}}$,

o $\sqrt[3]{a}$ sarà compresa fra $\frac{r}{b}$, ed $\frac{r+1}{b}$ ossia $\frac{r}{b} + \frac{1}{b}$,

dunque la nostra radice $\frac{r}{b}$ differisce dalla vera di meno di $\frac{1}{b}$.

Ora nel caso antecedente l'aggiungere sei zeri a 35 era moltiplicare questo numero per il cubo di 100: dunque

fatta questa moltiplicazione, ed il prodotto diviso per 100^3 ,

si doveva estrarre la radice terza da $\frac{35000000}{100^3}$; se dunque

si estrarra la radice prossima intera da 35000000 questa si deve dividere per 100, il che si ottiene separando in essa con una virgola due cifre a dritta.

158. Ecco dunque in generale il metodo per estrarre la radice cubica da un numero.

Dividete le cifre del numero a tre a tre con virgole cominciando da dritta a sinistra. Estraeate la radice terza del numero a sinistra 2, che è avanti la prima virgola, e scrivetela al posto della radice; fatene il cubo, e sottraetelo dal numero, da cui avete estratta la radice, accanto al residuo calate le tre cifre dopo la prima virgola, e nel numero, che avete, con una virgola separate le due ultime cifre. Fate il triplo quadrato della radice trovata, e per questo dividete la parte del numero avanti la virgola, che ora avete notata, e ponete il quoto nel posto della radice. Fate il cubo della radice trovata, e sottraetelo da tutto il numero, che è avanti la seconda virgola nel numero proposto, accanto al residuo calate le tre altre cifre, che sono innanzi la terza virgola del numero proposto, e nel numero, che viene, separate le due cifre a dritta, e dividete il numero avanti questa virgola per il triplo quadrato della radice trovata, e segnate il quoto nel posto della radice. Fate il cubo di tutta la radice trovata, e sottraetelo da tutto il numero, che è avanti la terza virgola nel proposto, accanto al residuo calate le tre cifre seguenti, che sono avanti la quarta virgola, e nel numero, che viene, separate con una virgola le due cifre a sinistra, ed il numero, che si trova innanzi a sinistra di questa virgola dividetelo pel triplo quadrato di tutta la radice trovata, e segnate il quoto nel posto della radice. Di nuovo fate il cubo di tutta la radice trovata, e sottraetelo da tutto il numero, che è avanti la quarta virgola del proposto, e progredite innanzi collo stesso metodo.

Se poi volete la radice terza per approssimazione da un intero, fissate il decimale dell'approssimazione, cioè, che debba essere la radice minore di una frazione, che sia l'unità divisa dall'unità con un dato numero di zeri. Aggiungete al numero proposto il triplo di questi zeri, e dal numero risultante estraete la radice intera prossima. In questa da dritta a sinistra separate con una virgola, o punto tante cifre, quanti sono i zeri nel denominatore della frazione, che avete fissata per l'approssimazione.

Finalmente per estrarre la radice terza da una frazione moltiplicate il suo numeratore, e denominatore pel quadrato del denominatore, con questo il denominatore diventerà un cubo, quindi dovrete estrarre la radice dal nuovo numeratore, e dividerla per il denominatore, che è la radice terza del nuovo denominatore.

Che se dal nuovo numeratore estrarrete la radice terza per approssimazione coi decimali, la radice, che otterrete sarà minore della vera di una frazione, il di cui numeratore è l'unità, ed il denominatore è il denominatore della frazione data seguita da tanti zeri, quante cifre decimali si saranno separate nella radice trovata dal numeratore.

159. Dalli metodi dati per l'estrazione della radice seconda, e terza dai numeri (§.42, 158.), e dal metodo dato (§. 154.) per l'estrazione di una radice qualunque da un polinomio, si ricavano quelli per estrarre le radici d'un grado qualunque dai numeri.

160. Sia da estrarsi la radice quarta da un numero. Si stabiliranno le solite proposizioni.

Primo. La quarta potenza d'un numero di una sola cifra non può avere più di quattro cifre, perché il 9 nella quarta potenza ne dà quattro.

Secondo. Quattro volte il cubo delle decine nelle unità non può dare meno di 1000, che è il cubo di 10.

Terzo. La quarta potenza delle decine non è inferiore al 10000, che è la quarta potenza di 10.

Proponendosi ora un numero da estrarvisi la radice quarta, dalla prima, e terza proposizione si ricaverà, che le sue cifre si debbono dividere con virgole a quattro a quattro cominciando da dritta. Si estrarrà la radice quarta dal numero avanti la prima virgola, per avere la prima cifra della radice. Si farà la quarta potenza della radice trovata, si sottrarrà dal detto numero, da cui si è estratta, ed accanto al residuo si caleranno le quattro cifre innanzi la seconda virgola; e dalla seconda proposizione si ricaverà, che si debbono separare da tutto il numero risultante le tre cifre a dritta, perchè dovendosi dividere il detto numero per quattro volte il cubo delle decine trovate, questo non si può trovare che tra le migliaja del nostro numero. Fatta questa divisione si scriverà il quoto nel posto della radice, appresso alla trovata, e fatta la quarta potenza di tutta la radice trovata si sottrarrà dal numero avanti la seconda virgola nel proposto. Accanto al residuo si scriveranno le quattro cifre innanzi alla terza virgola del numero proposto, e separate con una virgola le tre cifre a dritta, il numero risultante a sinistra si dividerà per quattro volte il cubo della radice trovata. Si proseguirà innanzi l'operazione nel modo tenuto.

161. Sia ora da estrarsi la radice n^{ma} da un numero. Si stabiliranno le tre proposizioni.

I. *La potenza n^{ma} d'un numero di una sola cifra non può dare più di n cifre.* Ciò si vede chiaro, perchè la seconda potenza di 9 è 81, cioè colla seconda potenza si è cresciuta una cifra. Se ora di nuovo si moltiplicherà per 9 se ne crescerà un'altra, e così di seguito; quindi piuttosto nella potenza n^{ma} di 9 astrattamente parlando vi può essere una cifra di meno di n cifre, che una di più.

II. *Se si prenda n volte la potenza $(n - 1)^{\text{ma}}$ delle decine nelle unità, non si potrà avere un numero minore di quello, che è espresso dall'unità con $n - 1$ zeri; perchè la po-*

tenza $(n-1)^{ma}$ di 10, che è la più piccola decina, dà l'unità seguita da $n-1$ zeri.

III. La potenza n^{ma} della decina non può essere inferiore al numero espresso dall'unità seguita da n zeri; perchè la più piccola decina, che è il 10 elevata ad n dà appunto questo numero.

162. Se ora si deve estrarre la radice n^{ma} da un numero, o questo ha più di n cifre, o non ne ha più. In questo secondo caso si faranno le n^{me} potenze dei numeri d'una sola cifra cominciando dall'unità, ed il risultamento, che sarà il più vicino al numero dato indicherà la cifra, che sarà la radice prossima n^{ma} del detto numero.

163. Se poi questo numero abbia più di n cifre si dirà, che la sua radice ha più d'una cifra, dunque ha decine, ed unità. Si deve separare nel numero proposto la parte, che sia la potenza n^{ma} delle decine, questa non può essere inferiore ad 1 seguito da n zeri, dunque si dovrà trovare nella parte del numero proposto, che ha a dritta n cifre; si separino dunque queste n cifre con una virgola. Se il numero a sinistra abbia più di n cifre collo stesso ragionamento se ne separeranno le n a dritta, e così di seguito, finchè le cifre innanzi la prima virgola siano di numero non superiore alla n .

Si estrarrà la radice da questo numero, e si scriverà nel luogo della radice, e poi fattano la potenza n^{ma} si sottrarrà dal detto numero innanzi la prima virgola, ed accanto al residuo si caleranno le n cifre dopo questa virgola. Si farà la potenza $(n-1)^{ma}$ della radice trovata, che è numero di decine, si moltiplicherà per n , e per il numero risultante si dovrà dividere quello, che è al posto del residuo. Ma per la seconda proposizione la potenza $(n-1)^{ma}$ delle decine non può trovarsi in un numero che sia inferiore all'unità seguita da $n-1$ zeri, dunque nel detto numero al posto del residuo si dovranno separare con una virgola le $n-1$ cifre a dritta, e la indicata

divisione si dovrà eseguire nel numero a sinistra della virgola. Il quoto della divisione si scriverà nel luogo della radice dopo la trovata; e della radice risultante si farà la potenza n^{ma} , ed il risultamento si sottrarrà da tutto il numero, che è avanti la seconda virgola segnata nel numero proposto. Si conosce poi come si dovrà proseguire l'operazione.

164. Se si voglia la radice n^{ma} prossima di un dato numero per mezzo dei decimali, si fisserà il limite dell'approssimazione, che sarà l'unità divisa per l'unità seguita da un numero m di zeri. Si aggiungeranno mn zeri al numero dato, e da questo si estrarrà la radice prossima n^{ma} in interi. In questo numero poi da dritta a sinistra si separeranno m cifre, e si segnerà una virgola, ed il numero risultante differirà dalla giusta radice n^{ma} domandata di meno della frazione fissata, che ha per numeratore l'unità, e per denominatore l'unità seguita da m zeri.

Si sono aggiunti mn zeri al numero dato, perchè se si estraesse la radice seconda, terza ec. si dovrebbero aggiungere $2m$, $3m$ ec. zeri. Si sono separati nel risultamento m cifre a sinistra, perchè il detto risultamento deve essere diviso per la radice n^{ma} della potenza n^{ma} dell'unità seguita da m zeri.

Che poi la radice risultante differisca dalla vera di meno dell'unità divisa per l'unità seguita da m zeri si dimostra subito colla solita dimostrazione.

Sia a il numero dato, e questo si moltiplichi, e si divida per $(1000 \dots)^n$, ove i zeri debbono essere di numero m . Da $a(1000 \dots)^n$ si estraiga la radice n^{ma} pros-

sima in intero, e sia r , avremo, che $\sqrt[n]{a(100 \dots)^n}$ sarà

compresa fra r , ed $r + 1$, ed $\frac{\sqrt[n]{a(100 \dots)^n}}{1000 \dots}$, o $\sqrt[n]{a}$ sarà

compresa fra $\frac{r}{100\dots}$, ed $\frac{r+1}{100\dots}$, dunque differirà dalla vera di meno di $\frac{1}{100\dots}$.

165. Dai metodi dati per estrarre la radice d'un grado qualunque o dall'espressioni algebriche, o dai numeri si ricava questa verità generale. *Non esiste metodo diretto per estrarre la radice*, perchè questa si conosce solo dal cercare la quantità, che elevata al grado della radice dà quella, di cui si vuole la radice. Quindi solo per l'innalzamento a potenza v'è metodo diretto.

166. Dopo tutto ciò sarà facile di estrarre per approssimazione la radice di un grado qualunque da un polinomio.

Supponiamo, che si voglia la radice n^{ma} del polinomio

$$a^m + ma^{m-1}b + m\left(\frac{m-1}{2}\right)a^{m-2}b^2 + m\left(\frac{m-1}{2}\right)\left(\frac{m-2}{3}\right)a^{m-3}b^3 + \text{ec.}$$

che è la potenza m^{ma} di $a + b$.

Secondo ciò, che si è detto si estrarrà la radice n^{ma} dal primo termine a^m , che sarà $\sqrt[n]{a^m}$; poi si farà la potenza n^{ma} di $\sqrt[n]{a^m}$, si sottrarrà da a^m , e si scriverà il residuo $ma^{m-1}b$ ec. Si farà la potenza $n - 1$ di $\sqrt[n]{a^m}$, e moltiplicata per n , per $n\sqrt[n]{(a^m)^{n-1}}$ si dividerà il primo termine $ma^{m-1}b$ del residuo, ed il quoto si segnerà nel posto della radice. Si farà la potenza n^{ma} della radice binomia trovata, e si sottrarrà da tutto il polinomio dato. Si farà la potenza $(n-1)^{ma}$ della stessa radice binomia, e moltiplicata per n pel risultamento si dividerà il secondo residuo avuto, e scritto il quoto nel luogo della radice si farà la potenza n^{ma} della radice trinomia trovata, e si sottrarrà dal dato polinomio.

Si dividerà il nuovo residuo per n volte la potenza $(n-1)^{ma}$ di tutta la radice trovata, ed il quoto si segnerà per quarta radice, e si proseguirà così l'operazione. Si troverà per risultamento

$$\sqrt[n]{a^m} + \frac{m}{n} \sqrt[n]{a^{m-n}} b + \frac{m \left(\frac{m}{n} - 1 \right)}{n \cdot 2} \sqrt[n]{a^{m-2n}} b^2 +$$

$$\frac{m \left(\frac{m}{n} - 1 \right) \left(\frac{m}{n} - 2 \right)}{n \cdot 2 \cdot 3} \sqrt[n]{a^{m-3n}} b^3 \text{ ec.}$$

Se ora nello sviluppo di $(a+b)^m$ (§. 143.) si ponga in luogo di m la $\frac{m}{n}$ avremo l'espressione in simboli

$$(a+b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} a^{\frac{m}{n}-1} b + \frac{m \left(\frac{m}{n} - 1 \right)}{n \cdot 2} a^{\frac{m}{n}-2} b^2 +$$

$$\frac{m \left(\frac{m}{n} - 1 \right) \left(\frac{m}{n} - 2 \right)}{n \cdot 2 \cdot 3} a^{\frac{m}{n}-3} b^3 \text{ ec.,}$$

che è lo stesso risultamento antecedente qualora ciascuno di questi esponenti si riduca allo stesso denominatore, e si tolgano i simboli.

167. Riunendo questo risultamento con quello avuto nella soluzione del problema (fine p. 199.), stabiliremo, che se nello sviluppo del binomio si sostituisca $-m$ ad m avremo lo sviluppo in serie di $\frac{1}{(a+b)^m}$, e se si sostituisca $\frac{m}{n}$ avremo

lo sviluppo in serie di $\sqrt[n]{(a+b)^m}$. Quindi si dice, che la formola data dello sviluppo del binomio (§. 143.)

$(a + b)^n$ vale per l'esponente qualunque intero, fratto, positivo, e negativo.

Ma diamo una dimostrazione generale del binomio di Newton per tutti i valori dell'esponente.

168. Sia da trovarsi lo sviluppo di $(x+y)^m$, ove m è qualunque. In questa espressione fatto $y=0$ abbiamo x^m : dunque lo sviluppo deve essere composto di due parti, una che vada a zero quando sia $y=0$, e l'altra x^m , che deve rimanere in questa ipotesi: quindi quella parte deve essere tutta affetta di potenze positive di y ; perchè se vi fosse un termine come My^{-r} , che ha y con esponente negativo, essendo questo simbolo di $\frac{M}{y^r}$, fatto $y=0$ ci darebbe $\frac{M}{0}$, simbolo d'impossibilità. Non vi deve poi esser termine privo di y perchè fatto $y=0$, lo sviluppo dopo x^m si ridurrebbe ad esso. Da ciò ecco l'espressione dello sviluppo

$$(x + y)^m = x^m + Ay^a + By^b + Cy^c \text{ ec.}$$

Per A, B, C ec. intendiamo quantità dipendenti da x solo senza y , ed a, b, c ec. sono esponenti crescenti tutti positivi. Le incognite sono questi coefficienti, ed esponenti. Incominciamo a determinare a , ed A . Arrestiamoci perciò ai due primi termini. Abbiamo dunque

$$(a) (x + y)^m = x^m + Ay^a \text{ ec.}$$

Si ponga nel primo, e secondo membro $x + z$ in luogo di x . Il primo diverrà $(x + y + z)^m$. Andando al secondo x^m ci darà $(x + z)^m$, che sviluppato come $(x + y)^m$ darà $x^m + Az^a$, ed altri termini, nei quali gli esponenti di z saranno maggiori di a . Si faccia la stessa sostituzione di $x + z$ in luogo di x in A . Se dopo la sostituzione si facesse $z = 0$ si dovrebbe avere A : dunque lo sviluppo di A per quella sostituzione deve essere composto di due

parti, l'una tutta affetta di potenze positive di z , l'altra la A stessa, a cui si riduce la serie nell'ipotesi di $z = 0$: quindi per la detta sostituzione A diverrà $A + A'z^a$ ec.: dunque ponendo questi valori nell'equazione di sopra sarà

$$(A) (x + y + z)^m = x^m + Az^a + Ay^a + AA'z^a y^a \text{ ec.}$$

Nella stessa equazione (a) si ponga $y + z$ invece di y , avremo

$$(B) (x + y + z)^m = x^m + A(y + z)^a \text{ ec.}$$

Nelle equazioni (A), (B) si ponga $y = z$ avremo

$$(x + 2y)^m = x^m + 2Ay^a + AA'y^{a+a'} \text{ ec.}$$

$$(x + 2y)^m = x^m + A2^a y^a \text{ ec.}$$

I secondi membri sono uguali, anzi a causa di y qualunque sono identici (A. G. §. 51.): dunque dalle nostre equazioni abbiamo il termine $2Ay^a$ indentico ad $A2^a y^a$; ciò non può essere se a non sia $= 1$. Si sono uguagliati questi termini, perchè nelle due serie gli altri termini hanno esponenti più grandi.

Con ciò la formola generale dello sviluppo diventa

$$(x + y)^m = x^m + Ay + By^b + Cy^c + Dy^d \text{ ec.}$$

Determiniamo A. Abbiamo

$$(x + y)^m = \left(x \left(1 + \frac{y}{x} \right) \right)^m = x^m \left(1 + \frac{y}{x} \right)^m :$$

dunque

$$x^m \left(1 + \frac{y}{x} \right)^m = x^m + Ay + By^b + Cy^c \text{ ec.}$$

dividendo ambedue i membri per x^m sarà

$$\left(1 + \frac{y}{x}\right)^m = 1 + \frac{Ay}{x^m} + \frac{By^6}{x^m} \text{ ec.}$$

Ora il secondo termine $\frac{Ay}{x^m} = \frac{A}{x^{m-1}} \cdot \frac{y}{x}$. Facendo dunque

in ambedue i membri $\frac{y}{x} = z$ sarà

$$(1 + z)^m = 1 + \frac{A}{x^{m-1}} z \text{ ec.}$$

169. Qui si vede che il primo membro è indipendente da x , dunque lo deve essere anche il secondo, dunque tutti i coefficienti di z e delle sue potenze debbono essere indipendenti da x : quindi generalmente parlando debbono dipendere da m , perchè nel primo membro non vi è che z , ed m . Una quantità dipendente da un'altra diceasi *funzione* di questa: perciò il coefficiente $\frac{A}{x^{m-1}}$ di z si dirà funzione di m , e si esprimerà, come è uso presso gli algebristi, per $f m$; avremo dunque $(1 + z)^m = 1 + f m z$ ec. Se m si cambi in n sarà $(1 + z)^n = 1 + f n z$ ec. Moltiplicando ambedue queste equazioni fra loro, e non ritenendo che il termine moltiplicato da z sarà $(1 + z)^{m+n} = 1 + (f m + f n) z$ ec. Ma se nell'equazione $(1 + z)^m = 1 + f m z$ ec. si ponga $m + n$ invece di m abbiamo $(1 + z)^{m+n} = 1 + f(m + n) z$ ec. I due secondi membri di queste equazioni dovendo essere identici sarà $f(m + n) = f m + f n$. Si ponga in questa equazione $m + r$ in luogo di r , ed avremo

$$f(m + n + r) = f(m + r) + f n =$$

(ponendo il valore antecedente di $f(m + n)$)

$$f m + f n + f r,$$

ed in genere

$$f(m + n + r + s \dots) = fm + fn + fr + fs + \text{cc.}$$

Supponendo, che m , n , r ec. essendo di numero a siano uguali fra loro sarà $f(am) = afm$.

170. La quantità $f(am)$ è tale, che non varia se vi si cambia a in m , o m in a , ossia, come si dice, $f(am)$ è funzione simmetrica di queste due quantità: tale dunque deve essere ancora il secondo membro afm , dunque $afm = mfa$, ed $\frac{fm}{m} = \frac{fa}{a}$: da ciò si ricava, che $\frac{fm}{m}$ è tale che non si scambia se vi muta la quantità m in un'altra qualunque a ; dunque è indipendente da m ; esprimendola dunque con b sarà

$$\frac{fm}{m} = b, fm = bm: \text{ dunque } (1 + z)^m = 1 + bmz \text{ ec.}$$

Manca ora di trovare la b . Si supponga in questa equazione $m = 1$, sarà $1 + z = 1 + bz$ ec.: dunque $b = 1$, e ciò per qualunque valore di m , perchè m è indipendente da b . Abbiamo dunque generalmente

$$(1 + z)^m = 1 + mz \text{ ec.}$$

Moltiplicando tutto per x^m , e ponendo $\frac{y}{x}$ invece di z , avremo

$$(C) (x + y)^m = x^m + mx^{m-1}y + By^b + Cy^c + Dy^d \text{ ec.}$$

171. Da ciò si trae la conseguenza, che se nell'espressione x^m si pone $x + y$ invece di x , il coefficiente dell'incremento y si ottiene dalla stessa x^m facendo passare l'esponente per coefficiente, e diminuendo poi l'esponente stesso di una unità. Questo coefficiente si chiama la *derivata* di x^m : dunque la derivata di y^b sarà by^{b-1} , quella di y^c sarà cy^{c-1} .

172. Andiamo a trovare gli altri coefficienti ed esponenti della serie superiore. Per giungere a ciò stabilisco, che la derivata $(x+y)^m$ è la stessa sia che si supponga crescere di x la x , o la y , il che si esprime dicendo, che la derivata di $(x+y)^m$ rispetto la x , è la stessa che la sua derivata rispetto la y . Ciò è chiaro perchè in $(x+y)^m$ le due x, y entrano dello stesso modo.

Ma si può anche dimostrare. Nell'equazione

$$(x+y)^m = x^m + mx^{m-1}y \text{ ec.}$$

Si muti la y in z sarà

$$(x+z)^m = x^m + mx^{m-1}z \text{ ec.}$$

Vi si ponga poi $x+y$ invece di x , ed avremo

$$(x+y+z)^m = (x+y)^m + m(x+y)^{m-1}z \text{ ec.}$$

La $m(x+y)^{m-1}$ è il coefficiente dell'incremento z quando in $(x+y)^m$ o la x , o la y si supponga crescere di questa quantità, dunque $m(x+y)^{m-1}$ è la derivata di $(x+y)^m$ rispetto alla x , o alla y . Prendiamo l'una, e l'altra derivata nell'equazione

$$(x+y)^m = x^m + mx^{m-1}y + By^b + Cy^c + Dy^d \text{ ec.}$$

Riteniamo generale il coefficiente nel secondo termine, e così avremo lo sviluppo

$$x^m + Ax + By^b + Cy^c + Dy^d \text{ ec.}$$

Prendiamo prima la derivata di tutti i termini rispetto la x . La x^m ci darà mx^{m-1} , la A , dipendente da x , ci darà una quantità A' , che è il coefficiente dell'incremento di x , che viene quando in A si ponga $x+z$ invece di x . Così B ci darà B' ; C , C' ec.; dunque la derivata dell'espres-

sione superiore rispetto la x è

$$(r) \quad mx^{m-1} + A'y + B'y^b + Cy^c + D'y^d \text{ ec.}$$

Prendiamo ora la derivata rispetto y . La x^m darà zero, perchè è indipendente da y . La derivata di Ay è A ; perchè ponendovi $y+z$ invece di y sarà $Ay + Az$, ove è A il coefficiente dell'incremento z . La $B'y^b$ ci darà per derivata bBy^{b-1} , la Cy^c , cCy^{c-1} , e così del resto; dunque la derivata cercata sarà tutta insieme

$$A + bBy^{b-1} + cCy^{c-1} + dDy^{d-1} \text{ ec.}$$

Questa, e la derivata (r) debbono essere identiche, dunque abbiamo

$$A = mx^{m-1}, \quad b-1=1, \quad c-1=b, \quad d-1=c \text{ ec.}$$

$$bB = A', \quad cC = B', \quad dD = C' \text{ ec.}$$

$A = mx^{m-1}$ è come di sopra; $b-1=1$ ci dà $b=2$, e quindi $bB=A'$ dà $B=\frac{A'}{2}$. Inoltre $c-1=b$, $c=b+1=3$,

e quindi da $cC=B'$ abbiamo $C=\frac{B'}{3}$; da $d-1=c$ si ha

$d=4$. La quantità A' è la derivata di A ; ora A , o mx^{m-1}

era la derivata di x^m : dunque come mx^{m-1} viene da m^m così deve venire A' da mx^{m-1} : cioè facendovi passare l'esponente per coefficiente, e diminuendo l'esponente d'una

unità: dunque $A' = m(m-1)x^{m-2}$: ma $B = \frac{A'}{2}$, dun-

que $B = \frac{m(m-1)x^{m-2}}{2}$.

La B' è la derivata di B o di $\frac{m(m-1)x^{m-2}}{2}$; dunque si dovrà trovare, come si è trovata la derivata di x^m ;

sarà dunque $B' = \frac{m(m-1)}{2} (m-2)x^{m-3}$; ma $C = \frac{B'}{3}$,
 dunque $C = m \frac{(m-1)}{2} \frac{(m-2)}{3} x^{m-3}$: nello stesso mo-
 do avremo

$$D = m \frac{(m-1)}{2} \frac{(m-2)}{3} \frac{(m-3)}{4} x^{m-4} .$$

Sostituendo questi valori nella formola (C) sarà

$$(x+y)^m = x^m + mx^{m-1}y + m \frac{(m-1)}{2} x^{m-2}y^2 + m \frac{(m-1)}{2} \frac{(m-2)}{3} x^{m-3}y^3 \text{ ec.}$$

173. Essendosi supposta qualunque la m , si vede, che lo sviluppo dimostrato di $(x+y)^m$ vale per un valore qualunque dell'esponente m ; quindi abbiamo generalmente provato la formola (§. 143.)

$$(a+b)^m = a^m + ma^{m-1}b + m \frac{(m-1)}{2} a^{m-2}b^2 + m \frac{(m-1)}{2} \frac{(m-2)}{3} a^{m-3}b^3 \text{ ec.}$$

174. Il secondo membro di questa uguaglianza si dice *lo sviluppo in serie di $(a+b)^m$* , perchè per *sviluppo in serie di una espressione qualunque s'intende il valore dell'espressione dato in tanti monomii*. La serie è *finita*, o *indefinita* secondo che questo numero di monomii è limitato, o illimitato. Se nell'espressione di sopra la m sarà intera positiva la serie di $(a+b)^m$ sarà finita, perchè quando dal successivamente togliersi uno in ciascuno de' termini dall'esponente m di a saremo giunti ad uno, avremo il penultimo termine. Se poi la m sarà negativa, ovvero una frazione, poichè da quella successiva sottrazione dell'unità non si potrà mai avere uno, non potremo trovare il penultimo termine.

175. La serie si dice anche *convergente*, o *divergente*. Si dice *divergente* quando i valori de'suoi monomii vanno suc-

cessivamente crescendo; si dice convergente quando vanno decrescendo; e la divergenza, e convergenza sarà tanto più grande quanto più cresceranno, o decresceranno i successivi monomii.

176. Si deve cercar sempre di rendere la serie convergente, e più che si può, perchè in tal caso con pochi suoi primi termini si ottiene il valore della data espressione sufficientemente prossimo al vero: si chiama la serie convergente, perchè alcuni suoi primi termini convergono verso il giusto valore della serie stessa, o della quantità sviluppata in serie.

177. Lo sviluppo dato di $(a + b)^m$ serve per svolgere in serie una frazione se la m è negativa, ed un radicale se è fratta.

178. Per farne uso più comodamente si può il detto sviluppo presentare sotto altra forma. Osservandolo si vede, che ogni termine si trova tutto intero nel termine seguente. Così il primo termine a^m è tutto in $ma^{m-1}b$, perchè questo si può rappresentare con $ma^m \frac{b}{a}$. Così ancora questo secondo termine $ma^m \frac{b}{a}$ si trova nel terzo

$m \frac{(m-1)}{2} a^{m-2} b^2$, che si riduce ad $m \frac{(m-1)}{2} a^m \frac{b^2}{a^2}$, o ad $ma^m \frac{b}{a} \cdot \frac{(m-1)}{2} \frac{b}{a}$. Parimente questo termine è nel quarto

$m \frac{(m-1)}{2} \frac{(m-2)}{3} a^{m-3} b^3$, che è lo stesso che $m \frac{(m-1)}{2} \frac{(m-2)}{3} a^m \frac{b^3}{a^3}$, o $m \frac{(m-1)}{2} a^m \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{(m-3)}{3} \frac{b}{a}$.

179. Se dunque si esprima con A, B, C ec. il primo, il secondo, il terzo ec. termine dello sviluppo di $(a+b)^m$, e per q il quoto del secondo termine del binomio diviso pel primo, cioè $\frac{b}{a}$, potremo porre

$$(A) (a+b)^m = a^m + m A q + \frac{m-1}{2} B q + \frac{m-2}{3} C q + \frac{m-3}{4} D q \text{ ec. ,}$$

ove si vede, che in ogni termine dello sviluppo si è lasciato il fattore, che è tutto il termine antecedente, ed in sua vece si è posta una lettera dell'alfabeto, che nel posto che ha nell'alfabeto stesso indica il posto del termine antecedente, che rappresenta.

180. Dallo sviluppo (A) si ricava, che la serie sarà convergente se $\frac{b}{a}$ sarà una frazione, e tanto più convergente

quanto più piccola frazione sarà $\frac{b}{a}$, o quanto sarà più piccolo il secondo termine del binomio rispetto al primo.

181. Facciamo una applicazione allo sviluppo in serie d'un radicale numerico.

Sia da svilupparsi in serie $\sqrt{2}$, o $2^{\frac{1}{2}}$. È necessario di ridurre a binomio il 2; ma questo binomio deve servire a due condizioni: primo, che il secondo termine sia minore del primo, onde la serie sia convergente; secondo che il primo termine sia tale, che esattamente vi si possa estrarre la radice seconda. Infatti lo scopo dello sviluppo in serie di un radicale è per avere il suo valore, quindi è necessario, che nello sviluppo svanisca il radicale stesso. Ora nello sviluppo (A) si vede, che se a^m non è radicale, non vi sarà radicale in alcuno dei termini seguenti. Il 2 si ridurrebbe subito al binomio $1 + 1$, nel quale il primo termine è tale, che vi si può estrarre la radice: ma il secondo diviso pel primo termine non dà una frazione: quindi è meglio di fare $2 = 4 - 2$. In questa ipotesi $\frac{b}{a} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$, frazione, che dà una convergenza alla serie. Si può avere una convergenza maggiore se si

pone $\sqrt{2} = \sqrt{\frac{200}{100}}$. Il quadrato prossimo di 200 è 196, la di cui radice è 14: dunque

$$\sqrt{2} = \sqrt{\frac{14^2 + 4}{100}} = \sqrt{\frac{7^2 + 1}{25}} = \frac{1}{5} \sqrt{7^2 + 1}.$$

Se si faccia $a = 7^2$, $b = 1$, $m = \frac{1}{2}$, sarà $\frac{b}{a} = \frac{1}{49}$, ed usando della formola (A) (§. 179.) avremo

$$(B) \sqrt{2} = \frac{1}{5} \left(7 + \frac{1}{2.7} - \frac{1}{2.4.7^3} + \frac{3}{2.4.6.7^5} - \frac{3.5}{2.4.6.8.7^7} \text{ ec.} \right),$$

la qual serie è molto convergente, perchè presi solamente i primi quattro termini avremo la frazione $\frac{380299}{268912}$, ossia il decimale 1.414213, il quale non differisce dal vero neppure d'un milionesimo.

Troverete

$$\sqrt{15} = 4 - \frac{1}{2.4} - \frac{1}{2.4.4^3} - \frac{3}{2.4.6.4^5} - \frac{3.5}{2.4.6.8.4^7} \text{ ec.,}$$

facendo $15 = 16 - 1$. La nostra serie è convergente, perchè presi i soli due termini $4 - \frac{1}{8}$ abbiamo $\frac{31}{8} = 3.875$, che non differisce dal vero neppure di tre millesimi.

182. Osservando la serie (B) (§. 181.) si vede, che dopo il primo i termini vanno sempre decrescendo, ed hanno i segni alternativamente positivi, e negativi. Ora se ci arrestiamo al termine negativo si commetterà un errore in difetto, e se ci fermiamo al termine positivo l'errore sarà in troppo. Infatti nel primo caso considerando i termini, che vengono appresso si vedrà, che sono alternativamente positivi e negativi, il valore però d'ogni coppia sarà positivo a causa della serie convergente, per cui il termine antecedente è maggiore del seguente: dunque fermandoci ad un termine negativo si trascura una quantità seguente positiva, quindi l'errore è di difetto; si proverà facilmente l'errore in troppo nel fermarci ad un termine positivo.



LOGARITMI

CAPO PRIMO

NATURA DE'LOGARITMI, E LORO USO.

1. Nella teoria delle progressioni geometriche una delle due formole, che collegava i loro elementi principali era (A. G. §. 179.)

$$u = aq^{n-1},$$

ove a esprime il primo termine della progressione, u l'ultimo, q la ragione, ed n il numero de' termini. Se si proponesse il problema. *Trovare il numero de' termini d'una progressione, che abbia per primo termine a , per ultimo u , e q per la ragione*, questo problema si risolverebbe per mezzo della nostra equazione, nella quale l'incognita sarebbe n . Ma non abbiamo mezzi per trovare il valore dell'incognita così collocata. Abbiamo veduto nell'Aritmetica, ed Aritmetica generale come si possa isolare l'incognita liberandola dalle cognite ad essa unite colle quattro operazioni aritmetiche. L'Algebra è un trattato tutto per liberare l'incognita dall'esponente, e ciò colla estrazione di radici; manca il metodo per abbassare l'incognita dal posto dell'esponente.

2. La nostra equazione $u = aq^{n-1}$ si può porre sotto

la forma $q^{n-1} = \frac{u}{a}$, e facendo $n-1 = x$, ed $\frac{u}{a} = b$ avremo $q^x = b$, e si dovrà togliere x dal luogo dell'esponente.

3. Se in ciò riusciremo potremo risolvere i più difficili problemi delle così dette *annuità*, ed *interesse composto*. Per esempio i problemi dell'interesse composto suppongono un capitale, che si tenga a frutto un dato numero di anni alla ragione di r ad uno per anno, e volendosi lasciare i frutti annui nei capitali, onde fruttare insieme negli anni seguenti, si vogliono collegati insieme questi quattro elementi; capitale c al principio del primo anno, il frutto r del capitale uno, il numero n degli anni, ed il capitale finale C , affinchè cogniti tre di questi elementi si possa trovare il quarto.

4. La formola domandata si ottiene subito. Se uno frutta r , il capitale c frutterà cr : dunque alla fine del primo anno fra capitale e frutto si avrà $c+cr$, o $c(1+r)$: dunque per avere ciò che si ha tra capitale e frutto al fine del primo anno si deve moltiplicare il capitale c al principio del primo anno per $1+r$: quindi per avere il capitale e frutto insieme al fine del secondo anno si dovrà moltiplicare il capitale $c(1+r)$ al principio di questo secondo anno per $1+r$, perciò sarà $c(1+r)^2$. Così il capitale e frutto al fine del terzo anno sarà $c(1+r)^3$, ed alla fine dell'anno n^{mo} sarà $c(1+r)^n$. Se dunque questa somma s'indica con C sarà $C = c(1+r)^n$. In questa formola quattro sono le quantità, il capitale c al principio del primo anno, il capitale C alla fine dell'anno n^{mo} , questo numero di anni, ed r frutto di 1 in un anno: quindi date tre di queste quantità si può trovare la quarta.

5. Se si volesse il numero degli anni si troverebbe la stessa difficoltà, che nel problema (§. 1.), perchè si dovrebbe risolvere l'equazione $(1+r)^x = \frac{C}{c}$, dove l'incognita

trovasi nell'esponente. Se in questa equazione si fa $1+r=a$, e $\frac{C}{c} = b$, avremo $a^x = b$. Confrontando questa coll'altra (§. 2.) $q^x=b$ si vede, che si deve risolvere una stessa specie di equazione per determinare l'incognita. Diamo questa soluzione in $a^x = b$.

6. A questo fine la detta equazione si elevi alla potenza m , essendo m qualunque, ed anche zero; avremo $a^{mx} = b^m$: questa si può porre anche sotto la forma

$$(1 + a - 1)^{mx} = (1 + b - 1)^m :$$

sviluppando col supporre monomii $a - 1$, $b - 1$ sarà

$$1 + mx(a-1) + mx\left(\frac{mx-1}{2}\right)(a-1)^2 + mx\left(\frac{mx-1}{2}\right)\left(\frac{mx-2}{3}\right)(a-1)^3 \text{ ec.} =$$

$$1 + m(b-1) + m\left(\frac{m-1}{2}\right)(b-1)^2 + m\left(\frac{m-1}{2}\right)\left(\frac{m-2}{3}\right)(b-1)^3 \text{ ec. ;}$$

togliendo l'unità da ambe le parti, e poi dividendo per m sarà

$$x(a-1) + x\left(\frac{mx-1}{2}\right)(a-1)^2 + x\left(\frac{mx-1}{2}\right)\left(\frac{mx-2}{3}\right)(a-1)^3 \text{ ec.} =$$

$$b-1 + \left(\frac{m-1}{2}\right)(b-1)^2 + \left(\frac{m-1}{2}\right)\left(\frac{m-2}{3}\right)(b-1)^3 \text{ ec.}$$

facendo $m = 0$ sarà

$$x(a-1) - \frac{x}{2}(a-1)^2 + \frac{x}{3}(a-1)^3 - \frac{x}{4}(a-1)^4 \text{ ec.} =$$

$$b-1 - \frac{1}{2}(b-1)^2 + \frac{1}{3}(b-1)^3 - \frac{1}{4}(b-1)^4 \text{ ec.}$$

e finalmente

$$x = \frac{b-1 - \frac{1}{2}(b-1)^2 + \frac{1}{3}(b-1)^3 - \frac{1}{4}(b-1)^4 \text{ ec.}}{a-1 - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - \frac{1}{4}(a-1)^4 \text{ ec.}}$$

7. Per rendere convergenti le due serie, che costituiscono i due termini di questa frazione si riprenda l'equazione $a^x = b$, e si estraiga la radice m^a da ambe le parti, sarà $(\sqrt[m]{a})^x = \sqrt[m]{b}$; dunque l'equazione antecedente, che proveniva da $a^x = b$ può cambiarsi in quest'altra

$$x = \frac{\sqrt[m]{b}-1 - \frac{1}{2}(\sqrt[m]{b}-1)^2 + \frac{1}{3}(\sqrt[m]{b}-1)^3 - \frac{1}{4}(\sqrt[m]{b}-1)^4 \text{ ec.}}{\sqrt[m]{a}-1 - \frac{1}{2}(\sqrt[m]{a}-1)^2 + \frac{1}{3}(\sqrt[m]{a}-1)^3 - \frac{1}{4}(\sqrt[m]{a}-1)^4 \text{ ec.}}$$

8. È chiaro, che le due serie saranno tanto più convergenti quanto più piccole saranno le differenze $\sqrt[m]{b}-1$, $\sqrt[m]{a}-1$: ora questa piccolezza si può ottenere a piacere, perchè la m è arbitraria: quindi da a , e da b si estrarrà una stessa radice così grande, che le differenze dette siano di quella piccolezza, che si voglia; la quale se sia tale, che nelle due serie bastino i primi termini, in tal caso il valore domandato di x sarà espresso dalla semplicissima formula

$$x = \frac{\sqrt[m]{b}-1}{\sqrt[m]{a}-1}.$$

9. Affinchè l'estrarre la radice m^a quando m è un poco grande non riesca tanto incomodo, da b , e da a si pos-

sono estrarre successive radici seconde: nel qual caso la m sarà una potenza di 2; quindi si sceglierà per m una tal potenza di 2, che estratta la radice di questo grado da a , e da b le differenze $\sqrt[m]{b-1}$, $\sqrt[m]{a-1}$ riescano così piccole, che siano disprezzabili le loro successive potenze.

10. Nell'equazione $a^x = b$ si ritenga a di valor fisso, egli è certo che variando la x varierà la b . Rappresentino dunque y , y' , y'' , y''' i valori di b corrispondenti ad x , x' , x'' , x''' , quindi avremo l'equazioni $a^x = y$, $a^{x'} = y'$, $a^{x''} = y''$, $a^{x'''} = y'''$.

11. Moltiplicandole si ha $a^{x+x'+x''+x'''} \text{ ec.} = y y' y'' y''' \text{ ec.}$ dunque al prodotto delle quantità y , y' , y'' , y''' ec. corrisponde la somma degli esponenti x , x' , x'' , x''' ec. delle equazioni $a^x = y$, $a^{x'} = y'$, $a^{x''} = y''$, $a^{x'''} = y'''$ ec. dalle quali le dette quantità y , y' , y'' , y''' ec. si ottengono coll'innalzare la quantità fissa a ai detti esponenti.

12. Si divida l'equazione $a^x = y$ per l'altra $a^{x'} = y'$, sarà $a^{x-x'} = \frac{y}{y'}$: dunque alla divisione della quantità y , y' corrisponde la sottrazione degli esponenti x , x' , l'uno, che appartiene al dividendo, e l'altro al divisore nelle due equazioni $a^x = y$, $a^{x'} = y'$, per le quali le dette quantità y , y' si ottengono elevando la quantità fissa ai detti esponenti.

13. Si elevi l'equazione $a^x = y$ all'esponente m , e sarà $a^{mx} = y^m$; dunque all'elevazione di y alla potenza m corrisponde la moltiplicazione per m dall'esponente x , cui elevata la quantità fissa a ci dà la stessa y .

14. Si estraiga la radice m^{ma} nell'equazione $a^x = y$, e sarà $\sqrt[m]{a^x} = \sqrt[m]{y}$: ma invece di $\sqrt[m]{a^x}$ si può porre $a^{\frac{x}{m}}$: dunque $a^{\frac{x}{m}} = \sqrt[m]{y}$: dunque all'estrazione della radice m^{ma} da y corrisponde la divisione per m del suo esponente x nell'equazione $a^x = y$.

15. Nel (§. 8.) abbiamo dato la formola, per la quale cogniti a , b nell'equazione $a^x = b$ si può trovare x . Se dunque si fissa un numero a piacere a , e per y si rappresentino tutti i successivi valori numerici dati a b , onde sia $a^x = y$, si potranno avere tutti i valori di x , che sono gli esponenti a cui successivamente elevato il numero fisso ci dà tutti i successivi numeri y .

16. È chiaro, che se nell'equazione $a^x = y$, $y = 0$ non si può mai soddisfare all'equazione $a^x = 0$, perchè non si può trovare un valore di x per quantunque piccolo, cui elevato un numero esistente dia zero di risultamento.

17. Inoltre se y sia l'unità, all'equazione $a^x = 1$ non si può soddisfare, che col simbolo a^0 , che per convenzione rappresenta uno, onde zero è il valore di x , che con una simbolica potenza di a può dare uno.

18. Se $y = a$ per soddisfare all'equazione $a^x = a$ si deve prendere $x = 1$.

19. Per a poi non si può prendere nè l'unità, nè una quantità negativa. Non l'unità, perchè questa elevata a qualunque esponente non può dare che uno, e non tutti numeri come si vuole.

20. Non si può prendere poi per a un numero negativo, perchè con un numero negativo elevato alle successive potenze non si possono ottenere tutti i numeri.

21. Per ottenere tutti i numeri espressi da $\frac{1}{y}$, ove ad y si debbono dare i successivi valori, si debbono prendere per x successivi valori negativi, perchè fatto

$$x = -1, x = -2, x = -3 \text{ ec.}, a^{-1}, a^{-2}, a^{-3} \text{ ec.}$$

sono simboli di

$$\frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^3} \text{ ec. valori di } \frac{1}{y}.$$

Infatti da $a^x = y$, abbiamo

$$\frac{1}{a^x} = \frac{1}{y} \quad \text{ossia} \quad a^{-x} = \frac{1}{y}.$$

22. Se dunque in $a^x = y$ si fissi il numero a , dati alla y tutti i successivi valori interi e fratti, coll'equazione (§. 8).

$$x = \frac{\sqrt[m]{y} - 1}{\sqrt[m]{a} - 1}$$

si calcoleranno i corrispondenti valori di x . Ciò eseguito si faccia un catalogo di due colonne; in una colonna si scrivano i numeri y , e nella seguente i corrispondenti valori di x . Questo catalogo sarà utile per ridurre primo l'operazione della moltiplicazione a quello di somma. Infatti nel (§. 11.) si è veduto, che ai numeri y, y', y'', y''' corrispondendo gli esponenti x, x', x'', x''' , al loro prodotto corrisponde $x + x' + x'' + x'''$: dunque dati a moltiplicarsi i numeri y, y', y'', y''' si cercheranno questi nella prima colonna del nostro catalogo, e nella colonna seguente si troveranno gli x, x' ec. corrispondenti; questi si sommeranno, e la somma si cercherà nella seconda colonna; è chiaro che il numero accanto nella prima essendo il valore di y, y', y'', y''' , questo sarà il prodotto domandato, ottenuto con una semplice somma.

23. Se si desse a dividere y per y' , trovati questi nella prima colonna si vedranno nella seconda colonna gli x, x' corrispondenti; si sottragga il secondo dal primo e la differenza $x - x'$ corrisponderà a $\frac{y}{y'}$, (§. 12.), corrisponderà allo stesso tempo al numero accanto nella prima colonna; quindi questo numero sarà il valore di $\frac{y}{y'}$, ottenuto colla sottrazione.

24. Nell'estrazione della radice m^{ma} da y , basta di-

vedere per m l'esponente x , che si trova corrispondergli nella seconda colonna (§. 14.), e trovare il quoto $\frac{x}{m}$ nella stessa colonna, ch  il numero che gli   accanto nella prima sar  la radice domandata.

25. Dovendosi elevare y alla potenza m si moltiplicher  per m il valore x (§. 13.), che gli si trova accanto nella seconda colonna, ed il prodotto cercato nella stessa colonna ci dar  nel numero, che gli corrisponde nella prima, la potenza m^{ma} domandata di y .

26. Questi esponenti x calcolati dall'equazione $a^x = y$ sono dunque di un gran vantaggio, perch  riducono le operazioni aritmetiche pi  complicate alle pi  semplici. La moltiplicazione si riduce alla somma; la divisione alla sottrazione, l'elevazione a potenza alla moltiplicazione, ed il pi  delle volte di piccolo moltiplicatore; l'estrazione di radice alla divisione, spesso di piccolo divisore.

27. A causa dell'uso frequente, e molto comodo di questi esponenti x nell'equazione $a^x = y$ si distinguono con un nome. Gli esponenti x si chiamano i *logaritmi* dei numeri corrispondenti y , ed a si dice la *base dei logarithmi*.

28. Dalla detta equazione si ricava, che il *logaritmo d'un numero   l'esponente a cui elevato un numero fisso, o la base d  il numero stesso. La base dei logarithmi   il numero, che si fissa per elevarlo a tutte le possibili potenze, onde ottenere tutti i possibili numeri.*

Se si fissa per base per es. il numero 4, i logarithmi di 16, e 64 faranno 2, e 3, perch  $4^2=16$, $4^3=64$. I logarithmi di 2 e 32 sono $\frac{1}{2}$, e $\frac{5}{2}$, perch 

$$4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2; \quad 4^{\frac{5}{2}} = \sqrt{4^5} = 2^5 = 32.$$

I logaritmi di $\frac{1}{16}$ di $\frac{1}{64}$ sono -2 , -3 , perchè

$$4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}, \quad 4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}.$$

29. Per esprimere che x è il logaritmo di y si scrive $x = \log. y$: quindi nei casi antecedenti

$$2 = \log. 16, \quad 3 = \log. 64; \quad \frac{5}{2} = \log. 32; \quad -3 = \log. \frac{1}{64}.$$

Se avendo espresso con $\log. 64$ il logaritmo di 64 nella base 4, si volesse indicare il logaritmo di 64 nella base 2, si dovrebbe variare l'indice $\log.$, e scrivere per esempio $\text{Log. } 64$, o $\text{l}64$, o $\text{L}64$. Così si scriverebbe per la base 4, $3 = \text{Log. } 64$; e per la base 2, $6 = \log. 64$. E si deve stabilire, che *variando la base variano i logaritmi degli stessi numeri*.

30. Dal (§. 17.) si ricava, che in qualunque base

$$\text{Log. } 1 = 0;$$

cioè in una qualunque base il logaritmo dell'unità è zero.
Dal (§. 18.)

$$\text{Log. } a = 1,$$

cioè il logaritmo della base preso nella base stessa è l'unità.
Dal (§. 20.), che *il logaritmo d'una quantità negativa è immaginario*.

31. Dal (§. 11.) abbiamo

$$a^{x+x'+x''+x'''} \text{ ec.} = y \, y' \, y'' \, y''' \text{ ec.} :$$

dunque

$$x + x' + x'' + x''' \text{ ec.} = \text{Log. } y \, y' \, y'' \, y''' \text{ ec.} (a)$$

ma dalle equazioni

$$a^x = y, \quad a^{x'} = y', \quad a^{x''} = y'', \quad a^{x'''} = y'''$$

ricaviamo

$$x = \text{Log.} y, \quad x' = \text{Log.} y', \quad x'' = \text{Log.} y'', \quad x''' = \text{Log.} y''' \text{ ec.};$$

dunque l'equazione (a) diventa

$$\text{Log.} y y' y'' y''' \text{ ec.} = \text{Log.} y + \text{Log.} y' + \text{Log.} y'' + \text{Log.} y''' \text{ ec.}$$

cioè il Logaritmo di un prodotto $y y' y'' y'''$ ec. è uguale alla somma dei logaritmi dei fattori y, y', y'', y''' ec.

32. Dal (§. 12.) abbiamo

$$a^x = y, \quad a^{x'} = y'; \quad a^{x-x'} = \frac{y}{y'}.$$

Da questa si ha

$$\text{Log.} \frac{y}{y'} = x - x',$$

ossia per la prima, o seconda equazione

$$\text{Log.} \frac{y}{y'} = \text{Log.} y - \text{Log.} y';$$

dunque, il logaritmo d'una frazione è uguale al logaritmo del numeratore meno il logaritmo del denominatore.

33. Dal (§. 13.) abbiamo $a^{mx} = y^m$, essendo $a^x = y$: dunque dalla prima $mx = \text{Log.} y^m$: ma dalla seconda abbiamo $x = \text{Log.} y$: dunque sostituendo nell'antecedente

$$\text{Log.} y^m = m \text{Log.} y:$$

dunque il logaritmo di una potenza è uguale al logaritmo della quantità elevata a potenza moltiplicato pel suo esponente.

34. In ultimo si sono avute (§. 14.) le due equazioni

$$a^x = y, \text{ ed } a^{\frac{x}{m}} = \sqrt[m]{y} : \text{ dunque } \text{Log.} \sqrt[m]{y} = \frac{x}{m} = \frac{\text{Log.} y}{m} :$$

quindi il *logaritmo d'una radice è uguale al logaritmo della quantità, da cui si deve estrarre la radice diviso per l'esponente della radice.*

35. Quantunque (§. 29.) al variare della base per uno stesso numero debbano variare i logaritmi, pure calcolati i logaritmi di tutti i numeri in una data base, o come si dice avendosi *un sistema di logaritmi* per una base, si possono ridurre ad un'altro sistema per un'altra base, e ciò col moltiplicarli per una quantità fissa.

36. Siano due basi a, b , e nella base a siano noti i logaritmi x dei numeri y , e si vogliano i logaritmi x' degli stessi numeri y nella base b . Avremo dunque $a^x = y$, $b^{x'} = y$: dunque $a^x = b^{x'}$; prendendo in ambedue i membri di questa equazione i logaritmi cognitivi nella base a sarà

$$\text{Log.} a^x = \text{Log.} b^{x'}, \text{ ossia } (§. 33.) x \text{Log.} a = x' \text{Log.} b :$$

ma (§. 30.) $\text{Log.} a = 1$; dunque

$$x = x' \text{Log.} b, \text{ ed } x' = \frac{x}{\text{Log.} b} = \frac{1}{\text{Log.} b} \cdot x :$$

dunque i logaritmi x' nella base b si ottengono dai logaritmi x noti nella base a moltiplicando questi per la frazione costante $\frac{1}{\text{Log.} b}$: questa frazione si chiama *modulo* del sistema de' logaritmi della base a per avere il sistema della base b . Dunque *il modulo è una frazione, che ha per numeratore l'unità, e per denominatore il logaritmo della nuova base, logaritmo preso nel sistema della base, che si deve modificare.*

37. Se $y = a$ avremo $a^x = a$, $b^{x'} = a$; dalla prima sarà $x = 1$, e dalla seconda $x' = \log.a$, indicando con $\log.$ i logaritmi nella base b . Facendo queste sostituzioni in $x' = \frac{x}{\log.b}$ avremo $\log.a = \frac{1}{\log.b}$, e $\log.a \log.b = 1$:

Da ciò si ricava, che il prodotto dei logaritmi di due basi, l'un logaritmo preso nell'altra base, è uguale all'unità.

38. La formola per calcolare i logaritmi in un sistema è la trovata (§. 22.)

$$x = \log.y = \frac{\sqrt[m]{y} - 1}{\sqrt[m]{a} - 1}.$$

Questa formola si può semplificare così, che sparisca il denominatore, e ciò scegliendo una base a ciò acconcia. Si avrà così un particolare sistema calcolato più facilmente; ma col modulo (§.36.) si potrà con facilità ridurre ad un altro sistema qualunque. Vediamo dunque la semplificazione dell'equazione antecedente.

39. Riprendiamo l'espressione (§. 6.) ponendovi y in luogo di b , ed avremo

$$x = \frac{y - 1 - \frac{1}{2}(y-1)^2 + \frac{1}{3}(y-1)^3 - \frac{1}{4}(y-1)^4 \text{ ec.}}{a - 1 - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - \frac{1}{4}(a-1)^4 \text{ ec.}},$$

Si faccia $A = a - 1 - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 \text{ ec.}$ e risolviamo il problema; trovare un valore di a onde si abbia $A = 1$.

Poniamo $a = \left((1 + a - 1)^m \right)^{\frac{1}{m}}$: equazione, che evidentemente sussiste; nella quale la m distruggendosi da

se stessa può essere qualunque, ed anche zero. Sviluppando $(1 + a - 1)^m$ poniamo

$$(1 + a - 1)^m = 1 + Mm + Nm^2 \text{ ec.}$$

Facilmente si troverà $M = A$ se si sviluppa $(1 + a - 1)^m$ supponendo $a = 1$ un monomio. Abbiamo dunque

$$a = (1 + Am + Nm^2 \text{ ec.})^{\frac{1}{m}} =$$

(Sviluppando il binomio col supporre monomia la quantità $Am + Nm^2$ ec.)

$$1 + \frac{1}{m}(Am + Nm^2 \text{ ec.}) + \frac{1}{m^2}\left(\frac{1-m}{2}\right)(Am + Nm^2 \text{ ec.})^2 +$$

$$\frac{1}{m^3}\left(\frac{1-m}{2}\right)\left(\frac{1-2m}{3}\right)(Am + Nm^2 \text{ ec.})^3 \text{ ec.} =$$

$$1 + (A + Nm \text{ ec.}) + \left(\frac{1-m}{2}\right)(A + Nm \text{ ec.})^2 +$$

$$\left(\frac{1-m}{2}\right)\left(\frac{1-2m}{3}\right)(A + Nm \text{ ec.})^3,$$

e facendo $m = 0$ sarà

$$a = 1 + A + \frac{1}{2} A^2 + \frac{1}{2 \cdot 3} A^3 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} A^4 \text{ ec.}$$

Se $A = 1$ sarà

$$a = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} \text{ ec.} = 2.718281$$

Questa base di noto valore, per cui A, o

$$a - 1 = \frac{1}{2} (a - 1)^2 + \frac{1}{3} (a - 1)^3 \text{ ec.}$$

è uno si chiama *base neperiana*, e si suole esprimere con e ; ed i logaritmi delle quantità si esprimono ponendo innanzi ad esse la l . Così lb vuol dire logaritmo neperiano di b .

40. Dopo ciò l'espressione (§. 39.) diventa

$$x = ly = y - 1 - \frac{1}{2}(y-1)^2 + \frac{1}{3}(y-1)^3 - \frac{1}{4}(y-1)^4 \text{ ec. ,}$$

e l'equazione generale nel nostro caso è $e^x = y$. Estraendo

in questa la radice m^{ma} sarà $e^{\frac{x}{m}} = \sqrt[m]{y}$, dunque quando si pone $\sqrt[m]{y}$ invece di y si deve porre $\frac{x}{m}$ invece di x : quindi l'equazione antecedente diventa

$$\frac{x}{m} = l\sqrt[m]{y} = \sqrt[m]{y} - 1 - \frac{1}{2}(\sqrt[m]{y} - 1)^2 + \frac{1}{3}(\sqrt[m]{y} - 1)^3 \text{ ec. ,}$$

e supponendo (§. 8.) estratta così grande radice m^{ma} da y , che $\sqrt[m]{y} - 1$ sia così piccola che basti il primo termine della serie antecedente, avremo semplicemente

$$x = ly = m(\sqrt[m]{y} - 1)$$

formola semplicissima per calcolare i logaritmi neperiani.

41. Per mezzo dei logaritmi calcolati ridotti in tavole non solo si possono semplificare le operazioni, come si è detto (§. 26.), ma si possono risolvere l'equazioni superiori (§. 2, 5.), e le analoghe a quelle.

42. Nelle progressioni geometriche volendosi il numero dei termini cognito il primo, l'ultimo, e la ragione si dovrà risolvere l'equazione $aq^{x-1} = u$. Prendendo in questa i logaritmi sarà

$$laq^{x-1} = lu ,$$

e (§. 31.) $la + lq^{x-1} = lu,$

e (§. 33.) $la + (x-1) lq = lu, \quad x = 1 + \frac{lu - la}{lq} :$

basterà dunque cercare i logaritmi dei numeri u, a, q , e sostituirli nell'equazione antecedente, e si avrà x .

43. Nei problemi d'interesse composto (§. 4.) se si voglia il numero degli anni, onde un capitale dato c diventi C , supponendo r il frutto annuo di 1 , si dovrà risolvere l'equazione

$$c(1+r)^x = C.$$

Si prenderanno dunque i logaritmi, e sarà $lc + x l(1+r) = lC$,

ed
$$x = \frac{lC - lc}{l(1+r)}.$$

44. È utile l'usare i logaritmi quando anche fosse dato x , e ciò perchè sono semplificate le operazioni (§. 26.). Infatti se si volesse la r nell'equazione $c(1+r)^x = C$; qualora si risolvesse senza i logaritmi si avrebbe

$$r = \sqrt[n]{\frac{C}{c}} - 1,$$

dove si dovrebbe estrarre la radice n^{ma} dalla frazione $\frac{C}{c}$, operazione penosa un poco che n sia grande. All'incontro prendendo i logaritmi si avrà

$$l(1+r) = \frac{1}{n} (lC - lc).$$

Si sostituiranno i valori di lC, lc trovati nelle tavole, e divisa per n la differenza $lC - lc$ si avrà il logaritmo di $1+r$. Si cercherà nelle tavole questo logaritmo, ed

il numero accanto sarà il valore $1 + r$: togliendogli dunque l'unità si troverà r .

45. Se si esamina l'equazione $a^x = y$, dalla quale si calcolano i logaritmi, e per mezzo di questi si semplificano le operazioni, e si risolvono equazioni, nelle quali l'incognita sta per esponente, si vede una nuova maniera di formare i numeri y , coll'elevare cioè una quantità fissa alle successive potenze maggiori dell'unità per avere i numeri maggiori di a , e minori dell'unità inclusivamente ai negativi per avere i numeri minori di a . Questa nuova maniera di formare i numeri semplifica le operazioni più complicate di moltiplicazione, divisione, innalzamento a potenza, ed estrazione di radice, perchè queste operazioni fatte sopra i numeri y danno corrispondentemente somma, sottrazione, moltiplicazione, e divisione nei corrispondenti valori di x (§§. 22, 23, 24, 25.) esponente di a , e ciò a causa, che questi numeri y sono dati da una potenza, e da una potenza di quantità costante. Infatti essendo costante la a , ad un dato numero y non può corrispondere, che un solo valore di x nell'equazione $a^x = y$, onde x veramente rappresenta y , e perciò gli si può sostituire; e poichè per es. una elevazione di y alla potenza m porta la moltiplicazione di x per m , perciò come alla y si sostituisce la quantità rappresentatrice x , così all'innalzamento di y alla potenza m si sostituisce la moltiplicazione di x per m .

46. Comunemente nell'aritmetica si dice, che i numeri si formano partendo dall'unità, ed aggiugnendogli successivamente l'unità. Ma così si hanno i soli numeri interi. Si otterrebbero tutti i numeri fissando una quantità qualunque a , e successivamente aggiugnendogli quantità crescenti cominciando dalla più piccola possibile, e sottraendogli successivamente quantità sempre maggiori cominciando dalla più piccola, e non oltrepassando a . Si vede poi chiaro, che se a esprime la quantità fissa, x il numero

sempre crescente, che gli si aggiunge, e gli si toglie, ed y tutti i numeri provenienti, l'equazione $y = a + x$ esprime la maniera aritmetica di formare i numeri. Qui ancora essendo a costante, un valore positivo, o negativo di x non dà che un determinato valore di y ; quindi anche qui la x rappresenta la y , e perciò gli si potrebbe sostituire: ma le operazioni, che si facessero sopra y sarebbero le stesse operazioni sopra la x , ed anche più complicate. Per esempio y^m equivarrebbe ad $(a + x)^m$, dove x parimente è elevato alla potenza m , ed anche con maggior complicazione, perchè formando con a un binomio, e si dovrebbe elevare un binomio invece d'un monomio, e nello sviluppo s'invilupperebbe colla a . Quindi il metodo aritmetico di formare i numeri lascia le operazioni come sono, e non dà metodo per trovare l'incognita quando sia nell'esponente. Ma a tutto ciò giova il metodo esposto de'logaritmi, che diremo metodo algebrico di formare i numeri; perchè come l'algebra è quella, che tratta delle potenze, così è quella, che ci ha dato il metodo di formare i numeri coll'operazione dell'innalzamento a potenza.



CAPO SECONDO

COGNIZIONE ED USO DELLE COMUNI TAVOLE DE'LOGARITMI.



47. Nelle tavole comuni la base è 10. Ora 10^0 , 10^1 , 10^2 , 10^3 , 10^4 ec. danno 1, 10, 100, 1000, 10000 ec. Da ciò si vede, che i logaritmi 1, 10, 100, 1000, 10000 ec. sono 0, 1, 2, 3, 4 ec. cioè *i logaritmi dei numeri formati dall'unità, e zero sono tante unità quanti sono i zeri.*

48. Quindi tutti i numeri fra uno e 10 avranno logaritmi compresi fra 0, ed 1, perciò saranno frazioni: es-

sendo dunque queste frazioni date in decimali non avranno intero. Inoltre tutti i numeri fra 10, e 100 avranno i logaritmi fra 1, e 2, dunque saranno formati dall'intero uno più la parte decimale. I numeri fra 100, e 1000 avranno logaritmi formati dall'intero 2, e da parte decimale. I logaritmi de' numeri fra 1000, e 10000 avranno l'intero 3, e la parte decimale, e così innanzi. La parte intera del logaritmo si chiama *caratteristica*, e la parte decimale si dice *mantissa*. Ora i numeri fra 1, 10 hanno una sola cifra: dunque i numeri d'una sola cifra hanno zero di caratteristica. I numeri fra 10 e 100 hanno due cifre, ed una unità nella caratteristica del logaritmo. I numeri 100, 1000 hanno tre cifre, e due unità nella caratteristica del logaritmo. I numeri fra 1000, e 10000 hanno quattro cifre, e tre unità nella caratteristica del logaritmo.

49. Possiamo dunque stabilire, che le unità nella caratteristica d'un logaritmo sono tante meno una quante sono le cifre del numero al quale appartiene il detto logaritmo. Quindi se il numero ha 5, 6 cifre il suo logaritmo ha di caratteristica 4, 5. Il perchè nelle tavole dei logaritmi si scrive solo la mantissa. Si chiama caratteristica, perchè da essa scorgo a qual classe decadica appartenga il numero nella sua più alta cifra. Così se la caratteristica è 4, il numero ha cinque cifre, quindi la sua più alta cifra appartiene alle centinaja di migliaia. Si dice mantissa dalla parola latina *mantissa*, che vuol dire aggiunta, perchè è una parte decimale aggiunta all'intero.

50. Aggiungendosi, o togliendosi alla caratteristica un numero di unità, il numero, cui il logaritmo appartiene, si moltiplica, o si divide per un'altro, che è l'unità seguita da tanti zeri quante sono le unità aggiunte. Infatti

$$L1000a = L1000 + La = 3 + La;$$

$$L \frac{a}{10000} = La - L10000 = La - 4:$$

dalla prima uguaglianza si ricava, che coll'aggiungere il 3 al logaritmo di a , la a è moltiplicata per 1000, perchè si ha così il logaritmo di $1000a$; dalla seconda uguaglianza si ha, che togliendo 4 dal logaritmo di a si divide a per 10000, perchè si ha con ciò il logaritmo di $\frac{a}{10000}$.

Dopo ciò per l'uso delle tavole risolviamo due problemi: il primo, dato il numero trovare il suo logaritmo; l'altro, dato il logaritmo trovare il numero.

PROBLEMA I.

DATO IL NUMERO PER MEZZO DELLE TAVOLE
TROVARE IL SUO LOGARITMO.

51. Se il numero è tra quelli delle tavole, il suo logaritmo è scritto accanto nell'altra colonna.

52. *Si voglia il logaritmo del numero, che superi quelli delle tavole.* Nelle tavole di Callet il più alto numero, di cui si abbia il logaritmo è 107999. Supponiamo dunque, che si volesse il logaritmo d'un numero di più di sei cifre per esempio di 178345698; ne separo sei a sinistra ed ho il numero 178345, che veggo anche non essere compreso nelle tavole, perchè, come si è detto, il più alto numero è 107999; quindi ne separo cinque, ed ho 17834. Ora è evidente, che il nostro numero è compreso fra 178340000, e 178350000, e perciò il suo logaritmo è compreso fra i logaritmi di questi. Ora i logaritmi di questi numeri sono i logaritmi di 17834, 17835 aggiunte quattro unità ad ambedue le caratteristiche (§. 50.) Cercati nelle tavole i logaritmi dei detti numeri si trovano 4.2512488, 4.2512731, dunque i logaritmi dei numeri 178340000, 178350000 sono 8.2512488; 8.2512731. La differenza fra questi due logaritmi è 0.0000243, e la differenza dei due numeri è 10000: quindi si farà la pro-

porzione; se alla differenza 10000 dei numeri tra i quali è compreso il nostro 178345698 compete la differenza 0.0000243 dei logaritmi, alla differenza 5698 fra il nostro numero, e l'inferiore 178340000 qual differenza di logaritmi competerà? Questa differenza aggiunta al logaritmo del numero inferiore ci dirà il logaritmo del nostro. La detta proporzione è

$$10000 : 0.0000243 = 5698 : x$$

ed $x = 0.00001384614.$

Dovendosi aggiungere questo risultamento alla mantissa, 0.2512488 del logaritmo del numero inferiore, si vede, che si deve agginngere alle ultime cifre della detta mantissa il 138, escluse nel numero x le quattro ultime cifre 4614 che sono tante quanti sono i zeri del 10000, differenza dei numeri, fra i quali il nostro è compreso; o quante sono le cifre ultime separate dal numero proposto, onde trovare il risultante nelle tavole. Dopo ciò il logaritmo di 178345698 è 8.2512626. Ecco dopo il caso antecedente la regola pratica per trovare il logaritmo d' un numero maggiore di quelli compresi nelle tavole.

53. *Separate nel numero proposto a sinistra tante cifre quante sono necessarie, affinchè il numero residuo sia nelle tavole. Cercate la mantissa del logaritmo di questo numero non badando al denominatore decimale, e quella dello stesso numero aumentato d'una unità nell'ultima cifra a dritta. Sottraete da questa la prima mantissa, moltiplicate il residuo pel numero composto dalle cifre tolte al proposto numero, e nel prodotto a dritta toglietene tante quante sono le dette cifre tolte. Aggiungete il numero residuo alle ultime cifre della mantissa del proposto numero tolte le ultime cifre, e ponendovi l'opportuna caratteristica avrete il logaritmo del vostro numero.*

54. Per uso di questa regola sia proposto a trovarsi

il logaritmo di 97456897. Separo le tre cifre a dritta, e cerco nelle tavole la mantissa dei logaritmi dei numeri 97456, 97457, che sono 0.9888086, 0.9888130. La differenza di queste, prescindendo dal denominatore e decimale, è 44; si moltiplichino questa per 897, parte esclusa dal nostro numero, e dal prodotto 39468 si escludano le tre ultime cifre, perchè sono tre le cifre trascurate nel proposto, ed il 39 si aggiunga alle ultime cifre della mantissa 0.9888086, al risultamento 0.9888125 si dia 7 di caratteristica, e 7.9888125 è il logaritmo del nostro numero 97456897,

55. La nostra regola è basata su questo, che i logaritmi variano proporzionalmente ai numeri (§. 52.). Ciò senza sensibile errore si può ritenere. Noi ci serviamo di numeri molto grandi, ora in questi i logaritmi hanno piccole differenze fra loro, e crescono al crescere dei numeri; dunque l'errore è piccolo dicendo, che i logaritmi crescono come i numeri. Dissi, che i logaritmi dei numeri grandi hanno piccole differenze, perchè più si va innanzi, e più numeri si comprendono fra due successive potenze del 10, le quali poi nou differiscono che di uno.

56. *Si debba ora trovare il logaritmo d'una frazione.* O la frazione è vera, o mista. In questo secondo caso dal logaritmo del numeratore si tolga il logaritmo del denominatore (§. 12.). Se la frazione mista è decimale si cerchi il logaritmo del numero considerato come intero, cioè escluso il punto, e riguardo alla caratteristica si scrivano tante unità meno una quante sono le cifre della parte intera. Infatti il denominatore della frazione ha tanti zeri quante sono le cifre decimali, quindi (§. 50.) altrettante sono le unità, che debbono togliersi dalla caratteristica di tutto il numeratore; perciò nel logaritmo della frazione decimale si deve scrivere solo la caratteristica del numero intero, onde avrà tante unità meno una quante sono le cifre di questo. Se la frazione è vera togliendo dal loga-

ritmo del numeratore quello del denominatore si avrebbe un logaritmo negativo, che non trovasi nelle tavole. Per averlo positivo si aggiungono dieci unità alla caratteristica del logaritmo del numeratore, e dopo si sottrae il logaritmo del denominatore. Ma piuttosto si sottrae dall'intero 10 il logaritmo del denominatore, ed il risultamento si aggiunge al logaritmo del numeratore. La detta sottrazione si fa a mente, perchè l'ultima cifra del logaritmo del denominatore si toglierà dal 10, e le altre seguenti a sinistra sempre dal 9.

57. Se la frazione vera è decimale, la sottrazione dal 10 sarà di tante unità quante sono le cifre decimali della data frazione. Eseguita questa sottrazione, si aggiunga il resto alla caratteristica del logaritmo del numeratore, e così si avrà il logaritmo con 10 unità di troppo.

58. È meglio di togliere dalla caratteristica tutte le unità rimaste, e di notare con un segno meno al di sopra le unità, che mancano al 10 per ricordarci, che ci sono queste unità di troppo. Il residuo, che viene dal togliersi dal 10 il logaritmo del denominatore si chiama *complemento aritmetico*. Si troverà, che il logaritmo di $\frac{578}{8945}$ è 4.5386617.

59. Si voglia il logaritmo di $\frac{578}{8945}$. Il logaritmo di 578 nelle tavole è 2.7619278; il logaritmo di 8945 è 3.9515803: ma dovendosi prendere di questo il complemento aritmetico, non si scrive, e si dice 3 tolto da 10 dà 7, 0 tolto da 9 dà 9; tolto 8 da 9 si ha 1, e così di seguito: quindi si scrive piuttosto il complemento aritmetico 6.0484197 del logaritmo del denominatore. Questo aggiunto al logaritmo del numeratore abbiamo 8.8103475.

Si tolgano le 8 unità della caratteristica, e si scriva 2 per indicare, che ci sono due unità di troppo, onde il logaritmo della proposta frazione sarà $\overline{2},8103475$.

60. Sia la frazione decimale 0.7568. Il complemento aritmetico sarà 6, che si ottiene togliendo il logaritmo 4 del denominatore da 10. Il logaritmo di 7568 è 3.8789811: dunque il logaritmo della data frazione col complemento — è 9.8789811, e senza complemento 1. 8789811.

61. Si voglia il logaritmo di un radicale, o d'una radice. Si prenderà il logaritmo della quantità sotto il vincolo e si dividerà per l'esponente del vincolo stesso (§. 24.).

62. Se sotto il vincolo vi è frazione mista, dal logaritmo del numeratore tolto il logaritmo del denominatore, il residuo si dividerà per l'esponente della radice.

63. Se sotto il vincolo vi è frazione vera, si prenderà il suo logaritmo col complemento aritmetico, ed al risultamento nella caratteristica si aggiungeranno tanti 10 quante sono le unità dell'esponente della radice meno una, il risultamento si dividerà per l'esponente della radice, ed in ultimo si conterà un solo dieci di errore.

64. Si voglia il logaritmo di $\sqrt[5]{\frac{5789}{9788}}$. Il logaritmo di 5789 è 3.7626035, ed il complemento aritmetico del logar. di 9788 è 6.0093060: dunque il log. della frazione è 9.7719095. Prima di dividere per 5 si aggiunga 40 alla caratteristica 9, onde diventerà 49, e fatta la divisione il quoto sarà 9.9543819, ove vi è un complemento, e senza complemento il cercato logaritmo è — 1. 9543819.

65. Diamo la ragione, per cui prima di dividere il logaritmo d'una frazione si deve alla sua caratteristica aggiungere tanti 10 meno uno quante sono le unità del divisore, e poi in ultimo non si deve valutare di troppo che un solo dieci. Si voglia la radice n^{ma} della frazione $\frac{a}{b}$, se questa si conoscesse sarebbe una frazione maggiore di

$\frac{a}{b}$, per la quale se $\frac{a}{b}$ si dividesse successivamente n meno una volta si ritroverebbe la stessa radice. Ora se si facciano le operazioni corrispondenti nei logaritmi si vedrà, che per la prima divisione si dovrà aggiungere al logaritmo di $\frac{a}{b}$ che ha già un compl. arit. un altro dieci, onde poterci sottrarre il logaritmo della sua radice di essa maggiore, che ha un compl. arit. In questa sottrazione spariscono i due compl. aritmetici, onde rimane di troppo un dieci, che si è aggiunto al compl. aritmet. della proposta $\frac{a}{b}$. Dal logaritmo residuo si deve togliere il logaritmo della radice, essendo questo maggiore dell'altro logaritmo si dovrà aggiungere a questo un dieci. In questa sottrazione del logaritmo della radice, che ha di troppo un dieci, dal detto logaritmo residuo con due dieci di troppo, ne sparisce uno, dunque nel logaritmo residuo vi è di troppo un dieci. Andando così innanzi si faranno $n - 1$ sottrazioni, in ognuna si dovrà aggiungere un dieci, onde in ultimo si sarà aggiunto il 10 ripetuto $n - 1$ volte: ma in ciascuna si toglie un dieci, dunque saranno tolti tutti i dieci aggiunti, e non rimarrà di troppo che il solo 10 del complemento nel logaritmo della frazione proposta.

66. *Si cerchi il logaritmo d'un prodotto.* Si prendano i logaritmi dei singoli fattori e si sommino (§. 31.).

Se siano vere frazioni quelle delle quali si fa la moltiplicazione, ossia si prendono frazioni di frazioni, in ciascun logaritmo di queste vi sarà un complemento aritmetico: per conseguenza nella somma dei logaritmi dei fattori vi saranno tanti complementi quanti sono questi: quindi in questa somma si rigetteranno tutti i dieci, che si potrà, e si terrà conto di quelli, che vi rimangono. Nei comuni calcoli non vi rimarrà, che un solo dieci, da cui come sopra si toglieranno tutte le unità rimaste, notando

col segno meno nel vertice le unità che vi rimangono di troppo.

$$\text{Sia} \quad L.\frac{3}{37} \cdot \frac{83}{159} \cdot \frac{258}{4769}.$$

Ecco il computo $L.3 = 0.4771212$

$$\text{comp. } L.37 = 8.4317983$$

$$L.\frac{3}{7} = 8.9089195 \text{ (a)}$$

$$L.83 = 1.9190781$$

$$\text{com. } L.159 = 7.7986029$$

$$L.\frac{83}{59} = 9.7176810 \text{ (b)}$$

$$L.258 = 2.4116197$$

$$\text{com. } L.4769 = 6.3215727$$

$$L.\frac{258}{4769} = 8.7331924 \text{ (c)}$$

Sommando (a), (b), (c) avremo il logaritmo del prodotto delle date frazioni espresso da 27.3597929. Togliendo alla caratteristica due dieci di troppo ne rimarrà uno, e to-

gliendo il 7, e ponendo $\overline{3}$, nel logaritmo 3.3597929 vi saranno tre unità di troppo.

67. *Si voglia il logaritmo d'una divisione.* Se i due termini della divisione saranno interi, e col divisore minore del dividendo, dal logaritmo del dividendo si sottrarrà il logaritmo del divisore (§. 32.). Se il divisore sarà maggiore del dividendo sarà il caso del logaritmo d'una frazione (§. 56.). Se la divisione si farà fra frazioni miste si prenderà il logaritmo della frazione dividendo, e da essa si sottrarrà il logaritmo della frazione divisore.

68. Se la divisione sarà fra frazioni vere ; o il dividendo sarà maggiore del divisore, ciò che si conoscerà dal suo logaritmo, che riuscirà maggiore del logaritmo del divisore , si farà la sottrazione , e non si terrà più conto delli complementi di ambedue le frazioni, perchè nella sottrazione si distruggono. O la frazione dividendo è minore della frazione divisore, ed in questa si prenderà il complemento aritmetico del suo logaritmo , che già ha un complemento, per aggiungerlo al logaritmo del dividendo, e vi farà di troppo un 10 nel risultamento.

Sia da prendersi il logaritmo di

$$\frac{7598}{9759} : \frac{6456}{7899}$$

$$L.7598 = 3.8806993$$

$$\text{com. } L.9759 = 6.0105947$$

$$L.\frac{7598}{9759} = 9.8912940 \text{ (a)}$$

$$L.6456 = 3.8099635$$

$$\text{com. } L.7899 = 6.1024279$$

$$L.\frac{6456}{7899} = 9.9123914 \text{ (b) .}$$

Il logaritmo (b) è maggiore dal log. (a) : dunque si deve prendere il suo complemento aritmetico per aggiungerlo ad (a) : questo complemento aritmetico è 0.0876086, che aggiunto ad (a) ci dà 9.9789026: quindi il logaritmo domandato del quoto delle due frazioni è $\overline{1.9789026}$.

69. Finalmente si domanda il logaritmo d'una potenza. Se la quantità elevata a potenza è intera, o frazione mi-

sta, di essa preso il logaritmo si moltiplichi pel grado della potenza.

70. Se poi la quantità elevata a potenza è una vera frazione, si prenda il suo logaritmo col complemento aritmetico, e si moltiplichi pel grado della potenza; nel risultato vi saranno tanti 10 di troppo quanto è il grado della potenza: quindi si toglieranno tutti i 10, che si potrà, che nei comuni computi saranno tanti quanto è il grado della potenza meno uno, e così vi rimarrà un dieci di troppo.

Sia $L.\left(\frac{27}{98}\right)^5$. Abbiamo

$$L.27 = 1.4313638$$

$$\text{com. } L.98 = 8.0087739$$

$$L.\frac{27}{98} = 9.4401377$$

$$L.\left(\frac{27}{98}\right)^5 = 47.2006885.$$

In questo si tolga dalla caratteristica il 40, ed il 7 si riduca a 3; quindi il logaritmo domandato è $\overline{3}.1007885$ con uno sbaglio di 3.

71. Per uso di tutte le regole date si debba trovare il logaritmo di

$$(A) \frac{\frac{5}{49} \sqrt[7]{\left(\frac{574}{8597}\right)^5}}{\sqrt[7]{8} \sqrt[8]{\frac{759}{\sqrt[5]{\frac{5}{9}}}} \sqrt[8]{\left(\frac{23}{59}\right)^3}}$$

Ecco il calcolo

$$L. 5 = 0.6989700 \quad L. 574 = 2.7589119$$

$$\text{co. } L. 49 = 8.3098039 \text{ com. } L. 8597 = 6.0656534$$

$$L. \frac{5}{49} = 9.0087739 (b) \quad L. \frac{574}{8597} = 8.8245650$$

$$L. \left(\frac{574}{8597} \right)^5 = 44.1228250 (a)$$

Nel logaritmo (a) si debbono togliere quattro 10, ma ciò fatto gli si debbono aggiungere sei 10 prima di dividerlo per 7, che è il grado della radice, quindi gli aggiungerò 20, e dividerò 64.1228250 per 7 ed il quoto sarà 9.1604036, questo si deve aggiungere a (b), quindi pel logaritmo del numeratore della nostra frazione (A) si avrà 18.1691775, dove togliendo un dieci, nel log. 8.1691775 vi è un dieci di errore. Andando al denominatore di (A)

$$L. 8 = 0.9030900 \quad L. 5 = 0.6989700 \quad L. \sqrt[7]{8} = 10.1290129 (a')$$

$$L. \sqrt[7]{8} = 0.1290129 \text{ com. } L. 9 = 9.0457575 \quad \sqrt[5]{\frac{5}{9}} = \frac{9.9489455}{0.1800674 (b')}$$

$$L. \frac{5}{9} = 9.7447275$$

$$L. 23 = 1.3617278$$

$$L. \sqrt[5]{\frac{5}{9}} = \frac{49.7447275}{5} \text{ com. } L. 59 = 8.2291480$$

$$L. \sqrt[5]{\frac{5}{9}} = 9.9489455 \quad L. \frac{23}{59} = 9.5908758$$

$$L. \left(\frac{23}{59} \right)^2 = 19.1817516 \quad L. 759 = 2.8802418$$

$$L. \sqrt[8]{759} = 0.3600302$$

$$L. \sqrt[3]{\left(\frac{23}{59} \right)^2} = \frac{29.1817516}{3} \quad L. \sqrt[8]{\frac{759}{3}} = \frac{10.3600302}{9.7272505} = 10.3600302$$

$$\sqrt[3]{\left(\frac{23}{59} \right)^2} = \frac{9.7272505}{0.6327797 (c')}$$

Dopo ciò sarà

$$\begin{array}{rcl} \text{L.} \frac{\sqrt[7]{8}}{\sqrt[5]{\frac{5}{9}}} \cdot \frac{\sqrt[8]{759}}{\sqrt[3]{\left(\frac{23}{59}\right)^2}} & = & 0.1800674 \\ & & 0.6327797 \\ & \hline & 0.9128471 \end{array}$$

Quindi il logaritmo domandato è

$$\begin{array}{rcl} \frac{\frac{5}{49} \sqrt[7]{\left(\frac{574}{8597}\right)^5}}{\sqrt[7]{8} \cdot \sqrt[8]{759}} & = & 8.1691775 \\ & & 0.9128471 \\ \sqrt[5]{\frac{5}{9}} \sqrt[3]{\left(\frac{23}{59}\right)^2} & & 7.2563304 \end{array}$$

ossia

$$\underline{\quad\quad\quad} \\ 3.2563304$$

PROBLEMA II.

DATO UN LOGARITMO TROVARE IL NUMERO
CHE GLI APPARTIENE.

72. Sia un logaritmo espresso da $\overline{3.5267988}$. Si cerchi la mantissa nelle tavole, ove sono i numeri di cinque cifre; la prossima inferiore si trova essere (a) 0.5267914, che appartiene al numero 33635, non badando alla caratteristica. Differisce la mantissa (a) dalla nostra di 0.0000074. Le mantisse poi, fra le quali è la nostra, una è quella ora scritta; l'altra superiore è 0.5268043. Queste differiscono di 0.0000129, mentre essendo le mantisse di 33635, 33636, questi numeri differiscono di uno: dunque faremo la proporzione (§. 55.); se alla differenza 1 corrisponde la differenza di logaritmi 0.0000129; qual differenza di nu-

meri corrisponderà alla differenza de'logaritmi 0.0000074? quindi la proporzione è

$$1 : 0000129 = x : 0.0000074 ;$$

$$\text{ossia} \quad 1 : 129 = x : 74, \quad \text{ed} \quad x = \frac{74}{129} = 0.573 .$$

Aggiunto questo numero a 33635 ci darà prossimamente il numero corrispondente alla mantissa proposta, e questo sarà 33635,573. Se il logaritmo proposto avesse zero di caratteristica il nostro numero dovrebbe avere una sola cifra intera, ed il punto si dovrebbe porre fra le due pri-

me cifre, che danno 33. Ma la caratteristica $\overline{3}$ indica, che vi sono tre unità di troppo : ora si è veduto , che ogni unità aggiunta alla caratteristica (§. 50.) porta la moltiplicazione per 10 nel numero; dunque l'aggiunta di 3 unità induce nel numero una moltiplicazione per 1000, che è di troppo : dunque il nostro numero v'è diviso per 1000, ossia il punto, che dovrebbe essere notato fra le due cifre del 33, se la caratteristica fosse zero, deve essere portato di tre posti a sinistra : quindi il numero domandato del logaritmo proposto è

$$0.0038635573 ,$$

con grande approssimazione.

73. Ecco dunque la regola pratica per risolvere il problema, dato il logaritmo trovare il numero. Cercate nelle tavole la mantissa del dato logaritmo, trovandola scrivete il numero, che gli è accanto nella prima colonna. Osservate poi la caratteristica del vostro logaritmo, e le cifre intere a sinistra nel vostro numero debbono essere tante quante sono le unità di questa caratteristica più una. Se vi rimangono cifre nel numero trovato a dritta separatele con un punto, se vi mancano supplite con zeri a dritta del numero. Se la caratteristica è negativa ponete a sinistra del numero tanti zeri quante sono le unità della detta caratteristica, notate il punto, e segnate poi lo zero ad indicare la mancanza dell'intero.

74. Quando la mantissa non si trovi nelle tavole, cercate la prossima inferiore, e notate la differenza fra questa e la vostra mantissa. Trovate poi la differenza fra la detta mantissa inferiore, e la superiore nelle tavole, dividete la prima differenza per la seconda, ed il quoto decimale aggiungetelo al numero nelle tavole accanto alla mantissa inferiore. Osservate poi la caratteristica del vostro logaritmo, e vedete il posto che dovete dare al punto. Se la caratteristica è zero ponete il punto fra la prima, e seconda cifra del numero notato. Se è negativa spostate questo punto a sinistra con tanti zeri di tanti posti quante sono le unità della caratteristica negativa. Se poi la caratteristica ha delle unità positive ponete il punto in guisa, che a sinistra vi siano tante cifre più una quante sono queste unità.

75. Sia il logaritmo 4.7984539. La mantissa inferiore è (a) 0.7984504, che differisce dall'antecedente di 35 non valutato il denominatore decimale. Il numero poi cui appartiene questo logaritmo è 62871. La mantissa superiore alla (a) nelle tavole è 0.7984573, da cui sottratto (a) abbiamo 69. Si divida 35 per 69 ed il quoto 0,507 si aggiunga 62871 avremo 62871.507. La caratteristica del proposto numero è quattro, dunque il suo numero deve avere un intero composto di 5 cifre, dunque nel numero antecedente il punto è ben collocato, onde il detto numero è il domandato.

Sia il log. 7.8362291. Cercate la mantissa nelle tavole si trova esattamente, e che gli appartiene il numero 68585. La caratteristica del nostro logaritmo è 7 : dunque il suo numero deve essere di otto cifre: ma il trovato ne ha cinque, le altre tre si suppliranno (§. 73.) con tre zeri, ed avremo pel logaritmo dato il numero 68585000.

Per esercizio si troverà, che il numero appartenente all'ultimo logaritmo del (§. 71.) è 0.000180439004.

CAPO TERZO

PROBLEMI RISOLUTI PER MEZZO
DE' LOGARITMI.

76. Trovare il numero de' termini in una progressione, il di cui primo termine è $\frac{1}{2}$, la ragione $\frac{3}{2}$, e l'ultimo termine $\frac{2187}{256}$.

Dalla formola $u = aq^{n-1}$ abbiamo prendendo i logaritmi

$$n = 1 + \frac{Lu - La}{Lq}$$

ora

$$Lu = L \frac{2187}{256} = 3.3398488$$

$$- 2.4082400$$

$$[0.9316088 (a)]$$

$$\text{com. } La = L \frac{1}{2} = 9.6989700 (b) .$$

Questo numero (b) si deve sottrarre da (a), si cresca dunque (a) di 10, e nel resto non si valuti più alcun 10 di troppo, avremo dunque

$$Lu - La = 1.2326388$$

$$Lq = L \frac{3}{2} = 0.4771212$$

$$- 0.3010300$$

$$0.1760912$$

dunque

$$n = 1 + \frac{1.2326388}{0.1760912} = 1 + 7 = 8 :$$

dunque sono otto i termini, ciò che si può verificare.

77. *Inserire sette termini in progressione geometrica fra 2 e 19.*

Si vede chiaro, che quando si conosce la ragione geometrica si risolve il problema. A ciò vale la formola

$$u = aq^{n-1}, \text{ ove } u = 19, n = 9, a = 2.$$

La formola poi ci dà

$$q = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$$

$$Lq = \frac{1}{n-1} (Lu - La)$$

$$Lu = L19 = 1.2787536$$

$$La = L2 = 0.3010300$$

$$Lu - La = 0.9777236$$

$$Lq = 0.1222154, \text{ e } q = 1,325.$$

78. *Volendo, che un capitale di scudi 1294 frutti al 5½ per 100 all'anno, si lasciano i frutti nel capitale. Si domanda il numero degli anni, che deve essere tenuto a frutto il detto capitale, per dare scudi 57893.*

Abbiamo la formola $c(1+r)^n = C$. (§. 4.). La r è il frutto di 1; dunque il frutto di 100 sarà $100r$, questo frutto è $5 \frac{1}{2}$ o $\frac{11}{2}$: dunque $100r = \frac{11}{2}$, $r = \frac{11}{200}$. Inoltre $c = 1249$, $C = 57893$. Abbiamo

$$Lc + L(1+r)^n = LC, \quad nL(1+r) = LC - Lc$$

$$n = \frac{LC - Lc}{L(1+r)} (a)$$

$$LC = L57893 = 4.7626261$$

$$Lc = L1249 = 3.0965624$$

$$LC - Lc = 1.6660637$$

$$L(1+r) = L\left(1 + \frac{11}{200}\right) = L\frac{211}{200} = 2.3242825$$

$$- 2.3010300$$

$$0.0232525$$

dunque

$$n = \frac{1.6660637}{0.0232525} = \frac{16660637}{232525}$$

cioè anni 71, e mesi 8 in circa.

78. *Al quanto per cento debbono fruttare scudi 129, onde lasciati a frutto per 10 anni insieme coi frutti diano scudi 3459?*

Nel nostro caso $C = 3459$, $c = 129$, $n = 10$. Se nella nostra formola (a) (§. 78.) la r non esprima più il frutto di uno ma di 100, onde esprima il frutto di 1, come vuole la formola, vi si dovrà porre $\frac{r}{100}$. Ora la (a) ci dà

$$L(1 + r) = \frac{LC - Lc}{n},$$

$$\text{dunque} \quad L\left(1 + \frac{r}{100}\right) = \frac{LC - Lc}{n}.$$

$$LC = L3459 = 3.5389506$$

$$Lc = L129 = 2.1105897$$

$$LC - Lc = 1.4283609$$

$$\frac{LC - Lc}{n} = \frac{1.4283609}{10} = 0.1428361 \text{ (b).}$$

La mantissa prossima è (a) 0.1428273, che appartiene al numero 13894; la differenza di queste due mantisse è, escluso il denominatore, 88. La differenza fra (a) e la mantissa superiore 0.1428586 è 313: diviso 88 per 313 abbiamo 3 & 281: dunque il numero corrispondente alla mantissa (b) è 13894. 281: ma il (b) ha di caratteristica 0,

dunque il suo numero è 1.3894281 : dunque

$$1 + \frac{r}{100} = 1.3894281$$

$$\frac{r}{100} = 0.3894281, \text{ ed } r = 38.94$$

cioè 100 scudi fruttano scudi 38, e bajocchi 94.

79. Può avvenire, che ogni anno oltre l'aggiungere il frutto si voglia aggiungere una somma b ; in tal caso alla fine del primo anno si avrà la somma $c(1+r) + b$. Alla fine del secondo anno si dovrà moltiplicare questa quantità per $1+r$ (§. 4.), ed aggiungere b , quindi avremo

$$c(1+r)^2 + b(1+r) + b.$$

Alla fine del terzo anno avremo

$$c(1+r)^3 + b(1+r)^2 + b(1+r) + b,$$

dunque alla fine dell'anno n^{mo} sarà

$$c(1+r)^n + b(1+r)^{n-1} + b(1+r)^{n-2} + b(1+r)^{n-3} \dots + b(1+r) + b.$$

Ma le serie

$$b(1+r)^{n-1} + b(1+r)^{n-2} + b(1+r)^{n-3} \dots + b(1+r) + b$$

è lo stesso che

$$b \left((1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + (1+r)^{n-3} \dots + 1 + r + 1 \right).$$

Ora abbiamo (A.G. §. 178.)

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}$$

e se $b = 1$

$$\frac{a^m - 1}{a - 1} = a^{m-1} + a^{m-2} + a^{m-3} \dots + a + 1;$$

dunque facendo $a = 1 + r$, ed $m = n$ sarà

$$\frac{(1+r)^n - 1}{r} = (1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + (1+r)^{n-3} \dots + (1+r) + 1 + r + 1:$$

dunque il capitale alla fine dell'anno n^{mo} sarà

$$c(1+r)^n + \frac{b(1+r)^n - b}{r} = (1+r)^n \left(\frac{b}{r} + c \right) - \frac{b}{r};$$

se questo capitale si dice C sarà

$$(1+r)^n \left(\frac{b}{r} + c \right) - \frac{b}{r} = C(a).$$

80. Se ogni anno si tolga la somma b , basta porre $-b$ invece di b nella formola antecedente (a), e sarà

$$(1+r)^n \left(c - \frac{b}{r} \right) + \frac{b}{r} = C(b).$$

81. Avendosi un capitale di scudi 10, lasciando i frutti nel capitale, ed aggiungendo ogni anno scudi 30, si vuol ritrarre scudi 1343 col frutto del 4 per cento; si domanda il numero degli anni.

Nel nostro caso

$$r = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}, \quad c = 10, \quad b = 30, \quad C = 1343.$$

Ci serviremo della formola (a) (§. 79.). In primo luogo si deve calcolare

$$C + \frac{b}{r}.$$

Abbiamo

$$\frac{b}{r} = 30 : \frac{1}{25} = 750 ,$$

dunque

$$C + \frac{b}{r} = 1343 + 750 = 2093 ,$$

e

$$\frac{b}{r} + c = 750 + 10 = 760 ;$$

quindi la formola (a) diventa

$$\left(1 + \frac{1}{25}\right)^n 760 = 2093 ,$$

$$nL\left(\frac{26}{25}\right) = L2093 - L760$$

$$n = \frac{L2093 - L760}{L\left(\frac{26}{25}\right)}$$

Ora

$$L2093 - L760 = 3.3207692$$

$$- 2.8808136$$

$$0.4399556$$

$$L\frac{26}{25} = 1.4149733$$

$$- 1.3979400$$

$$0.0170333$$

dunque

$$n = \frac{L2093 - L760}{L\frac{26}{25}} = \frac{4399556}{170333} ,$$

ossia n è anni 25, e 10 mesi prossimamente.

82. Se c monta a C in n anni, qual somma si deve dare per ritirare c dopo n anni?

Abbiamo

$$C = (1 + r)^n c, \quad \text{e} \quad c = (1 + r)^n x,$$

indicando per x la somma da sborsarsi per avere c : eliminando $(1 + r)^n$ sarà $x = \frac{c^2}{C}$.

83. Se c ad interesse composto colla ragione di r per 1 si duplica in anni r , e colla ragione $2r$ ad uno si duplica in anni m , trovate la relazione fra m , n .

Abbiamo

$$2c = c(1 + r)^n, \quad \text{ossia} \quad 2 = (1 + r)^n:$$

ancora

$$2c = c(1 + 2r)^m, \quad \text{ovvero} \quad 2 = (1 + 2r)^m:$$

dunque

$$(1 + r)^n = (1 + 2r)^m,$$

ed

$$nL(1 + r) = mL(1 + 2r);$$

$$\frac{m}{n} = \frac{L(1 + r)}{L(1 + 2r)} > \frac{L(1 + r)}{L(1 + 2r + r^2)} > \frac{L(1 + r)}{L(1 + r)^2} > \frac{1}{2}.$$

84. Se P indica la popolazione d'un paese in un dato tempo, $\frac{1}{p}$ la ragione della mortalità, $\frac{1}{q}$ quella della nascita alla popolazione stessa, ed A rappresenta la popolazione dopo n anni, collegate in formole questi elementi.

È chiaro, che la ragione dell'incremento è

$$\frac{1}{q} - \frac{1}{p} = \frac{p - q}{pq}:$$

dunque l'aumento della popolazione P in un anno è

$$P\left(\frac{p - q}{pq}\right),$$

e la popolazione totale sarà

$$P + P\left(\frac{p-q}{pq}\right) = P\left(1 + \frac{p-q}{pq}\right) :$$

dunque la popolazione del principio del primo anno si deve moltiplicare per $1 + \frac{p-q}{pq}$ onde avere la popolazione alla fine dell'anno : dunque la popolazione alla fine del secondo anno sarà

$$P\left(1 + \frac{p-q}{pq}\right)^2 :$$

alla fine del terzo

$$P\left(1 + \frac{p-q}{pq}\right)^3 ;$$

ed alla fine dell'anno n^{mo}

$$P\left(1 + \frac{p-q}{pq}\right)^n ;$$

onde

$$A = P\left(1 + \frac{p-q}{pq}\right)^n$$

è la formola domandata.

85. *Un numero a d'individui d'una popolazione aumenta tutti gli anni del suo centesimo: quanti anni vi vogliono perchè diventi 10 volte più grande?*

Nella formola antecedente

$$P = a, A = 10a, \frac{p-q}{pq} = \frac{1}{100} :$$

dunque

$$10 = \left(1 + \frac{1}{100}\right)^n, \left(\frac{101}{100}\right)^n = 10$$

$$n = \frac{1}{L101 - 2} = \frac{1}{0.00432} = \frac{100000}{432},$$

ora

$$L100000 = 5$$

$$L432 = 2.63548$$

$$L \frac{100000}{432} = 2.36452$$

Ora nelle tavole $2.36452 = L231,48$ si richieggono circa 231 anno e mezzo.

86. *Da un vaso di vino di a misure si sono tolte misure b, ed in loro vece si è mescolata altrettanta acqua; ciò si è ripetuto n volte; trovate la quantità di vino rimasta.*

Siano $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ queste quantità di vino rimaste. È chiaro, che si hanno le proporzioni

$$a : a_1 = a : a - b$$

$$a_1 : a_2 = a : a - b$$

$$a_2 : a_3 = a : a - b$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_{n-1} : a_n = a : a - b.$$

Moltiplicandole tutte, e togliendo i fattori comuni nel primo rapporto sarà

$$a : a_n = a^n : (a - b)^n, \text{ ed } a_n = \frac{(a-b)^n}{a^{n-1}}.$$

87. *Da un vaso di 100 misure di vino si cava ogni giorno una misura infondendo una misura di acqua. Si domanda 1.° quante misure di vino rimarranno nel vaso tolta la 50^{ma} misura: 2.° in quanti giorni il vino sarà ridotto al suo quarto.*

Per il primo quesito abbiamo

$$a = 100, \quad b = 1, \quad n = 50,$$

dunque la formola diventa

$$a_n = \frac{99^{50}}{100^{49}}. \text{ Ora } L_{99} = 1.99563$$

$$La_n = 50L_{99} - 49L_{100} = 99.7815$$

$$. \quad L_{100} = 2$$

$$49L_{100} = 98$$

$$L \frac{99^n}{100^{49}} = 1.7815 = L_{60.464}$$

circa misure $60 \frac{1}{2}$. Pel secondo quesito

$$a_n = \frac{a}{4} = \frac{100}{4} = 25, \quad b = 1;$$

dunque

$$\frac{99^n}{100^{n-1}} = 25, \text{ ossia } nL_{99} - 2n + 2 = L_{25}.$$

Ora

$$L_{25} = 1.39794$$

$$2 - L_{25} = 0.60206$$

$$L_{99} = 1.99563$$

$$2 - L_{99} = 0.00437$$

dunque

$$n = \frac{60206}{437};$$

cioè giorni 138.

88. *Le annualità sono pagamenti, che si fanno al termine di uguali intervalli di tempo a causa di una somma tale data al principio di questi intervalli, che insieme coi suoi frutti per tutti questi intervalli alla ragione di r per 1 all'anno è uguale a tutti i pagamenti fatti più i loro frutti nei rispettivi intervalli seguenti.*

Se tanto della somma sborsata, che dei pagamenti si considerano i loro frutti si dice *l'annualità a interesse semplice*. Se poi oltre ciò si considerano anche i frutti de' frutti si dice *annualità ad interesse composto*. Dopo ciò sia il problema.

89. *A determinati intervalli di tempo, per es. d'un anno, e questi di numero n , si vuole l'annualità b . Sia a la somma da darsi in principio, che fruttando ad interesse composto alla ragione di r per uno in un anno, negli n anni equivale alle annualità b pagate ai termini degli n anni, anche queste considerate ad interesse composto nei successivi anni, dopo i quali parzialmente sono state sborsate, ed alla ragione di r per 1 in un anno. Collegare in una formola le dette quantità a , b , r , n .*

Secondo il problema (§. 4.) risoluto dell'interesse composto la quantità $a(1+r)^n$ esprime il capitale, ed i frutti ad interesse composto negli n intervalli di tempo. Ora la b pagata al termine del primo intervallo negli $n-1$ intervalli seguenti ad interesse composto darà la quantità $b(1+r)^{n-1}$. Il secondo pagamento b al termine del secondo intervallo negli $n-2$ intervalli seguenti ci darà tra capitale e frutti, e frutti dei frutti la quantità $b(1+r)^{n-2}$; e così il terzo sborso b al termine del terzo intervallo si ridurrà coll'interesse composto a $b(1+r)^{n-3}$. Andando così innanzi si vedrà, che lo sborso b al termine dell'antipenultimo intervallo equivale a $b(1+r)^2$, lo sborso b al termine del penultimo intervallo per l'interesse composto equivale a $b(1+r)$. Finalmente al termine dell'ultimo intervallo si fa lo sborso b , di cui non si ha frutto. Ora per

la natura dell'annualità la quantità $a(1+r)^n$ deve essere quale a tutte le quantità ora indicate prodotte dai successivi pagamenti b : dunque

$$a(1+r)^n = b(1+r)^{n-1} + b(1+r)^{n-2} + b(1+r)^{n-3} \dots + b(1+r)^2 + b(1+r) + b.$$

Ma abbiamo che (§. 79.)

$$(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + (1+r)^{n-3} \dots + (1+r)^2 + (1+r) + 1 = \frac{(1+r)^n - 1}{r} :$$

dunque

$$a(1+r)^n = \frac{b(1+r)^n - b}{r} \quad (a),$$

che è la formola domandata. La stessa formola si trovava subito dalla (b) del (§. 80.) facendovi $C=0$, e con ragione.

89. *Dare la formola fra gli stessi elementi supponendo l'interesse semplice.*

La somma a in un anno frutta ar , perchè per ipotesi 1 frutta r : dunque negli n anni frutterà anr : dunque dopo tutto questo tempo fra capitale e frutto si avrà $a + anr$, ossia $a(1 + nr)$. Da ciò si ricava, che il primo pagamento b negli $n - 1$ anni seguenti darà tutto insieme fra capitale e frutto $b(1 + r(n-1))$. Il secondo pagamento per gli $n-2$ anni seguenti equivalerà a $b(1 + r(n-2))$. Il terzo darà $b(1 + r(n-3))$. L' antipenultimo pagamento tra capitale e frutto sarà nei due anni seguenti $b(1 + 2r)$, il penultimo alla fine dell'ultimo anno $b(1 + r)$, e l'ultimo pagamento è b : dunque avremo per la natura delle annuità ad interesse semplice avremo

$$a(1+nr) = b(1+r(n-1)) + 1 + r(n-2) + 1 + r(n-3) \dots + 1 + 2r + 1 + r + 1)$$

Ora le quantità tra parentesi è la progressione aritmetica

$$1, 1 + r, 1 + 2r, 1 + 3r \dots, 1 + (n-3)r, \\ 1 + (n-2)r, 1 + (n-1)r$$

nella quale il primo termine è 1, l'ultimo $1 + (n-1)r$, ed il numero de' termini è n . Nella progressione aritmetica (A. G. §. 176.) la somma è uguale al primo termine più l'ultimo moltiplicata questa somma per la metà del numero de' termini: dunque la somma della nostra progressione è

$$(2 + (n-1)r) \frac{n}{2},$$

perciò avremo per la formola domandata dal problema

$$a(1 + nr) = bn \left(1 + \frac{1}{2} (n-1)r \right)$$

90. *Per avere un'annualità b con interesse composto in q anni alla ragione di r per 1 in un anno si vuol dare al principio di p anni prima dei q , colla stessa ragione di frutto, una somma; si domanda questa.*

È evidente, che questa somma x deve fruttare per anni $p + q$, dunque il suo valore farà $x(1 + r)^{p+q}$: ora la somma b è una annualità per anni q , quindi il suo valore sarà

$$\frac{b(1 + r)^q - b}{r},$$

dunque

$$x(1 + r)^{p+q} = \frac{b(1 + r)^q - b}{r},$$

ed

$$x = \frac{b}{r} \left(\frac{(1 + r)^q - 1}{(1 + r)^{p+q}} \right) = \frac{b}{r(1 + r)^p} \left(1 - \frac{1}{(1 + r)^q} \right)$$

91. Il presente valore di una annualità di uno scudo continuata per un dato numero di anni è scudi 10, ed il presente valore di una annualità di uno scudo continuata pel doppio dei detti anni è scudi 16, si vuol il saggio r dell'interesse annuo d'uno scudo.

Sia x il numero degli anni avremo

$$10 = \frac{(1+r)^x - 1}{r(1+r)^x} \quad (a); \quad 16 = \frac{(1+r)^{2x} - 1}{r(1+r)^{2x}} :$$

da queste

$$\frac{10}{16} = \frac{5}{8} = \frac{(1+r)^x ((1+r)^x - 1)}{(1+r)^{2x} - 1} =$$

$$\frac{(1+r)^x ((1+r)^x - 1)}{((1+r)^x + 1) ((1+r)^x - 1)} = \frac{(1+r)^x}{(1+r)^x + 1} ,$$

$$5(1+r)^x + 5 = 8(1+r)^x, \quad 3(1+r)^x = 5, \quad (1+r)^x = \frac{5}{3}.$$

Ora dall'equazione (a) abbiamo

$$(1+r)^x = \frac{1}{1 - 10r} :$$

dunque

$$\frac{1}{1 - 10r} = \frac{5}{3}, \quad 50r = 2, \quad \text{e} \quad 100r = 4,$$

cioè al quattro per cento.

92. Supponendo, che A sia l'annualità di q anni alla ragione di r ad 1 in un anno, trovare l'annualità x in q anni alla stessa ragione, che sia tale, onde la somma da sborsarsi al principio dei q anni equivalga a ciò, che si dovrebbe sborsare al principio di p anni innanzi ai q per la detta annualità A .

Sia y questo ultimo sborso: per l'interesse composto in $p+q$ anni darà $y(1+r)^{p+q}$, e questo è equivalente a $\frac{(1+r)^q - 1}{r} A$,

per le annualità in q anni: dunque sarà

$$y = \frac{((1+r)^q - 1)}{r(1+r)^{p+q}} A.$$

Se l'annualità è x nei q anni la somma equivalente al principio è

$$\frac{(1+r)^q - 1}{r(1+r)^q} x:$$

dunque pel problema

$$\frac{((1+r)^q - 1)}{r(1+r)^q} x = \frac{((1+r)^q - 1)A}{r(1+r)^{p+q}},$$

ed
$$x = \frac{A}{(1+r)^p}$$

indipendente da q .

93. Qual somma si deve ora sborsare, onde in 40 anni si possa avere una annualità di 13 scudi all'anno coll'interesse composto del 4 per 100.

Nel nostro caso $b = 13$, $n = 40$. Essendo r il frutto di 1, $100r$ sarà il frutto di 100, onde

$$100r = 4, r = \frac{1}{25}:$$

dunque per la formola (§. 89.) avremo

$$a = \frac{13 \left(\left(1 + \frac{1}{25} \right)^{40} - 1 \right)}{\frac{1}{25} \left(1 + \frac{1}{25} \right)^{40}} (A).$$

Ecco l'operazione

$$\begin{array}{r}
 L\left(1 + \frac{1}{25}\right) = L\frac{26}{25} = 1.4149733 \\
 \quad \quad \quad - 1.3979400 \\
 \hline
 \quad \quad \quad 0.0170333 \\
 \\
 L\left(\frac{26}{25}\right)^{40} = 0.0170333 \\
 \quad \quad \quad 40 \\
 \hline
 \quad \quad \quad 0.6813320 \text{ (a) .}
 \end{array}$$

Cercando nelle tavole si trova $0.6813320 = L4,801$: dunque il valore della parentesi totale nel numeratore di (A) è 3.804; moltiplicato per 13 ci dà 49.413. Riguardo al denominatore di (A) si vede, che per trovarlo coi logaritmi da (a) si deve togliere il logaritmo di 25. Il complemento aritmetico del log. di 25 è 8.6020600, aggiunto ad (a) abbiamo 9.2833920. La mantissa corrisponde nelle tavole al numero 19204. Se la caratteristica fosse zero il punto si segnerebbe fra 1 e 9: ma nella caratteristica escluso il 9 vi è ancora una unità di troppo, dunque il numero denominatore di (A) è 0.19204. Il numeratore è 49.413: dunque

$$a = \frac{49.413}{0.19204} = \frac{4941300}{19204} = 257.24 .$$

94. *Un tale ha comprato una possessione di scudi 100000 che deve essere pagata in 15 pagamenti uguali coll'interesse composto del 5 per 100; si domanda il valore di ciascun pagamento.*

Nel nostro caso (§. 89.)

$$a = 100000 \quad n = 15, \quad r = \frac{1}{20} ,$$

dunque

$$b = \frac{ar(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} = \frac{5000\left(\frac{21}{20}\right)^{15}}{\left(\frac{21}{20}\right)^{15} - 1}.$$

Abbiamo

$$L21 = 1.3222192$$

$$L20 = 1.3010300$$

$$L \frac{21}{20} = 0.0211892$$

e

$$L \left(\frac{21}{20}\right)^{15} = 0.3178380 \quad (a)$$

$$L5000 \left(\frac{21}{20}\right)^{15} = 0.3178380$$

$$3.6989700$$

$$4.0168080 \quad (b)$$

Cercando la mantissa (a) nelle tavole si trova corrispondere alla mantissa prossimamente inferiore il numero 20789. La differenza fra la nostra mantissa, e la detta inferiore è 44 : la differenza delle mantisse fra le quali la nostra è compresa è 209; dividendo 44 per 209 abbiamo 0.21 : dunque il numero del logaritmo (a) è 2.078921 : quindi

$$\left(\frac{21}{20}\right)^{15} - 1 = 1.078921,$$

denominatore del valore di b.

Cerchiamo il logaritmo di questo numero prescindendo dal punto. La mantissa di 10789 è 0.0329812. La diffe-

renza fra questa, e la mantissa di 10790 prossimamente superiore è 403 : questo moltiplicato per 21, cifre escluse dal numero, ci dà 8463; escluso 63 abbiamo 85, che aggiunto alle ultime cifre della mantissa antecedente ci dà 0.0329897, che è il logaritmo del denominatore. Tolto questo dal logaritmo (*b*) del numeratore abbiamo 3.9838182. Nelle tavole il numero, che appartiene alla mantissa prossimamente inferiore è 96342; la differenza fra la nostra e questa mantissa è 25; la differenza delle mantisse, fra le quali la nostra è compresa è 46: si divida 25 per 46, ed il quoto è 0.54: dunque il numero cercato per l'annuità è di scudi 9634.25.

95. *Quattro persone A, B, C, D contribuiscono la stessa somma per avere uno stabile. Trovate i tempi, che queste persone successivamente possano godere dello stabile nell'ipotesi che D, che è l'ultima a goderlo, lo abbia in perpetuo.*

Siano *x*, *y*, *z* i tempi delle prime tre persone. Essendo *b* il valore dello stabile, A deve dare una somma

$$\frac{b((1+r)^x - 1)}{r(1+r)^x}.$$

B si gode lo stabile nel tempo *y* seguente ad *x*, mentre ha fatto lo sborso al principio di *x*, dunque (§. 90.) quello, che deve sborsare è

$$\frac{b}{r} \left(\frac{1}{(1+r)^x} - \frac{1}{(1+r)^{x+y}} \right).$$

C che gode lo stabile nel tempo *z* seguente al tempo *x+y*, al principio del quale ha fatto lo sborso: dunque ha sborsato

$$\frac{b}{r} \left(\frac{1}{(1+r)^{x+y}} - \frac{1}{(1+r)^{x+y+z}} \right).$$

D, che si gode in perpetuo lo stabile dopo il tempo $x+y+z$, deve sborsare

$$\frac{b}{r} \left(\frac{1}{(1+r)^{x+y+z}} - \frac{1}{(1+r)^{x+y+z+t}} \right),$$

intendendo per t una quantità quanto mai si vuol grande, o maggiore di ogni assegnabile, o tale, che qualunque altra sparisce in suo confronto. Questa quantità si suol dire *quantità infinita*, e si esprime con ∞ . In questa ipotesi di t la quantità $(1+r)^{x+y+z+t}$ è enormemente grande, ed

$$\frac{1}{(1+r)^{x+y+z+t}}$$

è enormemente piccola, o *infinitesima*, e sparisce rispetto la quantità finita

$$\frac{1}{(1+r)^{x+y+z}} :$$

dunque la quarta persona deve sborsare

$$\frac{b}{r} \left(\frac{1}{(1+r)^{x+y+z}} \right).$$

Ora per il problema le quattro somme sborsate debbono essere uguali: uguagliandole si troverà

$$(1+r)^x = 2, \quad (1+r)^y = \frac{3}{2}, \quad (1+r)^z = \frac{4}{3} :$$

dalle quali si avrà

$$x = \frac{L2}{L(1+r)}, \quad y = \frac{L3 - L2}{L(1+r)}, \quad z = \frac{L4 - L3}{L(1+r)}.$$

96. Avendo supposto nei problemi d'interesse composto, e delle annualità la r il frutto di uno in un anno, e l'annualità al termine d'ogni anno, qualora si voglia la

frazione m^{ma} degli anni in questi problemi, e si voglia ritenere la r pel frutto in un anno, invece di r si dovrà porre $\frac{r}{m}$, ed invece di n numero degli anni, espressi questi nelle loro parti m , si porrà mn , o meglio mt supponendo t il tempo in anni. Dopo ciò le formole delle due specie di problemi saranno

$$(A) \quad C = c \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt}; \quad (B) \quad a \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt} = \frac{mb \left(\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt} - 1 \right)}{r}.$$

ove la b è l'annualità ad ogni m^{mo} di anno.

97. *Avendo sborsato scudi 20 al principio di 40 anni si vuole riscuotere dopo questi scudi 300 considerando il frutto del capitale, e dei frutti ad ogni mese. Si domanda al quanto per cento all'anno il danaro deve fruttare.*

Nel nostro caso $c = 20$, $C = 300$, $m = 12$, $t = 40$, essendo r il fruttato di 100, $\frac{r}{100}$ sarà il fruttato di 1.

Nel nostro caso la formola (A) ci dà

$$15 = \left(1 + \frac{r}{1200}\right)^{480}.$$

Risolta questa equazione coi logaritmi sarà $r = 909.6$.

Se la stessa questione si risolve col supporre, che l'interesse composto si consideri in ognuno dei 40 anni si troverà $r = 7$.

98. *Si vuole il capitale C , a cui si ridurrà c supponendo, che ad ogni istante si consideri l'interesse composto.*

È chiaro, che nel nostro caso $m = \infty$, onde l' m^{ma} parte dell'anno è una quantità minore d'ogni assegnabile, o infinitesima. In questa ipotesi (A) ci dà $\left(1 + \frac{r}{\infty}\right)^{\infty}$, espressione

di cui non si conosce il valore. Si sviluppi il binomio $\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt}$ e trascurando nello sviluppo le quantità sottratte da mt , avremo, (a) $1 + rt + \frac{r^2 t^2}{2} + \frac{r^3 t^3}{2 \cdot 3} + \frac{r^4 t^4}{2 \cdot 3 \cdot 4}$ ec. Ora se si abbia e^x e come nel (3) si ponga

$$e^x = \left((1 + e - 1)^m \right)^{\frac{x}{m}} = (1 + Am + Nm^2 \text{ ec.})^{\frac{x}{m}}$$

= (perchè quando $a=e$, $A=1$) $(1 + m + Nm^2 + \text{ec.})^{\frac{x}{m}}$, e si sviluppi questo secondo membro facendo in ultimo $m=0$, si troverà

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} \text{ ec.}$$

dunque la serie (a) è e^{rt} : onde $C = ce^{rt}$. Questa formola è la norma per vedere quanto cresca il capitale diminuendo gl'intervalli del frutto.

1.° Per esercizio si risolva l'equazione $a^x - 8a^{-x} = 2$, e si troveranno i due valori $x = \frac{212}{1a}$, $x = \frac{1(-2)}{1a}$.

2.° Si risolva anche l'equazione $\frac{2^{2x} \cdot 8^{x^2-1}}{16} = 32^{2x-3}$, e si troverà un risultamento senza logaritmi.

3.° Nella formola delle annualità si supponga, che questa si debba godere un numero indefinito di anni, e si troverà che la somma a da improntarsi è $\frac{b}{r}$.

4.° Provate l'equazioni

$$\left(7 \frac{16}{15} + 5 \frac{25}{24} + 3 \frac{81}{80} \right) \left(16 \frac{16}{15} + 12 \frac{25}{24} + 7 \frac{81}{80} \right) = 1(5^{12})$$

$$1x + 2 \frac{2x+2}{2x+1} + 1 \frac{(2x+1)^2}{(2x+1)^2-1} = 1(x+1).$$





GEOMETRIA



1. **L'**Estensione è la proprietà dei corpi la più chiara, perchè si sperimenta colla vista, e col tatto, e si sente sempre. L'estensione poi è una proprietà de'corpi assai interessante ad essere conosciuta, e valutata. Ne abbiamo un esempio nella misura dei terreni, nella necessità di misurare la grandezza dei corpi di gran mole, onde valutarne il peso, ed il prezzo.

2. La Geometria è una parte delle Matematiche, nella quale si dimostrano le proprietà della Estensione, e vi si danno i metodi per misurarla e calcolarla.

3. Quantunque l'estensione presenti una idea semplice, pure in essa si distinguono tre specie di estensione.

4. Nella distanza fra due punti non si considera altro che la lunghezza, perchè nel misurarla non si bada nè alla lunghezza, nè alla profondità, o grossezza della misura; nè si riguarda l'estensione, e profondità dell'intervallo. Questa estensione di sola lunghezza si chiama *linea geometrica*.

5. Si consideri ora l'esteriore d'un corpo, ed in questo si troverà una specie di estensione dotata di lunghezza e larghezza, ma priva di profondità, perchè siamo nell'esteriore del corpo; e se si volesse coprire questo corpo non si baderebbe alla sua grossezza. Così se si volessero parare le pareti di una camera non si baderebbe alla loro grossezza. Questa seconda specie di estensione si chiama *superficie geometrica*.

6. Finalmente nello spazio, che occupa un corpo, si osserva lunghezza, larghezza, e profondità. Questa terza specie di estensione si chiama *volume del corpo*, ed in Geometria *solido geometrico*.

7. Dunque *la linea geometrica è una estensione di sola lunghezza*, ed è la distanza fra i punti dello spazio. *La superficie geometrica è una estensione di lunghezza, e larghezza*, ed è l'esteriore dei corpi. *Il solido geometrico, o il volume d'un corpo è una estensione di lunghezza, larghezza, e profondità*, ed è lo spazio, che occupa un corpo.

8. La Geometria trattando della estensione, deve trattare delle sue tre specie indicate, e perciò ha tre parti; nella prima tratta delle linee, nella seconda delle superficie, nella terza dei solidi.

PARTE PRIMA

TRATTATO DELLE LINEE



9. Nella linea si considerino le estremità. Queste non hanno nè lunghezza, nè larghezza, nè profondità. Non hanno lunghezza, perchè sono l'estremo, o il termine della lunghezza; non hanno poi larghezza, e profondità, perchè la linea non ha queste dimensioni (§. 7.). L'estremità della linea geometrica si chiama *punto geometrico*; dunque *il punto geometrico è un ente senza lunghezza, senza larghezza, e senza profondità*. Nulladimeno il punto geometrico esiste, perchè esiste la linea geometrica esistendo le distanze fra i punti, e questa ha la sua estremità.

10. Delle linee geometriche, altra è retta (fig. 1.), altra è curva (fig. 2.), ed altra è spezzata (fig. 3.).

11. *La linea retta, si suol definire, la più corta distanza fra due punti*. Il meglio sarebbe di non darne definizione, perchè la linea retta presenta un'idea così chiara da schiarir piuttosto le altre, anzichè abbia bisogno d'essere dalle altre idee geometriche schiarita. *La curva è quella nella quale non si trovano tre punti in linea retta*. La linea spezzata è formata da tante linee rette unite insieme.

12. La linea retta essendo la più corta distanza fra due punti, è unica: dunque fra due punti non si può condurre, che una sola retta. Da ciò viene, che se due rette hanno l'estremità comuni, combaceranno, o, come si dice, coincideranno in tutta la loro estensione, perchè, se per qualche tratto fossero separate, fra due punti si potrebbero condurre due distinte linee rette.

13. Avendosi due rette AB, AC fig. 4.), che si uniscano in un punto A, queste avranno una inclinazione più, o meno grande l'una all'altra nell'incontrarsi; questa inclinazione si

chiama *angolo*: dunque l'*angolo* è l'*inclinazione* di due rette nell'incontrarsi. Le due rette AB, AC si chiamano i *lati*, o *gambe* dell'angolo; ed il punto A d'intersezione si chiama *vertice* dell'angolo. L'angolo si suole esprimere con tre lettere, due B, C che sono alla estremità dei lati, e la terza A, che si trova nel vertice, colla avvertenza di porre in mezzo la lettera del vertice: quindi il nostro angolo si esprime con BAC, o CAB. Nella fig. 11. i quattro angoli intorno al punto E si leggono AEB, AED, DEC, BEC. Quando però l'angolo è isolato si esprime colla lettera del vertice: così nel nostro caso si dice l'angolo A (fig. 4.).

14. L'angolo non dipende dalla lunghezza delle gambe, perchè è la loro inclinazione nell'incontrarsi (§. 13.), cioè nell'indefinita vicinanza al vertice A.

15. Se una retta DB (fig. 5.) cade così sopra di un'altra AC, che formi da una parte, e dall'altra due angoli DBA, DBC uguali, la linea DB si dice *normale*, o *perpendicolare* ad AC, e ciascuno dei due angoli DBA, DBC si chiama *angolo retto*, o semplicemente *retto*; dunque la linea perpendicolare ad un'altra è quella, che cadendo su di questa fa da una parte, e dall'altra due angoli uguali. L'angolo retto poi, è uno degli angoli fatti dalla normale.

16. L'angolo minore del retto si dice *angolo acuto*; e l'angolo maggiore del retto si dice *angolo ottuso*. Nella (fig. 8.) l'angolo DBC è acuto, e l'angolo DBA è ottuso, perchè elevata da B la normale BE sopra AC, l'angolo DBC è minore dell'angolo retto EBC, e l'angolo DBA è maggiore del retto EBA.

17. Se una retta MB (fig. 6.) cade comunque sopra di un'altra AC gli angoli da una parte e dall'altra MBA, MBC, si chiamano *angoli conseguenti*, o *angoli posti accanto*.



CAPO PRIMO

DELLE RETTE, E DEGLI ANGOLI.



TEOREMA I.

TUTTI GLI ANGOLI RETTI SONO UGUALI.

18. *Dimostr.* Che gli angoli retti fatti da una stessa normale sieno uguali, ciò viene dalla definizione (§. 15.): dunque si deve dimostrare, che sono anche uguali gli angoli retti fatti da diverse normali. Cadano due normali DB, D'B' (fig. 7.) sopra le rette AC, A'C', dimostro, che gli angoli retti dell'una sono uguali agli angoli retti dell'altra. A tal fine si prendano le quattro parti uguali AB, BC, A'B', B'C', e si porti la retta AC sulla retta A'C' in guisa che il punto A sia sopra A', ed il punto C sopra C'; le due rette AC, A'C' combaceranno, perchè sono rette fra due punti (§. 12.); dunque il punto medio B di AC, sarà sopra B' punto medio di A'C'. Ora dico, che la normale BD andrà sopra B'D'. Supponiamo, se è possibile, che ciò non avvenga, e che BD vada secondo una retta B'K. In tal caso come sono uguali gli angoli DBA, DBC, saranno uguali gli angoli KB'A', KB'C'; ma KB'A' è maggiore di D'B'A', e KB'C' è minore di D'B'C', o di D'B'A': dunque dei due angoli KB'A', KB'C' l'uno è maggiore, e l'altro è minore dello stesso angolo D'B'A', dunque sono disuguali, ma, come si è detto, sono uguali; dunque sono uguali e disuguali, ciò è assurdo: dunque la normale DB coincide colla normale D'B', e perciò gli angoli retti della normale DB coincidono cogli angoli retti della normale D'B'.

19. *Coroll.* Dunque in grandezza non vi è che un angolo retto, mentre sono infiniti gli angoli acuti, ed ottusi.

TEOREMA II.

LA SOMMA DEGLI ANGOLI CONSEGUENTI
VALE DUE RETTI.

20. *Dimostr.* La somma dei due angoli DBA, DBC (fig. 8.) vale due angoli retti. Dal punto B sopra AC si alzi la normale BE, si vede chiaro, che la somma degli angoli ABE, EBC equivale alla somma dei tre angoli ABE, EBD, DBC, ossia unendo i due primi angoli, equivale ai due ABD, DBC; i primi sono angoli retti, questi sono angoli conseguenti: dunque la somma degli angoli conseguenti vale due retti.

21. *Coroll.* Dunque se l'uno degli angoli conseguenti è retto, l'altro pure deve essere retto, e se uno è acuto, l'altro deve essere ottuso, e viceversa.

22. *Scolio.* Se al di sopra della retta AC (fig. 8.) da un punto B si conducano quante mai rette si vogliano con che si formi un numero di angoli ABF, GBE, EBD, DBI, IBC a piacere, la somma di questi angoli equivale ai due angoli retti EBA, EBC. E se si faccia lo stesso al di sotto di BC conducendo dallo stesso punto B quante rette si vogliano, la somma degli angoli provenienti sarà uguale a due retti. Quindi la somma di quanti angoli si vogliano intorno ad un punto B vale quattro angoli retti.

TEOREMA III.

DI DUE LINEE, CHE SI SEGONO, SE L'UNA È NORMALE
ALL'ALTRA, LA SECONDA È NORMALE ALLA PRIMA.

23. *Dimostr.* Se BE (fig. 9.) è normale ad AD, viceversa AD è normale a BE. Infatti se BE è normale ad AD, l'angolo BCA deve essere retto; ma BCA, ed ACE sono conseguenti: dunque essendo l'uno ACB retto, deve

essere retto anche l'altro ACE (§. 21.). Quindi cadendo AD sopra BE forma due angoli retti: dunque AD è normale a BE.

TEOREMA IV.

DUE RETTE, CHE HANNO DUE PUNTI COMUNI
COINCIDONO IN TUTTA LA LORO ESTENSIONE.

24. *Dimostr.* Siano due rette (fig. 10.) che abbiano due punti comuni A, B, dimostro che coincidono in tutta la loro estensione. Che coincidano fra i punti A, e B, è evidente (§. 12.). Se si separano, ciò avverrà in un punto R, fuori della estensione AB. Abbia dunque l'una la direzione RN, e l'altra la direzione RC. Dal punto di separazione R s'innalzi la retta RM in guisa che l'angolo ARM sia retto. Essendo AC una retta, l'angolo MRC sarà conseguente di MRA, e perciò sarà retto. Similmente nella retta ARN l'angolo MRN sarà retto, perchè conseguente dello stesso MRA: dunque i due angoli MRC, MRN sono retti, ma gli angoli retti sono uguali (§. 18.); dunque MRN è uguale ad MRC, ciò è assurdo, perchè la parte MRN non può essere uguale al tutto MRC, dunque è assurdo, che NR non coincida con RC.

25. *Coroll.* Dunque due linee rette non possono segarsi, che in un punto solo. Infatti il segarsi di due linee richiede il separarsi da una parte, e dall'altra della porzione, che hanno comune; ma due rette, che potessero avere due punti comuni coinciderebbero in tutta la loro estensione, dunque non si separerebbero, e perciò non si segherebbero.

26. Due rette segandosi, come formano angoli conseguenti, così formano angoli, che non sono tali, questi angoli si chiamano *angoli verticali*, od *angoli opposti al vertice*. Così (fig. 11.) segnandosi le due rette AC, BD, gli angoli

AEB, DEC, che non sono conseguenti si dicono angoli verticali; sono anche verticali gli angoli AED, BEC.

TEOREMA V.

GLI ANGOLI VERTICALI SONO UGUALI.

27. *Dimostr.* L'angolo BEC (fig. 11.) unito al conseguente BEA dà due retti; ma anche l'angolo AED unito allo stesso BEA dà due retti, perchè conseguenti: dunque i due angoli BEC, AED, che uniti ad un terzo danno lo stesso valore, sono uguali.

TEOREMA VI.

SE DUE RETTE AD, DC (fig. 12.) SI UNISCONO COSÌ IN UN PUNTO D, CHE DA QUESTO CONDOTTA UNA RETTA DE A PIACERE, FORMINO CON ESSA DUE ANGOLI ADE, EDC DI SOMMA UGUALE A DUE RETTI, LE DUE LINEE AD, DC FORMANO UNA RETTA.

28. *Dimostr.* Se DC con DA non forma una linea retta; la formi la DB. In tal caso essendo ADB una retta l'angolo EDB unito al suo conseguente EDA darà due retti: ma per ipotesi anche EDC unito allo stesso EDA dà due retti: dunque EDB deve essere uguale ad EDC: questo è assurdo, perchè la parte non può essere uguale al tutto: dunque è assurdo, che DC non sia in linea retta con DA.

29. Il triangolo è una superficie chiusa da tre linee rette, che si uniscono in tre punti (fig. 13.). La figura ABC è un triangolo, perchè è una superficie chiusa dalle tre rette AB, AC, BC, che si uniscono nei tre punti A, B, C. Due triangoli si dicono uguali quando sono equivalenti le loro superfici; si dicono perfettamente uguali, o coincidenti, quando sopraposti combaciano in tutta la loro estensione,

e quindi hanno i lati, e gli angoli rispettivamente uguali fra loro.

TEOREMA VII.

SIANO I DUE TRIANGOLI ACB , $A'C'B'$ (fig. 14.) NEI QUALI I LATI CA , CB DELL'UNO SIANO UGUALI AI LATI $C'A'$, $C'B'$ DELL'ALTRO, E L'ANGOLO C FATTO DAI PRIMI DUE LATI SIA UGUALE ALL'ANGOLO C' FATTO DAGLI ALTRI, DIMOSTRO, CHE IL TRIANGOLO ACB , È COINCIDENTE COL TRIANGOLO $A'C'B'$.

30. *Dimostr.* Per dimostrarlo si porti il lato CA sopra $C'A'$, essendo uguali, coincideranno, e l'angolo C trovandosi sopra C' coincideranno, perchè per ipotesi sono uguali; dunque CB andrà sopra $C'B'$, e perchè sono uguali coincideranno. Trovandosi ora il punto A sopra A' , B sopra B' , la retta AB coinciderà con $A'B'$ (§. 12.), e perciò il triangolo ACB coinciderà con $A'C'B'$.

TEOREMA VIII.

SIANO DUE TRIANGOLI (fig. 15.) ACB , DEF , NEI QUALI GLI ANGOLI A , B , SIANO UGUALI AGLI ANGOLI D , EFD , ED IL LATO AB , FRA I PRIMI ANGOLI SIA UGUALE AL LATO DF FRA I SECONDI; DIMOSTRO, CHE I DUE TRIANGOLI SONO COINCIDENTI.

31. *Dimostr.* Se sono tali, il lato AC deve essere uguale al lato DE : ma supponiamo, che non lo sia, e che il lato DE sia maggiore di AC ; in tal caso sopra DE si prenda la parte DR uguale ad AC , e si conduca FR . I due triangoli CAB , DRF saranno coincidenti, perchè i lati AC , AB dell'uno sono uguali ai lati DR , DF dell'altro, e per ipotesi l'angolo A fatto dai primi, è uguale all'angolo D fatto dai secondi; dunque l'angolo B sarà uguale all'angolo RFD : ma per ipotesi lo stesso angolo B è uguale ad EFD :

dunque saranno uguali gli angoli RFD , EFD , cioè la parte è uguale al tutto, ciò è assurdo; dunque è assurdo, che DE sia maggiore di AC . Facendo la costruzione sopra AC , si proverebbe allo stesso modo, che DE non può essere minore di AC : dunque DE deve essere uguale ad AC : perciò nei due triangoli proposti i due lati AC , AB , dell'uno sono uguali ai lati DE , DF dell'altro, e l'angolo A fatto dai primi è uguale all'angolo D fatto dai secondi: dunque (§. 30.) i due triangoli sono coincidenti.

ASSIOMA 1.°

Se due grandezze sono disuguali, cosicchè la prima sia maggiore della seconda, rimarranno tali se ad ambedue si aggiunga la stessa grandezza.

ASSIOMA 2.°

Se si abbiano tre grandezze tali, che la prima sia maggiore della seconda, e questa maggiore della terza, a più forte ragione la prima sarà maggiore della terza.

TEOREMA IX.

SE DA UN PUNTO C (fig. 16.) DENTRO DI UN TRIANGOLO ABC , SI CONDUCANO AGLI ESTREMI A , E , DI UN LATO DUE RETTE CA , CE , LA SOMMA DEI DUE LATI AB , BE È MAGGIORE DELLA SOMMA DI QUESTE DUE RETTE AC , CE .

32. *Dimostr.* Si prolunghi la retta AC finchè s'incontri in un punto D col lato BE . Poichè la linea retta è più corta della spezzata, colla quale ha gli stessi estremi (§. 11.), ABD sarà maggiore della retta AD ; si aggiunga ad ambedue la retta DE , pel primo assioma la spezzata ABE sarà maggiore dell'altra spezzata ADE . Similmente la spezzata

CDE, sarà maggiore della retta CE, ed aggiungendo ad ambedue AC sarà la spezzata ADE, maggiore della spezzata ACE; dunque abbiamo spezzata ABE maggiore di spezzata ADE, e questa maggiore della spezzata ACE: dunque (Ass. 2.) a più forte ragione ABE maggiore di ACE.

TEOREMA X.

DA UN PUNTO AD UNA RETTA NON SI PUÒ CONDURRE
CHE UNA SOLA NORMALE.

33. *Dimostr.* Dal punto B (fig. 17.) sopra la retta AD si conduca la normale BE, dico, che non si può condurre un'altra normale BC. Se è possibile sia anche BC normale sopra DA. Si prolunghi BE finchè EF sia uguale a BE, e si conduca FC. I triangoli BEC, CEF saranno coincidenti, perchè i lati BE, EC dell'uno sono uguali ai lati EF, EC dell'altro, e l'angolo BEC fatto dai primi è retto come l'angolo CEF fatto dai secondi. Se i triangoli sono coincidenti, l'angolo BCE sarà uguale all'angolo ECF; ma BCE per ipotesi è retto; dunque sarà retto anche l'angolo ECF: quindi le due rette BC, FC si uniscono così in un punto C, che colla retta CE formano due angoli di somma uguali a due retti; perciò (§. 28.) la linea BCF è retta. Se dunque si potesse condurre un'altra normale BC, tra due punti B, F si potrebbero condurre due distinte linee rette AEF, BCF, questo è assurdo: dunque è anche assurdo, che da un punto ad una retta si possano condurre due normali.

TEOREMA XI.

DA UN PUNTO AD UNA RETTA LA PIÙ CORTA DISTANZA È LA
NORMALE CONDOTTA DAL PUNTO ALLA RETTA; DI DUE OBLI-
QUE CONDOTTE DA UN PUNTO AD UNA RETTA LA PIÙ LUN-
GA È LA PIÙ DISTANTE DALLA NORMALE; E DUE OBLIQUE
UGUALMENTE DISTANTI DALLA NORMALE SONO UGUALI.

34. *Dimostr.* Sia la normale BE alla retta MN (fig. 18.) ed un'altra linea qualunque BE dallo stesso punto B condotta alla retta MN. Si prolunghi BE finchè EF sia uguale a BE, e si conduca FC; il triangolo BEC è coincidente con FEC; dunque BC è uguale ad FC. Ora la spezzata BCF è maggiore della retta BF; ma invece della spezzata BCF, si può porre il doppio di BC, ed invece della retta BF, si può porre il doppio di BE: dunque il doppio di BC è maggiore del doppio di BE, ossia la semplice BC è maggiore di BE.

Si conduca l'altra obliqua BD più distante di BC dalla normale, e si congiunga F con D; si proverà come sopra, che sono coincidenti i due triangoli BED, DEF: dunque BD è uguale a DF. Abbiamo ora, che da un punto C dentro il triangolo BDF agli estremi B, F del lato BF si sono condotte le rette BC, CF; dunque (§. 32.) sarà BDF maggiore di BCF, o il doppio della retta AD maggiore del doppio della retta BC, o semplicemente BD maggiore di BC; cioè di due oblique condotte ad una retta dallo stesso punto la più lunga è quella, che è più diverge dalla normale.

Finalmente siano due oblique BD, BA ugualmente distanti dalla normale BE, cosicchè ED sia uguale ad EA, avremo due triangoli BED, BEA coincidenti, perchè i lati BE, ED dell'uno sono uguali ai lati BE, EA dell'altro, e l'angolo BED fatto dai primi retto come DEA fatto dai secondi: dunque le oblique BD, BA saranno uguali.

35. *Coroll.* Dunque da un punto ad una retta non si possono condurre più di due rette uguali, perchè se potessero essere per esempio tre, questa terza, o disterebbe come le due prime dalla normale, e coinciderebbe con una di esse; o disterebbe più, o meno delle due, e sarebbe di esse o più lunga, o più corta.

TEOREMA XII.

SE DUE LINEE CONDOTTE DA UN PUNTO AD UNA RETTA SONO UGUALI, DEBBO NO ESSERE UGUALMENTE DISTANTI DALLA NORMALE CALATA DAL PUNTO ALLA RETTA.

36. *Dimostr.* Siano le due rette EA, ED uguali (fig. 19.) condotte dal punto E ad una retta AD, dico, che sono equidistanti dalla normale EB calata da E, sopra AD, cioè deve essere BA uguale a BD. Se è possibile ciò non sia, e sia BD maggiore di BA; si prenda la parte BC uguale a BA, e si conduca EC, avremo due oblique EA, EC ugualmente distanti dalla normale EB: dunque saranno uguali (§. 34.), ma per ipotesi sono uguali le due linee EA, ED: dunque da un punto E si possono condurre ad una retta AD tre linee uguali, ciò è assurdo (§. 35.): dunque le due linee AB, BD sono uguali, e perciò le due rette EA, ED equidistano dalla normale.

37. *Coroll.* Tutti i punti di una normale EB (fig. 19.) che cade sul mezzo d'una retta AD sono equidistanti dagli estremi AD della retta stessa, perchè se da un punto qualunque E della normale si conducano agli estremi della retta le linee EA, ED, queste saranno uguali, poichè sono due oblique egualmente distanti dalla normale.

Viceversa, ogni punto fuori della normale, che cade nel mezzo d'una retta non equidista dagli estremi della retta stessa. Sia la normale OB (fig. 20.) sul mezzo della retta AC, ed un punto E fuori di questa normale: dico, che sono disuguali le distanze AE, CE. Infatti si conduca la retta DC; sarà la spezzata EDC maggiore della retta EC: ma invece di DC posso porre DA: dunque la retta AE è maggiore di EC.

Da tutto ciò viene, che ogni punto D, che sia equidistante dagli estremi d'una retta deve essere punto di una normale, che cade sul mezzo della retta stessa.

38. Dunque una retta, che passa per due punti equidistanti dagli estremi di un'altra retta è normale sul mezzo di questa, perchè i due punti sono di una normale, che cade sul mezzo della seconda retta, e per due punti non può passare che una sola retta.

39. In un triangolo, o tutti e tre i lati sono uguali, e si chiama *triangolo equilatero* (fig. 21.), o sono uguali due lati, e si chiama *triangolo isoscele* (fig. 22.), o finalmente i tre lati sono disuguali, e si chiama *triangolo scaleno* (fig. 23.).

TEOREMA XIII.

NEL TRIANGOLO ISOSCELE GLI ANGOLI OPPOSTI AI LATI
UGUALI SONO UGUALI.

40. *Dimostr.* Sia il triangolo BAC (fig. 24.) nel quale siano uguali i lati BA, AC: dimostro che gli angoli B, C, incontro a questi lati sono uguali. Da A si cali la normale AO, questa caderà fra i lati AB, AC, perchè se cadesse così, che li avesse da una parte sarebbero questi lati due oblique disugualmente distanti dalla normale, ed eguali, ciò, che non può essere (§. 34.). Ora le due linee AB, AC sono due oblique uguali; dunque sono equidistanti dalla normale; perciò OB, OC sono uguali (§. 36.): dunque i due triangoli AOB, AOC sono coincidenti, perchè i lati AO, OB dell'uno sono uguali ai lati AO, OC dell'altro, e gli angoli in O sono retti; perciò gli angoli B, C saranno uguali.

41. *Coroll.* Dunque in un triangolo equilatero tutti gli angoli sono uguali, perchè considerandolo successivamente isoscele col prendere a due a due i lati uguali, saranno a due a due uguali gli angoli opposti.

TEOREMA XIV.

IN UN TRIANGOLO, IN CUI DUE ANGOLI SONO UGUALI,
I LATI OPPOSTI SONO UGUALI.

42. *Dimostr.* Sia il triangolo DAC (fig. 25.), nel quale

gli angoli B , ACB siano uguali: dimostro, che sono uguali i lati opposti AC , AB . Se è possibile ciò non sia, ed il lato BA sia maggiore del lato AC ; si prenda BO uguale ad AC , e si conduca CO . Nei due triangoli OBC , ACB i due lati BO , BC dell'uno sono uguali ai lati AC , BC dell'altro, e per ipotesi l'angolo B fatto dai primi lati è uguale all'angolo ACB fatto dai secondi: dunque il triangolo OBC sarà coincidente col triangolo ACB , cioè la parte è uguale al tutto, questo è assurdo; dunque i due lati BA , AC sono uguali.

43. *Coroll.* Dunque in un triangolo, che ha tutti gli angoli uguali, tutti i lati sono uguali.

TEOREMA XV.

DUE TRIANGOLI CHE HANNO I LATI RESPETTIVAMENTE
UGUALI SONO COINCIDENTI.

44. *Dimostr.* Siano i due triangoli ABC , EFG (fig. 26.), nei quali sia il lato BA uguale al lato FE , BC uguale ad FG , ed AC uguale ad EG : dimostro, che i due triangoli sono coincidenti. Si porti il triangolo EFG sotto il triangolo ABC adattando il lato EG sopra l' uguale AC , e sia rappresentato dal triangolo ADC , e si conduca la retta BD ; il triangolo BCD sarà isoscele, perchè i lati BC , CD sono uguali essendo uguali per ipotesi i lati BC , FG ; sono perciò uguali gli angoli x' , y' opposti co'lati uguali; saranno uguali per la stessa ragione gli angoli x , y : dunque le due parti dell'angolo B sono uguali alle due parti dell'angolo D , e perciò saranno uguali questi due angoli: dunque nei due triangoli ABC , ADC i due lati BA , BC dell'uno, sono uguali ai due lati AD , DC dell'altro, e l'angolo B fatto dai primi, è uguale all'angolo D fatto dai secondi; perciò i due triangoli sono coincidenti, e quindi sono coincidenti i due proposti ABC , EFG .

45. In un triangolo ABC (fig. 27.), nel quale si trova

un angolo retto B, che perciò si chiama triangolo rettangolo, il lato opposto AC all'angolo retto si chiama *ipotenusa*, e i lati AB, BC, che formano l'angolo retto si chiamano *cateti*.

TEOREMA XVI.

DUE TRIANGOLI RETTANGOLI, CHE HANNO DUE CATETI UGUALI, ED UGUALI LE IPOTENUSE, SONO COINCIDENTI.

46. *Dimostr.* Siano i due triangoli ABD, MNO (fig. 28.) rettangoli, nei quali sono uguali le ipotenuse AD, MO, ed i cateti AB, MN, dico, che sono coincidenti. Per provarlo, si trasporti il triangolo MNO, fino ad adattarsi il cateto MN sul cateto AB, onde il triangolo MNO sia rappresentato dal triangolo ABC. Le due linee BD, BC formeranno una retta DC, perchè essendo retti gli angoli ABD, ABC, le due linee BD, BC si uniscono così in B, che con una terza BA formano due angoli di somma uguali a due retti (§. 28.) Ora le due linee AD, AC per ipotesi uguali; sono dunque due oblique uguali; dunque saranno equidistanti dalla normale AB: perciò BD, BC sono uguali, ossia sono uguali i cateti BD, NO: dunque nei due triangoli rettangoli ABD, MNO, i due lati AB, BD dell' uno sono uguali ai lati MN, NO dell' altro, e l'angolo ABD fatto dai primi è retto, come lo è l'angolo N fatto dai secondi: quindi i due triangoli sono coincidenti.

TEOREMA XVII.

SIA UN TRIANGOLO AFB (fig. 29.) ED IN ESSO SI PROLUNghi IL LATO AB INDEFINITAMENTE IN C: DIMOSTRO, CHE L'ANGOLO FBC CHE SI CHIAMA ANGOLO ESTERNO È MAGGIORE DI CIASCUNO DEI DUE ANGOLI FAB, AFB, CHE SI CHIAMANO ANGOLI INTERNI ED OPPOSTI.

47. *Dimostr.* Si divida il lato FB nel suo punto me-

dio D, e da A per D si conduca la retta ADE, si prenda DE uguale ad AD, e si conduca EB; i due triangoli FAD, DEB, sono coincidenti, perchè i lati FD, DA dell'uno sono uguali per costruzione ai lati DB, DE dell'altro, e l'angolo FDA fatto dai primi è verticale con EDB fatto dai secondi. Dalla coincidenza dei triangoli si ricava, che l'angolo DBE è uguale all'angolo AFB; ma DBC è maggiore di DBE; dunque DBC, o l'angolo esterno è maggiore di AFB, uno degli interni ed opposti.

Dimostriamo, che l'angolo esterno DBC è anche maggiore dell'altro interno ed opposto FAB. A tal uopo diviso per mezzo in M il lato AB, per i punti F, M si conduca la retta FO, e presa MO uguale ad MF si conduca BO, e si dimostrerà come innanzi, che i triangoli BMO, FAM sono coincidenti; dunque l'angolo MBO è uguale all'angolo FAM; ma MBN è maggiore di MBO: dunque sarà ancora maggiore di FAB; ma MBN è uguale al suo verticale FBC: dunque FBC esterno è maggiore dell'altro interno, ed opposto FAB.

TEOREMA XVIII.

DUE TRIANGOLI, CHE HANNO DUE ANGOLI UGUALI A DUE ANGOLI, ED UN LATO UGUALE AD UN LATO SONO COINCIDENTI.

48. *Dimostr.* Siano i due triangoli ACB, EFR (fig. 30.) nei quali l'angolo A sia uguale all'angolo E, l'angolo C uguale all'angolo F, ed il lato AB uguale al lato ER, dico, che i triangoli sono coincidenti. Se sono tali i lati CA, FE sono uguali. Se è possibile non lo siano, e sia CA maggiore di FE. Si prenda la parte DA uguale ad EF, e si conduca DB. I due triangoli DAB, FER saranno coincidenti: dunque l'angolo ADB sarà uguale all'angolo F; ma gli angoli C, F sono uguali, dunque l'angolo ADB esterno al triangolo DCB sarà uguale all'interno, ed opposto C; ciò è assurdo (§. 47.): dunque AC è uguale ad EF; e perciò i triangoli ACB, EFR sono coincidenti.

TEOREMA XIX.

IN UN TRIANGOLO AL LATO MAGGIORE È OPPOSTO ANGOLO MAGGIORE, ED AL LATO MINORE È OPPOSTO ANGOLO MINORE, E VICEVERSA.

49. *Dimostr.* Sia il triangolo ABC (fig. 31.), nel quale il lato AC sia maggiore di AB: dimostro, che l'angolo ABC opposto al lato maggiore AC è maggiore dell'angolo ACB opposto al lato minore AB. Per provarlo si prenda sul lato maggiore AC la parte AO uguale ad AB e si conduca BO. Nel triangolo isoscele BAO l'angolo AOB sarà uguale all'angolo ABO; ma AOB come esterno al triangolo OCB è maggiore dell'angolo OCB, dunque anche ABO sarà maggiore di OCB, ed a più forte ragione l'angolo ABC sarà maggiore di OCB.

Viceversa se l'angolo ABC sarà maggiore di ACB il lato AC opposto al primo sarà maggiore di AB opposto al secondo; perchè se ciò non fosse il lato AC sarebbe o uguale ad AB, o minore: nel primo caso l'angolo ACB sarebbe uguale ad ABC, e nel secondo ABC sarebbe minore di ACB, il tutto contro l'ipotesi.

TEOREMA XX.

IN UN TRIANGOLO NON VI POSSONO ESSERE NÈ DUE ANGOLI RETTI, NÈ DUE OTTUSI, NÈ UNO RETTO ED UNO OTTUSO.

50. *Dimostr.* Sia il triangolo BEC (fig. 32.), gli angoli EBC, ECB non possono essere nè ambedue retti, nè ambedue ottusi, nè uno retto ed uno ottuso. Si prolunghi il lato BC da una parte e dall'altra; gli angoli EBA, ECD esterni dovranno essere maggiori degli interni, ed opposti ECB, EBC: dunque nelle tre indicate ipotesi i detti angoli EBA, ECD sarebbero ottusi, mentre i loro angoli

conseguenti EBC, ECB sarebbero o retti, o ottusi, ciò che è assurdo (§. 21.).

51. *Coroll.* 1.° In un triangolo, ove sia un angolo retto o ottuso, gli altri due debbono essere acuti.

52. *Coroll.* 2.° In un triangolo isoscele niuno degli angoli opposti ai lati uguali, o alla base può essere retto, ed ottuso; e niuno può essere retto o ottuso degli angoli di un triangolo equilatero, altrimenti nel primo caso vi sarebbero in un triangolo due angoli retti, o ottusi; e nel secondo ve ne sarebbero tre.

53. *Scolio.* Dovendo essere nel triangolo equilatero tutti e tre gli angoli acuti, in un triangolo possono essere acuti tutti e tre gli angoli. Ma in un triangolo vi può essere un angolo retto, ovvero uno ottuso. Infatti se da un punto F (fig. 33.) sopra d'una retta AE si cala una normale FD, e poi l'obliqua FC, il triangolo FCD ha un angolo retto in D. Se poi si conduca un'altra obliqua FB si avrà il triangolo FBC coll'angolo ottuso FCB. Infatti l'angolo FCB esterno rispetto il triangolo FDC deve essere maggiore dell'angolo interno ed opposto FDC, ossia maggiore del retto.

54. Da ciò viene, che in un triangolo relativamente agli angoli possono darsi tre casi. 1.° Che abbia tutti gli angoli acuti, e si chiama *triangolo acutangolo*. 2.° Che abbia un'angolo ottuso, e si chiama *triangolo ottusangolo*. 3.° Che abbia un angolo retto, e si chiama *triangolo rettangolo*.

TEOREMA XXI.

SE DALL'ESTREMITÀ SUPERIORE D'UNA RETTA, CHE SEGA UN'ALTRA NON AD ANGOLO RETTO, SI CALA SU QUESTA UNA NORMALE, QUESTA DEVE CADERE DALLA PARTE DELL'ANGOLO ACUTO FATTO DALLA RETTA, CHE SI SEGA COLL'ALTRA.

55. *Dimostr.* Sia la retta DE (fig. 34.), che si sega con

AF in B non ad angoli retti, e dal punto D si cali una normale DC sopra AF, questa caderà dentro l'angolo acuto DBF. Se è possibile cada come AD dentro l'angolo ottuso DBA. In tal caso l'angolo DBC esterno rispetto il triangolo DBA sarà maggiore dell'angolo interno ed opposto DAB; ma questo è retto per ipotesi, dunque DBC sarà ottuso contro l'ipotesi.

TEOREMA XXII.

DUE TRIANGOLI ABBIANO DUE LATI UGUALI A DUE LATI, UN ANGOLO OPPOSTO AD UN LATO IN UN TRIANGOLO UGUALE ALL'ANGOLO OPPOSTO AL LATO UGUALE NELL'ALTRO TRIANGOLO, E GLI ALTRI DUE ANGOLI OPPOSTI AGLI ALTRI DUE LATI UGUALI SIANO DELLA STESSA SPECIE O ACUTI, O OTTUSI, I TRIANGOLI SONO COINCIDENTI.

56. *Dimostr.* Siano i due triangoli ACB, DFE (fig. 35.), nei quali i due lati AC, CB dell'uno siano uguali ai lati DF, FE dell'altro; siano uguali gli angoli A, D opposti ai lati uguali CB, FE; e gli angoli B, E opposti agli altri due lati uguali AC, DF siano ambedue o acuti, o ottusi; i due triangoli sono coincidenti. Se lo sono deve essere il lato AB uguale a DE: ma non lo sia, e sia maggiore. Si prenda la parte AG uguale a DE, e si conduca CG, avremo i due triangoli ACG, DFE coincidenti, perchè i due lati AC, AG dell'uno sono uguali ai due lati DF, DE dell'altro, e gli angoli A, D sono uguali: dunque il lato CG è uguale ad FE; ma per ipotesi CB era uguale ad FE, dunque CG è uguale a CB, e perciò il triangolo GCB è isoscele. Siano ora gli angoli B, E ottusi, dunque nel triangolo isoscele GCB vi saranno due angoli ottusi B, e CGB ciò che è assurdo (§. 50.). Se poi B, ed E saranno acuti, sarà acuto l'angolo CGB; dunque sarà ottuso l'angolo conseguente CGA (§. 21.), e perciò essendosi provato, che il triangolo ACG è coincidente con FDE, l'angolo ottuso CGA

potrebbe coincidere coll'acuto E: dunque il lato BA non può essere maggiore di DE; non può essere minore, perchè la costruzione, e la dimostrazione all'assurdo si farebbe sopra il lato DE; dunque i lati AB, DE sono uguali, e perciò i due triangoli CAB, DFE sono coincidenti.

N. B. Gli angoli B, E sono implicitamente dati in specie, se A, D fossero retti, o ottusi, perchè dovrebbero essere acuti; e se essendo A, D acuti fosse $BC > AC$, $FE > FD$, perchè gli angoli B, E opposti ai lati minori a più forte ragione dovrebbero essere acuti.

57. *Scolio.* Riunendo li teoremi dimostrati nei (§§. 30, 43, 45, 48, 56.) sulla coincidenza dei triangoli si deduce, che essendovi in un triangolo sei elementi, tre angoli, e tre lati, i triangoli sono coincidenti quando abbiano tre elementi (tra i quali vi sia almeno un lato) uguali a tre elementi. Così i triangoli sono coincidenti quando abbiano due angoli uguali a due angoli, ed un lato uguale ad un lato (§. 31, 48.). Sono coincidenti quando abbiano due lati uguali a due lati, ed un angolo uguale ad un angolo (§. 30, 56.). Dunque si può stabilire questa proposizione generale interessantissima.

58. UN TRIANGOLO È DATO QUANDO SONO DATI TRE DE' SUOI SEI ELEMENTI FRA I QUALI VI SIA ALMENO UN LATO.

Il triangolo in tal modo è fissato, perchè ogni altro triangolo, che abbia gli stessi tre elementi dati coincide con esso.

59. Gli elementi poi da darsi saranno I. *Due lati, ed un angolo.* II. *Due angoli, ed un lato*, che è l'inverso dell'antecedente. III. *I tre lati.* Qui non vi può essere l'inverso, perchè con tre angoli non si fissa il triangolo, non essendovi un lato tra le condizioni. Ognuno dei due primi casi ne contiene due. Per es. il primo, che fissa due lati, ed un angolo, contiene il caso, che l'angolo sia fatto dai due lati, o che sia all'estremità di uno, ossia opposto ad uno dei due lati. Il secondo caso pure ne ha due, perchè o gli angoli sono alle estremità del lato, o altrimenti.

TEOREMA XXIII.

DUE RETTE NORMALI AD UNA TERZA PROLUNGATE QUANTO SI
VOGLIA DA AMBE LE PARTI MAI S'INCONTRERANNO.

60. *Dimostr.* Siano le rette FD, GE (fig. 36.) normali ad una retta SC, prolungate le prime a piacere da ambe le parti F, G, e D, E, non s'incontreranno. Poichè se s'incontrassero in un punto O, ovvero O' si verificherebbe, che da uno stesso punto si potrebbero condurre due distinte normali ad una retta, ciò che è assurdo (§. 33.).

TEOREMA XXIV.

DUE RETTE, CHE CON UNA TERZA FANNO DUE ANGOLI DALLA
STESSA PARTE DI SOMMA UGUALE A DUE RETTI PROLUN-
GATE DA AMBE LE PARTI MAI S'INCONTRERANNO.

61. *Dimostr.* Siano le due rette AB, DC (fig. 37.), che con una terza FE facciano gli angoli BHG, HGC dalla stessa parte BC, che sommati diano due retti, dico, che AB, DC comunque si prolunghino dalle due parti B, C, ed A, D non s'incontreranno mai. Per dimostrar ciò si stabilisca, che non essendo retti i due angoli BHS, HGC (perchè altrimenti si avrebbe il caso antecedente), uno sarà minore del retto, o acuto, e l'altro maggiore del retto, o ottuso, onde insieme diano due retti. Inoltre dal punto medio O di HG si conduca IL normale in I ad AB. Se l'angolo BHG è ottuso, il posto accanto IHG sarà acuto (§. 24.): in tal caso la normale IL caderà dalla parte dell'angolo IHG acuto (§. 55.). Ora nei due triangoli IHO, GOL, gli angoli IOH, GOL sono uguali, perchè verticali: l'angolo OGL è uguale all'angolo OHI, perchè ambedue uniti allo stesso angolo BHO danno due retti; in ultimo il lato HO, OG fra gli angoli uguali sono uguali per co-

struzione : dunque (§. 31.) i due detti triangoli sono coincidenti; perciò l'angolo OIH è uguale all'angolo OLG : ma per costruzione OIH è retto, dunque è retto anche l'angolo OLG : quindi le due rette BA , CD sono normali alla terza IL , dunque prolungate da ambe le parti (§. 60.) non s'incontreranno.

TEOREMA XXV.

DUE RETTE PROLUNGATE NON S'INCONTRERANNO MAI SE L'UNA È NORMALE AD UNA TERZA, E L'ALTRA CON QUESTA FA UN ANGOLO QUALUNQUE.

62. *Dimostr.* Siano le due rette GC , AN (fig. 38.), la prima normale ad AS , l'altra AN , che con questa dalla parte di GC fa l'angolo acuto NAC , dico, che le due AN , GC sufficientemente prolungate s'incontreranno. Per provarlo dal punto A s'innalzi AF normale sopra AS , avremo l'angolo acuto FAN . Si facciano tanti angoli NAO , OAP , PAQ , QAB tutti uguali ad FAN , e tanti finchè un lato AB venga sotto la retta AS : quindi sulla indefinita AS prese le parti CD , DT , TR , RS uguali ad AC si supponga, che tutte insieme con AC sieno tante quanti sono gli angoli FAN , NAO , OAP , PAQ , QAB , cioè nel nostro caso siano cinque, e dai punti D , T , R , S si elevino le normali DH , TI , RL , SM sopra AS , avremo così cinque strisce indefinite $FACG$, $GCDH$, $HDTI$, $ITRL$, $LRSM$ tutte uguali, e cinque spazi angolari indefiniti uguali FAN , NAO , OAP , PAQ , QAB . Ora lo spazio angolare indefinito FAB è maggiore dello spazio indefinito FAS , perchè questo è compreso in quello: dunque potremo dire, che cinque volte lo spazio angolare indefinito FAN è maggiore di cinque volte la striscia indefinita $FACG$: dunque anche il quinto del primo spazio sarà maggiore del quinto del secondo, ossia lo spazio angolare indefinito FAN sarà maggiore della striscia indefinita $FACG$; quindi la linea AN deve segare CG , altrimenti lo spazio indefi-

nito compreso FAN sarebbe maggiore dello spazio FACG, che lo comprenderebbe, lo che è assurdo.

TEOREMA XXVI.

DUE RETTE, CHE CON UNA TERZA DALLA STESSA PARTE FANNO DUE ANGOLI DI SOMMA MINORE DI DUE RETTI PROLUNGATE S'INCONTRERANNO.

63. *Dimostr.* Siano le due rette AB, DC (fig. 37.), che con FE formino gli angoli AHG, HGD di somma minore di due retti. Pel punto medio O di HG si conduca IL normale a DC, dico, che non potrà essere normale in I sopra AB. Se è possibile lo sia, in tal caso i due triangoli IOH, OGL sono coincidenti (§. 56.), perchè gli angoli in I, ed L sono retti, gli angoli GOL, IOH sono verticali, ed i lati OH, OG per costruzione sono uguali; perciò gli angoli IHO, OGL sono uguali; ma OGL unito ad OGD da due retti, dunque anche IHO unito ad OGD da due retti, contro l'ipotesi; dunque IC non è normale in I. Ora se IL non è normale in I uno degli angoli AIO, OIH sarà acuto, perciò la retta DC cadendo normale sopra IL, l'altra vi cade facendovi l'angolo acuto, dunque (§. 62.) le stesse due rette AB, DC s'incontreranno sufficientemente prolungate.

64. Due rette, che prolungate quanto si voglia da ambe le parti non s'incontrano mai si chiamano *rette parallele*. Due rette, che nel prolungamento tendono ad incontrarsi si dicono *rette convergenti*, se poi sempre più si scostano si dicono *rette divergenti*. È chiaro però, che anche le rette divergenti tendono ad incontrarsi dall'altra parte, ove sono convergenti: quindi riguardo a due rette si danno due casi: o prolungate da ambe le parti non s'incontreranno, o s'incontreranno da una parte.

TEOREMA XXVII.

DUE RETTE SONO PARALLELE SE SEGATE DA UNA TERZA FANNO CON ESSA DUE ANGOLI DALLA STESSA PARTE DI SOMMA UGUALE A DUE RETTI, E VICEVERSA SE SONO PARALLELE, CON UNA TERZA, CHE LE SEGHA, FANNO DUE ANGOLI DALLA STESSA PARTE DI SOMMA UGUALE A DUE RETTI.

65. *Dimostr.* La prima parte del teorema è il teorema XXIV; l'altra si prova così.

Se BA, CD (fig. 37.) essendo parallele con una FE non facessero i due angoli BHG, HGC di somma uguale a due retti, o questa somma sarebbe maggiore, o minore di due retti. Se minore pel teorema XXVI s'incontrerebbero; se maggiore, poichè la somma dei quattro angoli BHG, GHA, HGC, HGD a due a due conseguenti vale quattro retti, e per ipotesi la somma dei due BHG, HGC è maggiore di due retti, la somma degli altri due AHG, HGD riesce minore di due retti, dunque le due dette rette s'incontrerebbero contro l'ipotesi.

66. *Scolio.* La linea FE, che sega le parallele si dice *secante*. Gli angoli BHG, HGC si chiamano *angoli interni posti dalla stessa parte*: quindi la somma degli angoli interni posti dalla stessa parte vale due retti.

Gli angoli AHG, HGC si chiamano *angoli alterni interni*.

L'angolo HGC si dice *angolo interno*, ed EHB si chiama *angolo esterno ed opposto*.

TEOREMA XXVIII.

GLI ANGOLI ALTERNI INTERNI SONO UGUALI, E L'ANGOLO INTERNO È UGUALE AL SUO ESTERNO ED OPPOSTO.

67. *Dimostr.* L'angolo AHG unito al suo conseguente GHB dà due retti; ma, essendo AB, DC parallele, anche

HGC unito allo stesso GHB dà due retti, dunque AHG è uguale ad HGC.

Inoltre EHB è uguale al suo verticale AHG, ma per l'antecedente dimostrazione HGC è uguale allo stesso AHG, dunque HGC è uguale ad EHB.

TEOREMA XXIX.

SE GLI ANGOLI ALTERNI SONO UGUALI, O È UGUALE L'ANGOLO INTERNO AL SUO ESTERNO ED OPPOSTO, LE DUE LINEE SEGATE SONO PARALLELE.

68. *Dimostr.* Infatti se AHG è uguale ad HGC, poichè AHG unito a BHG dà due retti; anche HGC unito a BHG dà due retti; quindi la somma dei due angoli interni posti dalla stessa parte è uguale a due retti (§. 61); perciò le due linee AB, AC sono parallele.

Similmente se HGC è uguale ad EHB, poichè questo unito al suo conseguente BHG dà due retti, anche HGC unito a BHG darà due retti, cioè la somma dei due angoli interi è uguale a due retti.

TEOREMA XXX.

UNA RETTA NORMALE AD UNA DI DUE RETTE PARALLELE, È NORMALE ALL'ALTRA; LE NORMALI FRA DUE PARALLELE SONO PARALLELE SONO UGUALI, E LE PIÙ CORTE RETTE FRA LE DATE PARALLELE.

69. *Dimostr.* Se BF (fig. 39.) è normale ad EH, è normale anche alla parallela AD, e ciò affinchè la somma dei due angoli interni posti dalla stessa parte BFG, CDF dia due retti. Le due normali poi BF, CG sono parallele, perchè ambedue sono normali ad una terza EH (§. 60.). Queste normali sono uguali, perchè condotta FC i due

triangoli BFC, CFG sono coincidenti. Infatti essendo BF, CG parallele saranno gli angoli alterni uguali FCG, BFC; essendo parallele BC, FG saranno uguali gli angoli alterni BCF, CFG: inoltre FC è lato comune ai due detti triangoli: dunque BF è uguale a CG.

Finalmente se fra le due parallele AD, GH si conduca a piacere una retta CF questa sarà sempre maggiore di una qualunque delle normali condotte fra le parallele stesse. Poichè condotta la normale CG, o la BF, la linea CF sarà una obliqua rispetto queste normali, e perciò maggiore di esse.

70. *Scolio.* Poichè le normali fra le parallele sono tutte uguali, e sono le più corte linee fra le parallele stesse, si prendono ad esprimere le distanze dei punti corrispondenti delle parallele, intendendo per punti corrispondenti le due estremità di queste normali. Viene dunque dal (§. 69.), che le parallele sono rette equidistanti in tutti i loro punti corrispondenti.

TEOREMA XXXI.

IN UN TRIANGOLO L'ANGOLO ESTERNO È UGUALE ALLA SOMMA
DEI DUE ANGOLI INTERNI ED OPPOSTI.

71. *Dimostr.* Sia il triangolo ABC (fig. 40.). Si prolunghi il lato AC in E, sarà l'angolo BCE uguale alla somma dei due interni ed opposti BAC, ABC. Per dimostrarlo si conduca CD parallela ad AB, e si consideri la BC secante di queste due; gli angoli x , x' saranno angoli alterni interni, e perciò uguali. Considerando ora delle stesse parallele AB, CD, la AE come secante sarà l'angolo interno y uguale all'esterno, ed opposto y' . Essendo ora le due parti x' , y' di tutto l'angolo BCE uguali alli due angoli x , ed y , tutto l'angolo BCE sarà uguale alla somma dei due angoli x , y , ossia l'angolo esterno è uguale alla somma dei due interni, ed opposti.

72. *Coroll.* Si aggiunga l'angolo BCA all'angolo BCE, sarà lo stesso, che aggiungerlo alla somma dei due x , ed y ; ma la prima somma essendo quella di due angoli conseguenti è uguale a due retti, dunque anche la seconda somma di BCA con x , ed y darà due retti; cioè *in un triangolo qualunque la somma dei tre angoli è uguale a due angoli retti.*

Ma ciò si dimostra assolutamente dal

TEOREMA XXXII.

IN UN TRIANGOLO QUALUNQUE LA SOMMA DEI TRE ANGOLI
È UGUALE A DUE ANGOLI RETTI.

73. *Dimostr.* Sia il triangolo ABC (fig. 41.), e dal punto A si conduca la retta DE parallela al lato BC. Se si considera AC come secante di queste due parallele, saranno uguali gli angoli alterni x , x' . Considerando poi AB come secante delle stesse parallele saranno uguali gli angoli y , y' ; dunque la somma dei due angoli x , y è uguale alla somma dei due angoli x' , y' : ad ambedue queste somme si aggiunga l'angolo BAC, si avrà, che i tre angoli x , BAC, y presi insieme equivarranno alla somma dei tre angoli x' , y' , BAC del triangolo BAC: ma la prima somma è uguale a due angoli retti (§. 22.), dunque la somma dei tre angoli d'un triangolo qualunque equivale a due angoli retti.

74. *Scolio.* Da questo teorema si conferma ciò che si disse nel (§. 50.); perchè se in un triangolo vi è un angolo retto, dovendo essere la somma degli altri due un retto, ciascuno è minore del retto, e perciò è angolo acuto. Se poi nel triangolo vi è un angolo ottuso, dovendo essere la somma degli altri due minore d'un retto, a più forte ragione ciascuno dovrà essere acuto. Ciò però non prova la possibilità dell'esistenza di un angolo retto, o di un an-

golo ottuso in un triangolo; né col nostro teorema si prova la possibilità, che in un triangolo vi siano tutti gli angoli acuti. Ma tutto ciò è stato provato nel (§. 53.).

75. Per poligono s' intende una superficie chiusa da quante linee si vogliono congiunte ad angoli. Così la figura 42 è un poligono, perchè la superficie è chiusa da 7 linee BC, CD, DE, ec. congiunte nei punti C, D, E ec. È evidente, che sempre sono tanti i lati quanti sono gli angoli, e viceversa; perchè considerando un lato, per esempio BC, si vede, che congiungendosi alla sua estremità C un altro lato CD si forma un angolo C, e se all'altra estremità D di questo CD si congiunga un altro lato DE si forma un altro angolo D, e così di seguito; dunque per ogni lato, che successivamente si considererà dopo il primo BC si forma un angolo, ma il primo formerà il suo angolo B congiungendosi nel suo principio col fine dell'ultimo lato AB; dunque tanti saranno gli angoli quanti i lati.

76. Il poligono si dice *poligono regolare* quando ha tutti i lati uguali, e tutti gli angoli uguali.

77. Dei poligoni regolari quelli di cui si parla nella geometria sono il poligono di 15 lati, di 12, di 10, di 8, di 6, di 5. Il poligono di 15 lati si chiama *pentadecagono*; quello di 12 si dice *duodecagono*; quello di 10 si chiama *decagono*; quelli di 6, e 5 si dicono *esagono*, e *pentagono*.

78. Un poligono di quattro lati si chiama *quadrilatero*. Se in questo i lati opposti sono paralleli si chiama *parallelogrammo*. Così la figur. 43 è un parallelogrammo se il lato AB è parallelo a CD, ed il lato AC è parallelo a BD; quindi il *parallelogrammo è un quadrilatero, che ha i lati opposti paralleli*.

79. Il parallelogrammo, che ha gli angoli retti si dice *rettangolo*. Tale è la figura 44.

80. Se oltre gli angoli retti avrà tutti i lati uguali si chiama *quadrato*. Tale è la figura 45; quindi il quadrato è un quadrilatero, che ha tutti i lati uguali, e tutti gli angoli retti.

81. Se in un quadrilatero i lati saranno tutti uguali, essendo gli angoli qualunque, la figura si chiama *rombo*, o *losanga*. Tale è la figura 46.

TEOREMA XXXIII.

IN UN POLIGONO QUALUNQUE LA SOMMA DI TUTTI GLI ANGOLI È UGUALE AL DOPIO DI UN ANGOLO RETTO RIPETUTO TANTE VOLTE QUANTI SONO I LATI DEL POLIGONO MENO DUE.

82. *Dimostr.* Sia il poligono ABCDEFG (fig. 42.), e da un punto qualunque interno Q ai vertici A, B, C, D, E, F, G, dei suoi angoli si conducano le rette QA, QB, QC, QD, QE, QF, QG, il poligono sarà così diviso in tanti triangoli quanti sono i suoi lati, e tutti gli angoli di questi triangoli meno quelli intorno al punto Q saranno gli angoli del poligono. Ora la somma degli angoli d'ogni triangolo è il doppio d'un retto, e la somma di tutti gli angoli intorno al punto Q è quattro retti (§. 22.), cioè due volte il doppio d'un retto, dunque la somma di tutti gli angoli del poligono sarà il doppio d'un retto ripetuto tante volte quanti sono i lati del poligono tolti due, onde togliere il doppio di due retti appartenenti a tutti gli angoli intorno al punto Q.

83. *Coroll.* Se il poligono sarà regolare per avere il valore di uno dei suoi angoli uguali si dovrà dividere pel numero de'suoi lati il valore della somma di tutti gli angoli, cioè il doppio del retto ripetuto pel numero dei lati meno due.

84. Si prolungano i lati BC, CD, DE ec. in M, N, O ec. avremo gli angoli esterni al poligono MCD, NDE, OEF ec.

TEOREMA XXXIV.

LA SOMMA DEGLI ANGOLI ESTERNI D'UN POLIGONO

VALE QUATTRO RETTI.

85. *Dimostr.* La somma dell'angolo interno del poligono coll'angolo esterno dà il doppio d'un retto, perchè sono angoli conseguenti. Ora queste somme nel poligono sono di numero uguale al numero dei lati del poligono stesso: dunque la somma di tutti gli angoli interni ed esterni è il doppio d'un retto ripetuto pel numero dei lati del poligono. Ma alla somma degli angoli interni appartiene il doppio d'un retto ripetuto pel numero dei lati meno due (§. 82.): dunque la differenza della somma di tutti gli angoli interni ed esterni, e la somma degli angoli interni, ossia la somma degli angoli esterni, sarà il doppio d'un retto ripetuto due volte, o sarà quattro retti.

TEOREMA XXXV.

IN UN PARALLELOGRAMMO I LATI, E GLI ANGOLI OPPOSTI
SONO UGUALI.

86. *Dimostr.* Sia il parallelogrammo ABCD (fig. 43.), dal vertice A d'un angolo si conduca al vertice D dell'angolo opposto la retta AD: questa si chiama *diagonale*. I due triangoli ABD, ACD, che ne provengono sono coincidenti. Infatti per le parallele AB, CD, e la secante AD saranno uguali gli angoli alterni x , x' ; e per le parallele AC, BD, e la stessa secante saranno uguali y , y' : dunque i due triangoli ABD, ACD hanno gli angoli x , y uguali agli angoli x' , y' , ed il lato compreso AD comune: dunque i triangoli sono coincidenti, e perciò AB è uguale a CD; AC è uguale a BD, cioè sono uguali i lati opposti. Sono anche uguali gli angoli opposti B, C, e gli angoli A, D formati dalle parti x , y uguali alle x' , y' .

87. *Coroll.* Se in un parallelogrammo gli angoli sono uguali, sono retti. Infatti la somma dei quattro angoli di un parallelogrammo è uguale a quattro retti, perchè (§.82.) uguale al doppio d'un retto ripetuto quattro volte meno due, cioè pel numero dei lati meno due; dunque ognuno dei quattro angoli uguali vale il quarto di quattro retti, o un retto.

TEOREMA XXXVI.

SE IN UN QUADRILATERO I LATI OPPOSTI SONO UGUALI
LA FIGURA È UN PARALLELOGRAMMO.

88. *Dimostr.* Sia (fig. 43.) il lato AB uguale a CD , ed AC uguale a BD , i due triangoli ABD , ACD saranno uguali, perchè hanno tutti i lati uguali; dunque l'angolo x sarà uguale ad x' , quindi la secante AD fa coi lati AB , CD gli angoli alterni uguali, perciò questi lati sono paralleli. Similmente per la detta coincidenza essendo uguali gli angoli y , y' , saranno paralleli i lati AC , BD : dunque il quadrilatero $ABDC$, che ha i lati opposti paralleli, è un parallelogrammo.

TEOREMA XXXVII.

NEL PARALLELOGRAMMO LE DIAGONALI SI SEGANO
IN PARTI UGUALI.

89. *Dimostr.* Sia il parallelogrammo $ABCD$ (fig. 47.), in cui si conducano le diagonali AC , BD , che si segheranno in punto O . I due triangoli AOD , BOC sono coincidenti, perchè i lati opposti AD , BC sono uguali, ed essendo questi paralleli gli angoli alterni x , y sono uguali ai corrispondenti alterni x' , y' : dunque BO , OD , che sono incontro agli angoli uguali x' , x coincidono, e per la stessa ragione sono coincidenti le diagonali AO , OC , cioè

BD, AC sono segate in mezzo dal punto O di loro intersezione.

TEOREMA XXXVIII.

NEL ROMBO LE DIAGONALI SI SEGANO AD ANGOLI RETTI.

90. *Dimostr.* Sia il rombo ABCD (fig. 46.), e si conducano le diagonali AC, BD. Essendo uguali le quattro linee AB, BC, CD, DA i punti B, D saranno equidistanti dagli estremi A, C della diagonale AC, dunque (§. 38.) sono due punti d'una normale, che cade nel mezzo di AC, e questa non può essere che BD.

TEOREMA XXXIX.

NEL RETTANGOLO LE DIAGONALI SONO UGUALI.

91. *Dimostr.* Sia il rettangolo (fig. 44.) ABCD, nel quale si conducano le diagonali AC, BD; avremo due triangoli ABC, ADB rettangoli in A, e B coi lati AB, BC rispettivamente uguali ai lati AB, AD; dunque questi due triangoli sono coincidenti, e perciò sono uguali le ipotenuse, AC, BD, o le diagonali del rettangolo.

TEOREMA XL.

UN QUADRILATERO CHE HA DUE LATI OPPOSTI UGUALI
E PARALLELLI È UN PARALLELOGRAMMO.

92. *Dimostr.* Siano nel quadrilatero ABDC (fig. 43.) uguali e paralleli i due lati AB, CD, i due triangoli ABD, ACD saranno coincidenti, perchè i lati AB, AD dell'uno sono uguali ai lati DC, AD dell'altro, e l'angolo x fatto dai primi è uguale all'angolo x' fatto dagli altri due lati, essendo angoli alterni delle parallele AB, CD: dunque AC sarà uguale a BD, onde la figura sarà (§. 88.) un parallelogrammo.

CAPO SECONDO

DELLE RETTE NEL CIRCOLO



93. Il circolo è uno spazio chiuso da una linea in tutti i punti equidistante da uno interno, che si chiama *centro*. La linea, che chiude questo spazio si chiama *circonferenza*, o *periferia*.

94. Qualunque retta condotta dal centro alla circonferenza si chiama *raggio* del circolo. La retta, che condotta da un punto della circonferenza ad un altro passa pel centro si chiama *diametro*, e si vede, che è doppia del raggio. Nella (fig. 49.) AD è il raggio, ed AM il diametro. Dalla definizione data del raggio si vede, che nello stesso circolo i raggi sono uguali, poichè questi raggi sono le distanze uguali dei punti della circonferenza dal centro. Quindi anche i diametri, che sono doppi dei raggi, sono uguali. Il diametro divide in due parti coincidenti il circolo. Poichè se nella (fig. 49.) la parte ANM roti intorno al diametro AM, e con ciò la parte ANM venga sopra ACM debbono coincidere, altrimenti vi sarebbero dei punti della circonferenza disugualmente distanti dal centro.

95. Se la linea andando da un punto ad un altro della circonferenza non passa pel centro si chiama *corda*. Così (fig. 49.) la AC è una corda, e l'arco ABC si dice *arco sotteso* dalla corda.

96. Finalmente una linea che tocca la circonferenza in un sol punto si chiama *tangente* della circonferenza in quel punto.

TEOREMA I.

LA RETTA NORMALE ALL'ESTREMITÀ D'UN RAGGIO,
È TANGENTE ALLA CIRCONFERENZA.

97. *Dimostr.* Sia la retta AB (fig. 48.) normale all'estre-

mità B del raggio CB, dico, che tocca la circonferenza nel solo punto B. Si consideri un'altro punto qualunque O, ed a questo dal centro C si conduca la retta CO; poichè CB è la normale sopra AB, CO sarà un'obliqua, e perciò maggiore di CB: dunque il punto O dista dal centro C di più del raggio: dunque è fuori del circolo; ciò si può dire di qualunque punto di BA eccetto il punto B, quindi la retta BA tocca la circonferenza nel sol punto B.

TEOREMA II.

UNA RETTA OBLIQUA ALL'ESTREMITÀ' DEL RAGGIO
NON PUÒ ESSERE TANGENTE.

98. *Dimostr.* Sia la retta CA (fig. 49.), che sia obliqua in C al raggio DC, potremo sempre condurre dal centro D sopra la retta CA la normale DG, e prendendo la parte GA uguale ad GC si conduca la retta DA, avremo così le due oblique DA, DC ugualmente distanti dalla normale DG, dunque sono uguali; ma DC per ipotesi è un raggio, dunque sarà un raggio anche DA, e perciò il punto A sarà un altro punto della circonferenza comune a CA, quindi questa non è tangente.

99. *Coroll.* Una linea CA, che sega la circonferenza in un punto C la sega in un altro punto A, e la parte AC fra i due punti A, C è tutta dentro la circonferenza, perchè tutte le oblique, che si conducessero da D, sopra AC fra i punti A, C, sarebbero tutte minori delle oblique DA, DC, come più vicine di queste alla normale DB; dunque queste oblique sarebbero minori dei raggi del circolo, quindi tutti i punti di AC distano dal centro di meno del raggio, e perciò questi punti sono tutti dentro la circonferenza. È poi chiaro, che una retta non può segare la circonferenza in più di due punti, perchè se la segasse in tre, condotte a questi dal centro tre rette sarebbero tre

raggi; e quindi da un punto ad un'altra retta si potrebbero condurre tre linee uguali, ciò che non può essere (§. 35.).

100. *Angolo iscritto* in un circolo si dice quello, che è formato da due corde, che s'incontrano in un punto della circonferenza, così angolo iscritto sarà l'angolo ABC (fig. 50.)

TEOREMA III.

L'ANGOLO ISCRITTO È LA METÀ DELL'ANGOLO COL VERTICE
AL CENTRO, ED INSISTENTE SULLO STESSO SUO ARCO.

101. *Dimostr.* Sia l'angolo iscritto ABC (fig. 51.), dimostro, che è la metà dell'angolo AOC, che ha il vertice al centro O, e che insiste sullo stesso arco AMC sul quale insiste ABC. Per provarlo si conduca il diametro BOM, ed i raggi OA, OC. Il triangolo BAO sarà isoscele; dunque l'angolo BAO sarà uguale all'angolo ABO, ma l'angolo esterno AOM è uguale alla somma di questi due angoli interni ed opposti; dunque si potrà dire, che AOM ovvero x' sia il doppio di ABO, o di x . Allo stesso modo si dimostra essere y' doppio di y ; dunque x' con y' ossia tutto l'angolo AOC è doppio dei due angoli x , y uniti insieme, o di tutto l'angolo ABC; cioè questo angolo ABC è metà di AOC.

Se si osservi la dimostrazione, e costruzione si vedrà essersi supposto, che il centro stia o sopra di un lato dell'angolo iscritto, o fra i lati stessi. Il primo caso è quando si considerava l'angolo ABM (fig. 51.), e si dimostrava, che l'angolo x è metà di x' , il secondo quando si considerava l'angolo ABC, e si dimostrava, che l'angolo ABC è metà dell'angolo AOC.

Sia ora il terzo caso, in cui l'angolo iscritto ABE (fig. 52.) abbia il centro C fuori dei suoi lati: anche qui l'angolo ABE è la metà dell'angolo ACE, col vertice al cen-

tro insistente sul suo arco AE. Si conduca il diametro BD; e l'angolo ABD avendo il centro sul suo lato BD sarà metà di ACD; per la stessa ragione l'angolo EBD sarà metà di ECD, dunque ABE differenza dai due angoli ABD, EBD sarà la metà dell'angolo ACE differenza dei due angoli ACD, ECD.

TEOREMA IV.

L'ANGOLO ISCRITTO IN MEZZA CIRCONFERENZA
È ANGOLO RETTO.

102. *Dimostr.* Sia l'angolo ABC iscritto in mezza circonferenza ABC (fig. 53.); dico, che è retto. Per dimostrarlo si conduca il diametro BO; i triangoli BDA, BDC saranno isosceli: dunque il doppio dell'angolo ABD sarà uguale alla somma di due angoli ABD, BAD; ma questa somma è uguale all'angolo esterno ADO: dunque il doppio di ABD è uguale ad ADO. Per la stessa ragione il doppio di OBC è uguale all'angolo esterno ODC; dunque il doppio di tutto l'angolo ABC è uguale alla somma dei due angoli ADO, ODC, ma questi danno due retti, dunque il doppio di ABC vale due retti, ossia ABC è un angolo retto.

103. Tutti gli angoli AEC, ABC, ADC iscritti nello stesso segmento ABDC (fig. 50.) di circolo sono uguali, perchè tutti sono doppi dell'angolo col vertice al centro, e che insiste sull'arco ASC, sul quale insistono i detti angoli.

104. Segmenti simili di circoli sono quelli, nei quali tutti gli angoli iscritti sono uguali. Così i due segmenti ACD, MON (fig. 54.) sono simili se un angolo qualunque ACD iscritto in uno è uguale all'angolo qualunque MON iscritto nell'altro.

TEORFMA V.

I SEGMENTI SIMILI, CHE HANNO CORDE UGUALI
SONO COINCIDENTI.

105. *Dimostr.* Siano i due segmenti simili ACD , MON (fig. 54.), che abbiano le corde uguali AD, MN ; dico, che sono coincidenti. Se è possibile non siano tali, e portato il segmento MON sopra ACD adattando la corda MN alla AD sia esso rappresentato da ABD . Si conduca la retta ABC , e le due altre BD , CD . Perchè i segmenti sono simili saranno uguali gli angoli iscritti in essi ABD , ACD ; ma ciò è assurdo, perchè l'angolo ABD esterno è maggiore dell' interno ACD , dunque è assurdo, che il segmento MON non coincida con ACD .

TEOREMA VI.

GLI ANGOLI UGUALI COI VERTICI AI CENTRI DI CIRCOLI UGUALI
COMPREDONO ARCHI UGUALI.

106. Siano i due angoli ABC , MNO , coi vertici B , N (fig. 55.) ai centri di due cerchi di raggi uguali, dimostro, che comprendono gli archi uguali AEC , MFO . Si conducano le corde AC , MO , queste saranno uguali essendo coincidenti i due triangoli ABC , MNO . I segmenti ARC , MPO saranno simili, perchè gli angoli iscritti in essi saranno tutti la metà degli angoli ABC , MNO supposti uguali, che hanno i vertici al centro, ed insistono sopra i loro archi. Ora questi segmenti hanno le corde uguali AC , MO , dunque (§. 105.) saranno coincidenti. Ma gl'interi cerchi sono coincidenti, perchè di raggi uguali, dunque saranno coincidenti i segmenti AEC , MFO differenze fra gl'interi cerchi ed i segmenti ARC , MPO , perciò gli archi AEC , MFO sono uguali.

107. *Coroll.* Nel circolo $ACMN$ (fig. 49.) si conduca il diametro ADM , ed il raggio CD ad esso normale : gli an-

goli retti uguali ADC , MDC comprenderanno gli archi uguali AC , CM : ma ACM è mezza circonferenza (§. 94.); dunque AC , CM sono un quarto della circonferenza; perciò l'angolo retto col vertice al centro comprende un arco, che è la quarta parte della circonferenza. L'arco che è la quarta parte della circonferenza si chiama *quadrante*.

TEOREMA VII.

VICEVERSA SE SONO UGUALI GLI ARCHI COMPRESI DA DUE
ANGOLI COI VERTICI AI CENTRI DI CIRCOLI UGUALI
QUESTI ANGOLI SONO UGUALI.

108. *Dimostr.* Siano gli archi AEC , MFO (fig. 55.), uguali, dimostro, che sono uguali gli angoli ABC , MNO . Se è possibile non lo siano, e l'angolo ABC sia maggiore di MNO . Si conduca BS in guisa che l'angolo SBC sia uguale all'angolo MNO ; per l'antecedente dimostrazione sarà l'arco SEC uguale all'arco MFO ; ma per ipotesi AEC è uguale ad MFO , dunque sarebbero uguali i due archi AEC , SEC , lo che è assurdo.

TEOREMA VIII.

IN CIRCOLI UGUALI, CORDE UGUALI SOTTENDONO
ARCHI UGUALI, E VICEVERSA.

109. *Dimostr.* Nei due cerchi uguali (fig. 55.) siano uguali le corde AC , MO , saranno coincidenti i triangoli ABC , MNO , e quindi saranno uguali gli angoli B , N ; dunque saranno simili i seguenti ARC , MPO ; di più questi hanno le corde uguali AC , MO , perciò saranno coincidenti; dunque saranno coincidenti anche i segmenti AEC , MFO , e quindi saranno uguali gli archi AEC , MFO . Viceversa se questi archi sono uguali saranno uguali gli angoli ABC , MNO (§. 108.), e quindi i triangoli ABC , MNO saranno coincidenti, e le corde AC , MO saranno uguali.

TEOREMA IX.

UN RAGGIO SUL MEZZO DI UNA CORDA È NORMALE AD ESSA,
E DIVIDE L'ARCO SOTTESO IN DUE PARTI UGUALI.

110. *Dimostr.* Sia il raggio BF (fig. 56.) sul mezzo C della corda ED, dico, che a questa è normale, e divide in due parti uguali l'arco EFD. Per provarlo si conducano i raggi BE, BD, ed avremo i due triangoli coincidenti BCE, BCD, perchè hanno tutti i lati uguali; dunque saranno uguali gli angoli BCE, BCD, e perciò BF sarà normale ad ED. Essendo anche uguali gli angoli EBF, FBD saranno uguali gli archi fra essi intercetti EF, FD.

TEOREMA X.

VICEVERSA SE IL RAGGIO È NORMALE ALLA CORDA
LA DIVIDE IN DUE PARTI UGUALI, E IN DUE
PARTI UGUALI DIVIDE L'ARCO SOTTESO.

111. *Dimostr.* Se BC è normale ad ED (figura 56.) i due triangoli BCE, BCD rettangoli saranno coincidenti; perchè hanno le ipotenuse uguali BE, BD, ed il cateto comune BC (§. 46.); dunque saranno uguali le parti EC, CD della corda ED. Essendo uguali gli angoli EBC, CBD saranno uguali gli archi intercetti EF, FD.

112. *Coroll.* Dunque i tre punti B, C, F, cioè il centro B, il punto C medio di una corda ED, ed il punto medio F dell'arco sotteso EFD sono sopra di una retta BF; quindi una retta, che passa per due di questi punti passa pel terzo.

TEOREMA XI.

UNA RETTA ELEVATA NORMALE DEL MEZZO DI UNA CORDA
PASSA PEL CENTRO DEL CIRCOLO.

113. *Dimostr.* Sia BC elevata normale sul mezzo C della

corda ED (fig. 57.), dico, che passa pel centro. Se è possibile CB non passi pel centro, potremo condurre una retta CS, che vi passi; allora SC sarà una linea condotta dal centro al punto medio di una corda; si è dimostrato (§. 110.), che questa deve essere normale alla corda stessa; dunque l'angolo SCE sarà retto, e perciò uguale all'angolo retto BCE; ciò è assurdo, dunque è assurdo che BC non passi pel centro.

114. *Coroll.* Dunque una normale elevata dal mezzo di una corda passa pel centro, e per la metà dell'arco sotteso dalla corda.

TEOREMA XII.

GLI ARCHI COMPRESI FRA DUE CORDE PARALLELLE
SONO UGUALI.

115. *Dimostr.* Siano le due corde BF, CE (fig. 58.) parallele, dico, che sono uguali gli archi BC, FE fra esse compresi. Si conduca il raggio GD normale alla corda BF, sarà anche normale all'altra corda CE parallela, dunque l'arco BD (§. 111.) sarà uguale all'arco DF; e l'arco DC sarà uguale all'arco DE, dunque la differenza dei due archi BD, CD sarà uguale alla differenza dei due archi FD, ED; queste differenze sono gli archi BC, FE, dunque questi archi sono uguali.

TEOREMA XIII.

L'ANGOLO FATTO DA DUE CORDE CHE SI SEGANO È LA METÀ
DEI DUE ANGOLI COL VERTICE AL CENTRO, L'UNO INSISTENTE
SUL SUO ARCO, E L'ALTRO INSISTENTE SULL'ARCO
DEL SUO ANGOLO VERTICALE.

116. *Dimostr.* Sia l'angolo DCE (fig. 59.) fatto dalle due corde BD, AE, dico, che è la metà dei due angoli col vertice al centro l'uno insistente sull'arco DE fra i

suoi lati, l'altro insistente sull'arco AB fra i lati dell'angolo opposto al vertice ACB. Per dimostrarlo si conduca la corda BF parallela ad AE, ed i raggi OD, OE, OF. L'angolo iscritto DBF sarà la metà dell'angolo DOF, o la metà dei due DOE, EOF: ma invece di EOF si può porre l'angolo AOB col vertice in O, ed insistente sull'arco AB, che è uguale all'arco EF (§. 115.): dunque l'angolo DBF è la metà dei due angoli l'uno DOE col vertice al centro insistente sull'arco DE, l'altro AOB col vertice al centro insistente sull'arco BA: ma l'angolo DBF interno delle parallele è uguale all'esterno ed opposto DCE, dunque DCE è uguale alla metà dei detti angoli.

TEOREMA XIV.

L'ANGOLO FATTO DA DUE CORDE CHE SI SEGANO FUORI D'UN CIRCOLO È UGUALE ALLA META' DELLA DIFFERENZA DI DUE ANGOLI COI VERTICI AL CENTRO, L'UNO INSISTENTE SULL'ARCO CONCAVO, E L'ALTRO SULL'ARCO CONVESSO, AMBEDUE QUESTI ARCHI COMPRESI FRA LE GAMBE DELL'ANGOLO DELLE DUE CORDE.

117. *Dimostr.* Sia l'angolo ACE (fig. 60.) fatto dalle due corde BA, DE, che si uniscono in C fuori del circolo, dico, che è uguale alla metà della differenza dei due angoli col vertice al centro l'uno insistente sull'arco AFE concavo, e l'altro sull'arco BD convesso, ambedue fra le gambe CA, CE dell'angolo C. Per provarlo si conduca la corda BF parallela a DE, l'angolo iscritto ABF sarà la metà dell'angolo AOF col vertice al centro, ed insistente sull'arco AF; ma quest'angolo è la differenza dei due angoli AOE, FOE col vertice al centro l'uno insistente sull'arco AFE, e l'altro sull'arco FE, o sull'uguale arco BD, dunque l'angolo ABF, o perciò il suo uguale ACE sarà la metà della differenza di due angoli col vertice al centro, l'uno insi-

stente sull'arco AFE concavo, e l'altro sull'arco BD convesso.

TEOREMA XV.

L'ANGOLO FATTO DALLA TANGENTE, E DALLA CORDA È LA META' DELL'ANGOLO COL VERTICE AL CENTRO, ED INSISTENTE SULLA CORDA.

118. *Dimostr.* Sia l'angolo BAC fatto dalla tangente AB (fig. 61.), e dalla corda AC, dico, che è la metà dell'angolo ADC col vertice al centro, ed insistente sulla corda AC. Infatti l'angolo BAD fatto dalla tangente, e dal raggio è retto: dunque è la metà dei due angoli conseguenti ADC, CDE, che formano due retti: ma invece di BAD posso dire i due angoli BAC, CAE: dunque questi due angoli sono la metà dei due ADC, CDE: ma CAE iscritto è la metà di CDE: dunque BAC sarà la metà di ADC.

TEOREMA XVI.

L'ANGOLO DCB (fig. 62.) FATTO DAL' A CORDA BC, E DAL PROLUNGAMENTO DELL' ALTRA AC È LA META' DELLA SOMMA DEGLI ANGOLI COL VERTICE AL CENTRO ED INSISTENTI SUGLI ARCHI CB, CA SOTTESI DALLE DETTE CORDE.

119. *Dimostr.* Si conducano i raggi AO, OC, OB. La somma dei due angoli conseguenti DCB, ACB è la metà della somma degli angoli AOC, COB, AOB intorno al punto O, perchè la prima somma vale due retti, e l'altra quattro retti: ma l'angolo iscritto ACB è la metà dell'angolo AOB; dunque l'altro angolo DCB sarà la metà dei due angoli AOC, COB.

120. *Scolio.* Nel teorema XV si considerava l'angolo fatto dalla corda AC colla tangente AB (fig. 61.); nel teorema XVI si è considerato l'angolo fatto dalla corda CB, e

dalla secante AD del circolo. Se questa girando intorno al punto C verso sinistra avvenga, che si congiungano i punti A, C, l'arco AC sparirà, sparirà l'angolo AOC, la secante AD diventerà una tangente in C, e l'angolo DCB invece di essere la metà della somma dei due angoli COB, COA sarà la metà del solo angolo COB, come si è provato nel (§. 118.).

121. In Geometria si dice, che due grandezze per es. di linee, di superfici, sono come due altre, quando la prima divisa per la seconda, e viceversa è uguale alla terza divisa per la quarta, e viceversa; ossia allorchè il quoto delle due prime è uguale al quoto delle altre due. Quando ciò avvenga, le due prime grandezze si dicono essere come le altre due; o che la prima sta alla seconda, come la terza sta alla quarta. Le quattro grandezze poi si dicono essere in proporzione geometrica, perchè per ipotesi sono grandezze geometriche, ed il quoto di due grandezze è il loro rapporto, o ragione geometrica.

122. È evidente poi, che se la prima sia maggiore della seconda grandezza, e viceversa, la terza deve essere maggiore della quarta, e viceversa; perchè per esempio una quantità minore non può entrare in una maggiore lo stesso numero di volte che una maggiore entra in una minore.

123. È evidente ancora, che se una proporzione fra quattro grandezze non esiste, si potrà aver subito col rendere acconciamente maggiore o minore uno dei quattro termini per esempio il quarto. Infatti se il primo termine entrando un certo numero di volte nel secondo, il terzo non entra lo stesso numero di volte nel quarto, ma vi entra più o meno volte, basterà nel primo caso opportunamente diminuire il quarto termine, onde il terzo vi entri un minor numero di volte, ed opportunamente si dovrà crescerlo nell'altro caso.

124. Se due linee, o due superfici, o due solidi stiano fra loro come due numeri, per esempio 5 e 9, ciò vuol dire, che come l'unità entra nel 5 cinque volte, e nel

9 nove volte, così una linea, o una superficie, o un solido preso per unità deve entrare cinque volte nella prima linea, o superficie, o solido, e nove volte nell'altra, o linea, o superficie, o solido. Dopo ciò sia

TEOREMA XVII.

DUE ANGOLI COI VERTICI AI CENTRI DI DUE CIRCOLI UGUALI, STARANNO FRA LORO COME GLI ARCHI INTERCETTI FRA I LORO LATI.

125. *Dimostr.* Siano i due angoli BAF, GON (fig. 63.) coi vertici nei centri A, O di cerchi di uguali raggi AB, OG; dico, che l'angolo BAF sta all'angolo GON come l'arco BF sta all'arco GN. Sia l'arco BF all'arco GN come quattro a cinque. Ciò vuol dire (§. 124.), che se un'arco BC preso come unità entra quattro volte nell'arco BF, entrerà cinque volte nell'arco GN. Si divida dunque l'arco BF in quattro parti uguali a BC, e l'arco GN in cinque parti uguali allo stesso BC, e dai punti di divisione C, D, E; H, I, L, M si conducano i raggi CA, DA, EA; HO, IO, LO, MO, con questo avremo gli angoli BAC, CAD ec.; GOH, HOI ec. uguali, perchè coi vertici ai centri di cerchi uguali (§. 108.) intercettano archi uguali; e di questi uguali angoli quattro ne conterrà l'angolo BAF, e cinque l'angolo GON: dunque l'angolo BAF sta all'angolo GON come quattro a cinque: dunque il quoto degli angoli BAF, GON è quello di 4, e 5; ma anche il quoto degli archi BF, GN è quello di 4 e 5: dunque il quoto dei due angoli stessi BAF, GON è il quoto degli archi fra essi intercetti; ossia due angoli coi vertici ai centri di cerchi uguali sono come gli archi intercetti.

126. La stessa conseguenza sarebbe venuta se la dimostrazione non avesse cominciato dal supporre dato in numeri il quoto degli archi, ma piuttosto quello degli an-

goli; perchè se i due angoli BAF, GON siano fra loro come 4 a 5, ciò vuol dire, che vi è un angolo per esempio BAC, che entrando quattro volte in BAF, in GON vi deve entrare cinque volte. In tal caso si farebbero queste divisioni dei due angoli, gli archi intercetti BC, CD ec. GH, HI ec. sarebbero uguali (§. 106.), e perciò i due archi BF, GN sarebbero come 4 a 5, al qual punto della dimostrazione si vede come si progredirebbe subito a dimostrare l'enunciato teorema.

127. Se avvenisse, che non vi fosse misura comune dei due angoli, o dei due archi, pur sarebbe vero il teorema. Per dimostrarlo supponiamo, che nel detto caso il teorema non sia vero, e perciò non esista la proporzione, BAF sta a GON come l'arco BF sta all'arco GN; modificando (§. 123.) questo quarto termine si porrà far sussistere la proporzione: invece dunque dell'arco GN si prenda il minore GR, onde sia la proporzione; BAF sta a GON come BF sta a GR. Si prenda ora un arco BC minore di RN, il quale entri in BF quattro volte; portato sopra GN dovrà essere un punto di divisione S fra R, N. Condotta il raggio OS gli angoli BAF, GOS saranno fra loro come BF a GS, perchè sono nel caso antecedente degli archi misurati da una comune misura.

128. Ora invece di dire BAF sta a GOS come BF sta a GS, si può dire, BAF sta a BF come GOS sta a GS, cioè *il primo termine della proporzione sta al suo terzo come il secondo sta al quarto*; perchè è lo stesso che dire, quattro volte BAC sta a quattro volte BC, come sei volte BAC sta a sei volte BC, (supponendo, che BC entri 6 volte in GS); cioè BAC sta a BC come BAC sta a BC, proporzione, che evidentemente sussiste. Dopo tutto ciò abbiamo, che il quoto di BAF, e BF è uguale al quoto di GOS e GS; e che il quoto di BAF e BF è uguale al quoto di GON e GR: dunque, poichè i quoti di GOS, e GS, e di GON, e GR sono uguali allo stesso quoto di BAF, e BF, saranno uguali fra

loro, onde avremo la proporzione; GOS sta a GS come GON sta a GR, ossia, dicendo come sopra, il primo termine sta al terzo come il secondo sta al quarto, avremo GOS sta a GON, come GS sta a GR; cioè l'angolo minore GOS sta al maggiore GON come l'arco maggiore GS sta al minore GR, ciò che è assurdo: dunque BAF sta a GON come BF sta a GN, cioè gli archi sono come gli archi intercetti fra i loro lati, e descritti collo stesso raggio facendo centro nei loro vertici, abbiano o no gli angoli ed archi una comune misura.

TEOREMA XVIII.

SE FATTO CENTRO AL VERTICE D'UN ANGOLO, CON DIVERSI RAGGI FRA I SUOI LATI SI DESCRIVANO ALTRETTANTI ARCHI, QUESTI SARANNO PARTI DELLA STESSA GRANDEZZA RELATIVAMENTE ALLE LORO CIRCONFERENZE.

129. *Dimostr.* Sia l'angolo BOC (fig. 64.), e coi ragg OB, Ob si descrivano fra i suoi lati gli archi BC, bc, dico, che quella parte, che è BC relativamente alla sua circonferenza BDFA lo è bc rispetto la sua circonferenza bdfa, cosicchè se il primo arco della sua circonferenza è l'ottava parte, come nella figura, anche il secondo è l'ottava parte della sua. Infatti essendo BC l'ottava parte della circonferenza, divisa questa in otto parti BC, CD, DE ec. dal centro O si conducano i raggi OD, OE ec., avremo otto angoli uguali BOC, COD, DOE ec., perchè comprendono archi uguali. Ora essendo uguali gli angoli BOC, COD, DOE ec., ossia bOc, cOd, dOe ec. dovranno essere uguali gli archi intercetti bc, cd, de ec.; e perciò bc sarà l'ottava parte della circonferenza bdfa.

130. *Scolio.* I geometri hanno diviso la circonferenza in 360 parti uguali, che hanno chiamato *gradi*, ogni grado è stato diviso in sessanta parti, che sono state chiamate *primi*,

ogni primo si è diviso in sessanta parti chiamate *secondi*, e così di seguito. Se si dovessero scrivere 70 gradi, 20 primi, 50 secondi ec. si scriverebbe 70°, 20', 50" ec. Recentemente si è divisa la circonferenza in 400 gradi, il grado in 100 primi, il primo in 100 secondi ec.

131. Avendo dimostrato, che gli angoli sono come gli archi intercetti fra i loro lati, e descritti con raggi uguali prendendo i loro vertici per centri, si assumono questi archi a misurare gli angoli, o per dir meglio a valutare gli angoli in uno fisso, quale è l'angolo retto, che è l'angolo unico in valore (§. 19.), ed è il più noto.

132. L'arco (§. 107.) intercetto fra i lati dell'angolo retto è un quadrante, dunque quel che sarà l'arco fra i lati d'un angolo qualunque rispetto il quadrante lo sarà l'angolo stesso rispetto l'angolo retto; si suppone, che il quadrante, e l'arco siano descritti con uguali raggi. Se per esempio l'arco sarà due quinti, tre uudicesimi, venti uoni del quadraute, l'angolo sarà due quinti, tre uudicesimi, venti noni dell'angolo retto.

133. Ammettendo poi, che la circonferenza sia divisa in 360 gradi, l'angolo retto sarà misurato da un arco quarta parte della circonferenza, o da 90 gradi; quindi valutando in gradi l'arco fra un angolo qualunque si divideranno per 90, ed il quoto indicherà la ragione degli archi, e perciò la ragione dell'angolo retto, e dell'angolo proposto, ossia cosa sia quest'angolo rispetto l'angolo retto. Se l'arco fra questo angolo sia gradi 7, o 100 la detta ragione sarà $\frac{7}{90}$ o $\frac{10}{9}$, cioè l'angolo proposto sarà i sette novantesimi dell'angolo retto, ovvero ne sarà i dieci uoni, ossia sarà un retto, ed un nono del retto.

134. Si può avere ancora la ragione fra due angoli qualunque, perchè se l'arco misuratore del primo sia di gradi 20, e quello misuratore il secondo angolo sia di 50, la ragione fra il primo e secondo angolo sarà $\frac{20}{50}$ o $\frac{2}{5}$, cioè

il primo angolo è due quinti del secondo, ed il secondo è cinque mezzi del primo, o due del primo più la sua metà.

135. Nè è necessario, che gli archi fra i lati degli angoli siano descritti cogli stessi raggi, perchè il numero dei gradi sarà sempre lo stesso qualunque arco si descriva fra i lati dell'angolo, purchè si prenda per centro costante il suo vertice. Infatti essendo questi archi (§. 129.) parti dello stesso valore relativamente alle loro circonferenze, le parti uguali dello stesso numero 360 debbono dare lo stesso numero. Se per esempio i detti archi siano la sesta parte delle loro circonferenze, il sesto di 360 gradi sarà costantemente gradi 50.

136. Per misurare gli angoli si usa un semicircolo diviso in 180° parti, che saranno gradi, ed anche in primi. Sia questo semicircolo rappresentato dalla figura 65. Quando si voglia misurare un angolo MNO (fig. 66.) si prende il semicircolo ADB, e posto il centro C in N si contano i gradi del suo arco, che si trova interposto fra i lati NM, NO, e questi sono i gradi, che si prendono per la sua misura.

Dopo ciò ecco alcune proposizioni relative alla misura degli angoli.

137. *L'angolo retto ha per misura 90 gradi.*

138. *L'angolo acuto, che è minore del retto è misurato da meno di 90 gradi, e l'angolo ottuso da più di 90 gradi.*

139. *La somma degli angoli conseguenti valendo due retti vale 180 gradi.*

140. *La somma degli angoli interni posti dalla stessa parte nelle parallele valendo due retti, vale 180° .*

141. *La somma degli angoli d'un triangolo qualunque essendo uguale a due retti vale 180° .* Avendo due triangoli le somme degli angoli, uguali quando due angoli siano uguali a due angoli il terzo dovrà essere uguale al terzo.

142. *Gli angoli d'un triangolo equilatero essendo uguali valgono il terzo di 180 gradi, cioè gradi 60.*

143. *La somma degli angoli d'un poligono essendo uguale a due retti ripetuti nel numero de'suoi lati diminuito di due è uguale a gradi 180 moltiplicati pel numero de'lati meno due.*

144. *La somma degli angoli esterni d'un poligono valendo quattro retti sarà uguale a gradi 360.*

145. *L'angolo iscritto, che è la metà dell'angolo col vertice al centro, e che insiste sul suo arco, ha per misura la metà di questo arco.*

146. *L'angolo fatto da due corde, che si segano dentro il circolo essendo la semisomma dei due angoli coi vertici al centro, ed insistenti l'uno sul suo arco, e l'altro sull'arco del suo angolo verticale ha per misura la semisomma di questi archi.*

147. *L'angolo fatto da due corde prolungate, che si uniscono fuori della circonferenza, che è uguale alla semidifferenza dei due angoli coi vertici al centro, ed insistenti l'uno sull'arco concavo, e l'altro sull'arco convesso è uguale alla semidifferenza di questi archi.*

148. *L'angolo fatto dalla corda e dalla tangente ad un suo estremo essendo la metà dell'angolo col vertice al centro ed insistente sulla corda, o che comprende l'arco da essa sotteso, ha per misura la metà di questo arco.*

149. *L'angolo fatto sulla circonferenza da una corda, e del prolungamento d'un'altra, essendo uguale alla semisomma degli angoli coi vertici al centro, e che comprendono gli archi sottesi delle due corde, è uguale alla semisomma di questi archi.*



PARTE SECONDA

DELLE SUPERFICI.



150. La superficie è una estensione di lunghezza e larghezza senza profondità, e si trova nell'esteriore de' corpi. La superficie o è *piana*, o *curva*. *Superficie piana* si dice quella, sopra la quale in tutti i sensi si può descrivere una linea retta. *Superficie curva* è quella, per niun punto della quale si può condurre una retta, che giaccia sulla superficie stessa.

151. Parleremo in questa seconda parte della geometria delle superfici piane, riservandoci a parlare di alcune superfici curve nella terza parte, nella quale si tratterà dei solidi.

152. Nel nostro trattato delle superfici piane dimostreremo prima i teoremi riguardanti le superfici uguali, inoltre dei più interessanti teoremi, che discendono dai primi.



CAPO PRIMO

DELLE SUPERFICI UGUALI.



TEOREMA I.

DUE PARALLELOGRAMMI; O UN PARALLELOGRAMMO, ED UN RETTANGOLO; O FINALMENTE UN PARALLELOGRAMMO ED UN QUADRATO, CHE INSISTONO SULLA STESSA BASE, E SONO COMPRESI FRA LE STESSO PARALLELLE HANNO SUPERFICI UGUALI.

153. *Dimostr.* Siano i due parallelogrammi ABCG, BFEC (fig. 67.), che abbiano la stessa base BC, e siano compresi fra

le stesse parallele AE, BO . Sia il parallelogrammo $FECB$, ed il rettangolo $AGCB$ (fig. 68.), che abbiano la stessa base BC , e siano compresi fra le parallele AE, BO . Sia finalmente il parallelogrammo $FECB$, ed il quadrato $AGCB$, che abbiano la stessa base BC , e siano compresi fra le parallele AE, BO (fig. 69.); in questi tre casi le due figure della stessa base, e comprese fra le stesse parallele avranno uguali superfici. Faccio la dimostrazione nella fig. 67, che evidentemente varrà per le altre due. I due triangoli ABF , GCE sono coincidenti; poichè il lato AB del primo è uguale al lato GC del secondo, come lati opposti del parallelogrammo $ABCG$; per la stessa ragione il lato BF del primo triangolo è uguale al lato CE del secondo. Essendo poi i lati AG, FE uguali al lato BC , come lato opposto comune ai parallelogrammi, se ad ambedue si aggiungerà la retta GF , sarà il lato AF del primo triangolo uguale al lato GE del secondo: dunque i due detti triangoli, che hanno tutti i lati uguali, sono coincidenti. Si tolga ora il primo triangolo BAF da tutta la figura $ABCE$ rimarrà il parallelogrammo $BFEC$; si tolga il secondo triangolo CGE dalla stessa figura $BAEC$, e si avrà il parallelogrammo $BAGC$: essendosi dunque avuti i due proposti parallelogrammi $ABCG$, $BFEC$ dal togliersi due triangoli uguali da una stessa superficie, i detti parallelogrammi debbono essere uguali.

154. *Scolio.* Potrebbe avvenire, che le due figure proposte nel teorema avessero la disposizione come nella fig. 70; in tal caso la dimostrazione diversifica poco dall'antecedente, perchè si deve ricorrere ai triangoli ABC, EFD , nei quali come sopra AC è uguale ad EF ; BC ad FD , ed AE, BD sono uguali, perchè uguali al comune opposto lato CF . Qui per avere AB uguale ad ED dalle due rette AE, BD si deve togliere BE , onde i due triangoli ABC, EFD sono coincidenti. Si tolgano ora questi triangoli come sopra dalla figura $ACFD$, ed avremo il parallelogrammo $BCFD$ uguale al parallelogrammo $ACFE$.

155. *Coroll. 1.º* Due triangoli ABC, EBC (fig. 67.) insistenti sulla stessa base BC, e compresi fra le parallele AE, BO sono uguali, perchè sono metà (§. 86.) dei parallelogrammi ABCG, BFEC dimostrati uguali.

156. *Coroll. 2.º* Un parallelogrammo AGCB (fig. 67.); un rettangolo AGBC (fig. 68.); un quadrato AGBC (fig. 69.) è doppio del triangolo BCE, che ha la stessa base BC, ed è compreso fra le parallele AE, BO, perchè questo triangolo è metà del parallelogrammo BFEC mostrato uguale al detto parallelogrammo, rettangolo, e quadrato.

TEOREMA II.

SE DUE TRIANGOLI, CHE HANNO LA STESSA BASE, E SONO VOLTI DALLA STESSA PARTE SONO UGUALI, POSSONO ESSERE COMPRESI FRA LE STESSA PARALLELE.

157. *Dimostr.* Siano i due triangoli EAB, ABF aventi la stessa base AB, volti dalla stessa parte E, F, e che siano equivalenti, dimostro, che possono essere compresi fra le parallele DG, AC, l'una, che passa per i loro vertici, l'altra, che è il prolungamento della base comune AB. Se è possibile non sia DG parallela ad AC, si potrà condurre ES parallela ad AC. Si meni AS; i due triangoli AEB, ASB, che hanno la stessa base AB, e sono compresi fra le parallele ES, AC saranno uguali: ma per ipotesi AEB è uguale ad AFB: dunque ASB è uguale ad AFB; cioè la parte uguale al tutto, ciò che è assurdo.

TEOREMA III.

DUE PARALLELOGRAMMI DI UGUALI BASI
E FRA LE STESSA PARALLELE SONO UGUALI.

158. *Dimostr.* Siano i due parallelogrammi BGHC,

DELI (fig. 72.), che abbiano uguali basi GH , IL e siano compresi fra le parallele AE , FM . Si conducano BI , CL , la figura $BCLI$ sarà un parallelogrammo, perchè è un quadrilatero (§. 92.) coi lati BC , IL opposti uguali e paralleli; ma a questo parallelogrammo sono uguali i due $BGHC$, $DILE$, coi quali hanno le basi comuni BC , IL , e sono compresi fra le stesse parallele AE , FM : dunque questi due $BGHC$, $ILED$ sono uguali.

159. *Coroll.* Due triangoli di uguali basi, e compresi fra le parallele sono uguali. Tali sono i due triangoli BGH , IEL (fig. 72.). Questi sono uguali, perchè sono metà dei parallelogrammi $BGHC$, $DILE$ dimostrati uguali.

160. *Scolio.* L'altezza d'un parallelogrammo è la normale fra due lati opposti prolungati o ambedue, o uno se bisogna, e si prende uno di questi lati per base. Quindi le altezze de'due parallelogrammi (fig. 72.) $BGHC$, $IDEL$, prendendo i lati GH , IL per basi, sono NO , EM ; ove si vede, che nel secondo essendosi voluto calare la normale da E sopra IL , questo lato si è dovuto prolungare in S .

161. L'altezza d'un triangolo è la normale calata dal vertice d'un angolo sul lato opposto prolungato se bisogna; e questo lato si prende per base. Così prendendo per base IL nel triangolo IEL (fig. 72.), la sua altezza è EM . Da ciò si vede, che nel rettangolo prendendo per base un suo lato qualunque, la sua altezza è uno dei lati non paralleli ad esso. Così nel rettangolo $ABCG$ (fig. 68.) prendendo BC per base la sua altezza è AB o GC , perchè ambedue sono due normali calate sopra BC dal lato opposto AG . Nel triangolo rettangolo se si prende un cateto per base l'altezza è l'altro cateto. Così nel triangolo rettangolo LEM (fig. 72.), se si vuole, che LM sia la base, EM sarà l'altezza.

162. Posto tutto ciò nei teoremi (§. 153, 155, 156, 158, 159.) si vede, che invece di dire i parallelogrammi, i rettangoli, i triangoli compresi fra le stesse parallele si

può dire parallelogrammi, rettangoli, e triangoli di uguali altezze. In fatti essendo i due parallelogrammi BGHC, DILE (fig. 72.) compresi fra le parallele AE, FM, le loro altezze NO, EM, che sono le normali fra queste parallele (§. 69.) sono uguali. Lo stesso si dica dei due triangoli BGH, EIL, essendo compresi fra le parallele AE, FM, le loro altezze BR, EM sono uguali, perchè normali fra parallele. Ciò premesso i teoremi dimostrati si potranno enunciare così.

163. *Due parallelogrammi, o un parallelogrammo ed un rettangolo, o un parallelogrammo, ed un quadrato di uguali basi, e di uguali altezze sono uguali.*

164. *Un parallelogrammo, o un rettangolo, o un quadrato, che abbia base, ed altezza uguale alla base ed altezza d'un triangolo, è doppio di questo.*

165. *Due triangoli di uguali basi, e di uguali altezze sono uguali.*

TEOREMA IV.

SE IN UN QUADRATO ACGE (fig. 73.) SI PRENDANO LE QUATTRO PARTI AB, CH, GF, DE UGUALI, E SI CONGIUNGANO I QUATTRO PUNTI B, H, F, D COLLE RETTE BH, HF, DF, BD, IL QUADRILATERO BHFD SARA' UN QUADRATO.

166. *Dimostr.* Per dimostrare il teorema si deve mostrare, che i quattro lati del quadrilatero sono uguali, e che i quattro angoli ABH, BHF, HFD, FDB sono retti. Ciò viene da che i quattro triangoli rettangoli RCH, HFG, FED, DAB sono coincidenti. Infatti i lati AB, CH, GF, ED sono le quattro parti uguali prese nei quattro lati del quadrato ACGE: dunque anche gli altri lati BC, HG, FE, AD, che sono i residui dal togliersi le dette quattro parti uguali dai lati del quadrato, saranno uguali: dunque i detti quattro triangoli rettangoli hanno uguali i lati intorno agli angoli retti. Essendo coincidenti questi trian-

goli saranno uguali le ipotenuse BH , HF , FD ; DB . Per la stessa coincidenza dei triangoli BCH , HFG saranno uguali gli angoli HBC , FHG opposti ai cateti uguali CH , FG : ma HBC unito a BHC dà un retto (§. 74.): dunque anche FHG unito a BHC darà un retto: ora i tre angoli BHC , BHF , FHG insieme (§. 22.) danno due retti; dunque poichè BHC , ed FHG danno un retto, dovrà essere retto l'angolo BHF . Nello stesso modo si proveranno retti gli angoli DBH , BDF , DFH : dunque il quadrilatero $DBHF$ ha tutti i lati uguali, e tutti gli angoli retti, è dunque un quadrato.

TEOREMA V.

IL QUADRATO FATTO SULL'IPOTENUSA È UGUALE ALLA
SOMMA DEI QUADRATI FATTI SOPRA I CATETI.

167. *Dimostr.* Sia il triangolo BAC rettangolo in A (fig. 74.); si formino i quadrati $ABDE$, $ACGF$ sopra i cateti BA , AC ; dico, che la somma di questi quadrati è uguale al quadrato costruito sopra l'ipotenusa BC . Si prolunghino DE , FG sino al loro incontro in H ; e si prolunghino DB , GC finchè s'incontrino in I ; il quadrilatero $DIGH$ sarà un quadrato. Infatti i quadrilateri $BACI$, $AEHF$ sono due rettangoli uguali. Sono parallelogrammi, perchè nel quadrilatero $BACI$ i lati BI , AC sono normali sopra BA , quindi sono parallelli, ed i lati AB , CI sono normali sopra AC . Nella stessa maniera si dimostra, che sono parallelli i lati opposti del quadrilatero $EAFH$. Hanno poi questi gli angoli retti. Infatti nel primo gli angoli IBA , BAC , ACI sono retti; dunque (§. 82.) sarà retto il quarto I . Nello stesso modo si proveranno retti gli angoli di $AEHF$. Dopo ciò nel quadrilatero $DIGH$ i quattro angoli D , I , G , H sono retti, e perciò è un rettangolo. Le linee BI , CG sono uguali, perchè sono lati del quadrato $ACGF$; l'altre due DB , IC sono uguali, perchè lati del quadrato

DBAE : quindi la somma delle due parti DB, BI è uguale alla somma delle due parti CG, CI ; perciò il lato DI è uguale al lato IG ; i lati opposti nel rettangolo sono uguali : dunque nel rettangolo DIGH i quattro lati sono uguali ; perciò è un quadrato. I due rettangoli poi BACI, AEHF sono uguali, perchè i lati BA, AC dell'uno come lati dei due quadrati ABDE, ACGF sono uguali ai lati AE, AF dell' altro, perchè lati degli stessi quadrati. Si prendano ora le parti GN, HM uguali alle due uguali BD, CI, e si conducano le linee CN, NM, MB, avremo il caso del (§. 166.); dunque il quadrilatero BMNC è un quadrato costruito sulla ipotenusa BC. I due rettangoli BICA, EAFH uguali, sono, presi insieme, uguali ai quattro triangoli uguali BIC, CNG, MIIN, BDM, perchè uno di questi BIC è la metà di BACI, che è uno dei detti rettangoli. Ciò essendo, tanto sarà togliere da tutto il quadrato DIGH i due rettangoli BICA, GAFH, tanto i quattro triangoli BIC, CNG, NHM, MDB : ma togliendo i due rettangoli abbiamo i due quadrati BDEA, ACGF fatti sopra i cateti BA, AC ; e togliendo i quattro triangoli abbiamo il quadrato BMNC fatto sulla ipotenusa BC : dunque nel triangolo rettangolo il quadrato fatto sulla ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati fatti sopra i cateti.

TEOREMA VI.

SE IN UN TRIANGOLO IL QUADRATO FATTO SOPRA UN LATO È UGUALE ALLA SOMMA DEI QUADRATI FATTI SOPRA GLI ALTRI DUE, L'ANGOLO OPPOSTO AL PRIMO LATO SARA' RETTO, E PERCIÒ IL TRIANGOLO SARA' TRIANGOLO RETTANGOLO.

168. *Dimostr.* Sia il triangolo ABC (fig. 75.), nel quale il quadrato sopra AC sia uguale alla somma dei quadrati sopra AB, BC; dico, che l'angolo ABC è retto. Si alzi dal punto B sopra AB la normale BD, si faccia BD uguale a

BC, e si conduca AD. Essendo il triangolo ADB rettangolo in B, il quadrato sopra AD sarà uguale alla somma dei quadrati sopra AB, e BD, o perchè DB è uguale a BC, il quadrato sopra AD sarà uguale alla somma dei quadrati sopra AB, e BC: ma questa somma di quadrati per ipotesi è uguale al quadrato sopra AC: dunque il quadrato sopra AD è uguale al quadrato sopra AC, ossia il lato AD è uguale al lato AC: dunque i due triangoli ABD, ABC, che hanno tutti i lati rispettivamente uguali sono coincidenti, e perciò l'angolo DBA sarà uguale all'angolo ABC: ma per costruzione l'angolo DBA è retto, dunque sarà retto anche ABC.



CAPO SECONDO

DELLE RELAZIONI DEI QUADRATI,
E DEI RETTANGOLI FATTI IN DATE RETTE,
E NELLE LORO PARTI.



TEOREMA VII.

SE UNA RETTA AC SI DIVIDE COMUNQUE IN B, IL QUADRATO FATTO SULL'INTERA RETTA AC È UGUALE ALLA SOMMA DEI QUADRATI FATTI SULLE PARTI AB, BC PIÙ DUE VOLTE IL RETTANGOLO FATTO PRENDENDO PER BASE, E PER ALTEZZA LE PARTI STESSE AB, BC.

169. *Dimostr.* Si costruisca il quadrato ACEG sopra AC, si conduca la diagonale CG, da B si conduca BF parallela ad AG, che si segnerà in un punto I colla diagonale, e per questo punto I si meni HD parallela a GE; i quadrilateri HIFG, BIDC saranno rettangoli, perchè

evidentemente hanno tutti gli angoli retti: ma sono quadrati perchè hanno i lati uguali. Infatti nel triangolo GAC i lati AG, AC essendo uguali sono uguali gli angoli AGC, ACG: ma per le parallele l'angolo ACG interno è uguale all'esterno ed opposto HIG: dunque nel triangolo HGI gli angoli HIG, HGI sono uguali, e perciò sono uguali i lati HG, HI: ma nel rettangolo i lati opposti sono uguali: dunque sono uguali i quattro lati del rettangolo HGFI, e perciò è un quadrato. Per la stessa ragione BIDC è un quadrato: dunque GHIF, IBCD sono due quadrati fatti sulle due parti AB, BC di AC. I due rettangoli ABIH, FIDE sono uguali, perchè i lati BI, IH dell'uno, lati dei due quadrati BIDC, HIFG, sono uguali ai lati ID, IF dell'altro: ora ognuno di questi rettangoli è fatto da due lati dei due detti quadrati, cioè dalle due parti AB, BC della data retta, dunque la somma dei due rettangoli è due volte un rettangolo fatto colle due parti della retta proposta. Ma il quadrato ACEG fatto sull'intera retta si compone dei due detti quadrati BIDC, IHGF, e del doppio rettangolo fatto dalle due parti AB, BC della retta, dunque il quadrato fatto sulla retta data è uguale alla somma dei quadrati fatti sulle sue due parti più il doppio rettangolo fatto dalle parti stesse.

TEOREMA VIII.

DIVISA UNA RETTA AB (fig. 77.) COMUNQUE IN UN PUNTO C, IL QUADRATO DELL'INTERA RETTA AGGIUNTO AL QUADRATO SOPRA UNA PARTE CB È UGUALE A DUE VOLTE IL RETTANGOLO FATTO DALL'INTERA RETTA AB, E DALLA PARTE STESSA CB AGGIUNTO AL QUADRATO DELL'ALTRA PARTE AC.

170. *Dimostr.* Si formi il quadrato ABDE sopra AB, si conduca la diagonale BE, dal punto di divisione C si conduca CF parallela a DB, che segandosi in G colla dia-

gonale, per G si conduca HL parallela a BA. Si prolunghi FC al di sopra di C finchè CI sia uguale a CB, e si compisca il quadrato CIKB. Per la dimostrazione superiore (§. 169.) i rettangoli HGFE, CGLB sono quadrati, e perciò questo secondo CGLB sarà uguale al quadrato CIKB; ed i due rettangoli ACGH, GLDF sono uguali. Ora il rettangolo AHLB è rettangolo fatto da AB, e BL o BC; e se a GFDL si aggiunge il quadrato CGLB, o il quadrato CIKB, avremo un altro rettangolo fatto da AB, CB: dunque due volte il rettangolo AB, BC ci dà la superficie ABDFGH più il quadrato CIKB fatto sulla parte CB: aggiungendo ad ambedue il quadrato HGFE fatto sulla parte AC, il quadrato HGFE più la superficie ABDFGH ossia tutto il quadrato ABDE più il quadrato fatto sopra BC sarà uguale a due volte il rettangolo fatto da AB, BC più il quadrato sopra l'altra parte AC.

TEOREMA IX.

SE UNA RETTA AC (fig. 78.) SI DIVIDE PER META' IN B, E COMUNQUE IN D, IL QUADRATO SULLA META' DELLA RETTA EQUIVALE AL RETTANGOLO FATTO COLLE DUE PARTI DISUGUALI AD, DC AGGIUNTO AL QUADRATO FATTO SULLA PARTE INTERCETTA BD.

171. *Dimostr.* Si faccia il quadrato BCEF sulla metà BC della data retta, si conduca la diagonale CF; da D si conduca la retta DH parallela a CE, che segandosi in G colla diagonale, per G si conduca LI parallela ad FE. Prolungando poi LI dalla parte K si compia il rettangolo ABLK. È evidente, che il quadrato BCEF si compone del rettangolo BLGD, e del rettangolo DCEH, e del quadrato LGHF. Ora i due rettangoli BLGD, DCEH sono gli stessi, che i due rettangoli BLGD, ABLK, o tutto il rettangolo ADGK, cioè il rettangolo fatto dalle due parti disuguali

AD, DC, perchè DC è uguale a DG. Inoltre il quadrato LGHF è il quadrato fatto sulla parte intermedia BD: dunque il quadrato BCEF fatto sulla metà BC della retta data è uguale al rettangolo fatto da AD, DC più il quadrato fatto sulla retta intercetta BD.

TEOREMA X.

SE UNA RETTA AC (fig. 79.) SI DIVIDE IN MEZZO IN S, E GLI SI AGGIUNGE PER DRIITTO UNA RETTA QUALUNQUE CD, IL QUADRATO FATTO SULLA RETTA BD COMPOSTA DELLA METÀ DELLA DATA AC, E DELL' AGGIUNTA CD, EQUIVALE AL RETTANGOLO FATTO DALLA TOTAL RETTA AD, E DALLA PARTE AGGIUNTA CD PIÙ IL QUADRATO FATTO SULLA METÀ BC.

172. *Dimostr.* Si formi il quadrato BFHD sulla retta BD, si conduca la diagonale DF, da C si conduca CE parallela a DH, che segandosi in I colla diagonale, per I si conduca LG, parallela a BD; prolungata questa verso K si compia il rettangolo ABLK. È evidente, che i tre rettangoli ABLK, BCIL, IGHE sono uguali. Ora il quadrato BDHF si compone delli due rettangoli BDGL, GHEI, e del quadrato LIEF. Ora invece del rettangolo IGHE si può porre il suo uguale ABLK: dunque il detto quadrato si compone dei due rettangoli BDGL, ABLK, o di tutto il rettangolo ADGK, e del quadrato LIEF: ma il detto rettangolo è formato da AD, e DG, o da AD, e DI, cioè da tutta la retta e la parte aggiunta; ed il quadrato LIEF è il quadrato fatto sulla BC metà di AC: dunque il quadrato BDHF fatto sulla metà della retta data, e la parte aggiunta è uguale al rettangolo fatto dall'intera retta DA, e la parte aggiunta DC più il quadrato fatto sulla metà BC della proposta retta AC.

TEOREMA XI.

IN UN TRIANGOLO OTTUSANGOLO IL QUADRATO SUL LATO OPPOSTO ALL'ANGOLO OTTUSO SUPERA LA SOMMA DEI QUADRATI FATTI SOPRA GLI ALTRI DUE LATI DI DUE VOLTE IL RETTANGOLO FATTO DA UNO DI QUESTI DUE LATI PRESO COME BASE, ED IL PROLUNGAMENTO DI QUESTO LATO FINO ALLA NORMALE CALATA DAL VERTICE DELL'ANGOLO OPPOSTO.

173. *Dimostr.* Si deve dimostrare, che il quadrato sul lato AC (fig. 80.) opposto all'angolo ottuso ABC supera la somma dei quadrati sugli altri due lati AB, CB di due volte il rettangolo fatto da AB, lato preso per base, e BD prolungamento del detto lato fino al piede D della normale CD calata dal vertice dell'angolo opposto. Pel (§. 169.) abbiamo, che il quadrato sopra AD è uguale alla somma dei quadrati sopra AB, BD più due volte il rettangolo fatto da AB, BD: aggiungendo a queste due quantità uguali la stessa quantità, cioè il quadrato sulla normale CD, il quadrato sopra AD più il quadrato sopra CD sarà uguale al quadrato sopra AB, più il quadrato sopra BD, più il quadrato sopra CD, più due volte il rettangolo fatto da AB, BD: ma la somma dei quadrati sopra AD, CD è il quadrato sull'ipotenusa (§. 167.) CA, e la somma dei quadrati sopra i cateti BD, CD è il quadrato sulla ipotenusa CB: dunque il quadrato sopra CA è uguale alli quadrati sopra AB, CB più due volte il rettangolo fatto da AB, BD; dunque veramente il quadrato sul lato AC opposto all'angolo ottuso ABC è la somma dei quadrati sugli altri due lati AB, BC, se a questi si aggiunga due volte il rettangolo di AB, BD; dunque il primo quadrato è maggiore della somma degli altri due di due volte il detto rettangolo.

TEOREMA XII.

IL QUADRATO SOPRA IL LATO AD (fig. 81.) OPPOSTO ALL'ANGOLO ACUTO C È MINORE DELLA SOMMA DEGLI ALTRI DUE QUADRATI SOPRA I DUE LATI AC, CD DI DUE VOLTE IL RETTANGOLO FATTO DAL LATO AC PRESO PER BASE, E LA SUA PARTE BC COMPRESA FRA IL VERTICE DEL DETTO ANGOLO C, ED IL PIEDE B DELLA NORMALE DB.

174. *Dimostr.* Nella retta AC divisa comunque in B abbiamo (§. 170.), che il quadrato della parte AB più due volte il rettangolo di tutta AC, e l'altra parte BC è uguale al quadrato di AC più il quadrato di BC. Aggiungendo a queste due quantità uguali il quadrato della normale DB, il quadrato di AB più il quadrato di BD più due volte il rettangolo AC, e BC sarà uguale ai quadrati di AC, di BC, di BD: ma invece dei due quadrati sopra AB, BD si può porre il quadrato di AD, ed invece dei due quadrati sopra BC, e BD si può porre il quadrato sopra DC; dunque il quadrato sopra AD più due volte il rettangolo fatto da AC, BC è uguale alla somma dei quadrati sopra AC, DC, cioè si deve aggiungere al quadrato sopra AD due volte il rettangolo di AC, BC per avere i quadrati degli altri due lati AC, CD, quindi il quadrato sopra AD opposto all'angolo acuto è minore delli quadrati degli altri due lati del detto doppio rettangolo.

175. Una retta DE (fig. 82.) si dice *essere divisa in media ed estrema ragione* in G se il rettangolo fatto dalla retta intera ED, e la parte minore CD è uguale al quadrato fatto sulla parte maggiore EG.

TEOREMA XIII.

SE SI FACCIA IL QUADRATO EDCA SOPRA ED (fig. 82.), SI DIVIDA EA IN MEZZO IN F, SI PROLUNGI FE FINCHÈ FH SIA UGUALE AD FD, E CON E SI COMPIA IL QUADRATO EHIG, CON QUESTO SARA' NOTATO IL PUNTO G, CHE DIVIDE LA RETTA ED IN MEDIA ED ESTREMA RAGIONE.

176. *Dimostr.* Si conduca FD, e si prolunghi IG finché

incontri AC in B. Essendo GB uguale ad EA, o ED il rettangolo GDCB sarà il rettangolo fatto dalla retta data ED, e la parte sua minore GD; si deve dunque dimostrare, che questo rettangolo è uguale al quadrato EHIG fatto sulla parte maggiore EG. A questo fine si rifletta, che la retta EA è divisa in mezzo in F, e gli si è aggiunta la parte EH: dunque (§. 172.) il rettangolo fatto da AH, ed EH più il quadrato fatto sopra EF è uguale al quadrato sopra FH, o sopra l' uguale FD: ma invece del quadrato dell'ipotenusa FD si può porre la somma dei quadrati dei cateti EF, ED: dunque il rettangolo di AH, EH più il quadrato di EF è uguale alla somma dei quadrati di EF, e di ED, e togliendo il quadrato comune di EF, il rettangolo di AH, EH sarà uguale al quadrato di ED: ossia il rettangolo AHIB è uguale al quadrato EDCA, e togliendo ad ambedue il rettangolo EGBA, sarà il quadrato EHIG uguale al rettangolo GDCB.

TEOREMA XIV.

SEGNANDOSI IN UN CIRCOLO DUE CORDE AB, EG, (fig. 83.) IL RETTANGOLO FATTO DALLE DUE PARTI AF, FE DI UNA È UGUALE AL RETTANGOLO FATTO DALLE DUE PARTI OF, FE DELL'ALTRA.

177. *Dimostr.* Si conducano dal centro C le normali CD, CH, che divideranno (§. 111.) in mezzo le corde sulle quali cadono. La retta AB essendo divisa in mezzo in D, e comunque in F ci dà (§. 171.), che il quadrato fatto sulla metà DB è uguale al rettangolo fatto da AF, FB più il quadrato di DF. Aggiungendo a queste grandezze uguali il quadrato di CD, la somma dei quadrati di DB, DC sarà uguale alla somma dei quadrati di DF, e di DC più il rettangolo di AF, FB: ma invece dei due primi quadrati si può porre il quadrato dell'ipotenusa CB, ed invece dei secondi quadrati si può porre il quadrato di CF, dunque il quadrato di

CB è uguale al quadrato di CF più il rettangolo di AF, FB. Per l'altra corda EG si avrà, che il quadrato di CE è uguale al quadrato di CF più il rettangolo di FG, FE; poichè dunque tanto il quadrato di CF unito al rettangolo di AF, AB; quanto il quadrato di CF unito al rettangolo di GF, FE danno il quadrato del raggio, la prima grandezza sarà uguale alla seconda, e togliendo il quadrato comune di CF, sarà il rettangolo di AF, FB uguale al rettangolo di GF, FE.

178. *Coroll.* Sia la corda BE (fig. 84.) normale al diametro AD, sarà BC uguale a CE: dunque il rettangolo di BC, CE è il quadrato di BC, perchè il rettangolo diventa quadrato quando due lati contigui, ossia la base, e l'altezza diventano uguali. Dunque avremo, che da un punto qualunque B della circonferenza calata una normale BC sul diametro, il quadrato fatto su questa normale è uguale al rettangolo fatto dai segmenti AC, CD del diametro.

179. *Scolio.* Se le corde si segassero al centro, nel qual caso la costruzione, e dimostrazione (§. 177.) non vale più, il teorema, che i rettangoli fatti dalle parti nelle quali si spezzano sono uguali si dimostra subito, perchè le quattro parti sono quattro raggi; ed il rettangolo o quadrato fatto da due raggi è uguale al quadrato fatto con due altri raggi dello stesso circolo.

TEOREMA XV.

SE IN UN CIRCOLO SI CONDUCE LA TANGENTE BA (fig. 85.) E DA UN PUNTO B DI ESSA LA SECANTE BH DEL CIRCOLO STESSO, IL RETTANGOLO FATTO DA QUESTA SECANTE, E LA SUA PARTE ESTERNA BC È UGUALE AL QUADRATO SULLA TANGENTE BA.

180. *Dimostr.* Dal centro F si conduca sulla secante la normale EF, ed i raggi FA, FC; per la normale FE la corda CH è divisa in mezzo in E, e ad essa si è aggiunta la parte CB: dunque (§. 172.) il quadrato sopra EB è

uguale al rettangolo fatto da HB, BC più il quadrato sopra EC : aggiungendo a queste due grandezze uguali il quadrato di EF, la somma dei due quadrati sopra EB, EF sarà uguale alla somma dei due quadrati sopra EC, EF più il rettangolo di BH, BC : ma la prima somma di quadrati è uguale al quadrato di FB, e l'altra somma è uguale al quadrato di FC, o di FA : dunque il quadrato di FB è uguale al quadrato di FA più il rettangolo di HB, BC : ma invece del quadrato di BF si può porre la somma dei quadrati dei due cateti BA, FA : dunque la somma dei quadrati di AB, FA è uguale al quadrato di FA, più il rettangolo di HB, BC ; e togliendo il comun quadrato di FA avremo, che il quadrato di BA è uguale al rettangolo di BH, BC, lo che si doveva dimostrare.

181. *Coroll.* Se un numero qualunque di secanti BH, BG, BM si uniscono fuori del circolo in un punto B, i rettangoli fatti dalle intere secanti, e dalle loro parti esterne sono uguali, perchè tutti sono uguali al quadrato della tangente BA, che va al punto comune B.

182. *Scolio.* Se la secante DE (fig. 86.) passa pel centro, nel qual caso non si può fare la costruzione antecedente, si conduca il raggio BA, sarà il quadrato (§. 172.) di BD uguale al rettangolo di ED, DC più il quadrato di BC, o di BA, e ponendo invece del quadrato di BD la somma dei quadrati de' due cateti BA, AD, avremo la somma dei quadrati di BA, AD uguale al quadrato di BA più il rettangolo di ED, DC; e togliendo il comun quadrato di BA sarà il quadrato di DA uguale al rettangolo di DE, DC.

CAPO TERZO

DELLE RETTE, E SUPERFICI PROPORZIONALI



Per brevità di qui in poi esprimeremo le proporzioni così. Se i due triangoli ABF, GPO (fig. 87.) sono fra loro come le basi AF, GO cosicchè si dica ABF sta a GPO come AF sta a GO, questa proporzione si scriverà $ABF : GPO = AF : GO$, e si legge come ora si è enunciata. E con ragione, perchè l'espressione ABF sta a GPO come AF sta a GO vuol dire (§. 121.), che il quoto di ABF diviso per GPO è uguale al quoto di AF diviso per GP : ora il segno della divisione sono i due punti verticali scritti fra le grandezze, che si dividono, ed il segno $=$ è segno d'uguaglianza.

TEOREMA XVI.

LE SUPERFICI DI DUE TRIANGOLI DI UGUALI
ALTEZZE SONO FRA LORO COME LE BASI.

183. *Dimostr.* Siano i due triangoli BAF, GPO (fig. 87.) che abbiano uguali altezze; dico che sono fra loro come le basi, ossia che si avrà la proporzione $ABF : GPO = AF : GO$. Supponiamo, che le basi AF, GO siano come 4 a 6, ossia, (§. 124.), che divisa AF in quattro parti uguali ad AC, questa entri sei volte in GO; fatte queste divisioni, dai vertici B, P ai punti C, D ec. della base di un triangolo, ed ai punti H, I ec. della base dell' altro si conducano le rette BC, BD ec. PH, PI ec., avremo tanti triangoli ABC, CBD ec. GPH, HPI ec. di uguali basi, e di uguali altezze, che sono le altezze dei due triangoli, cioè le normali calate dai comuni vertici B, P sulle rette AF, GO, sulle quali insistono. Ora di questi triangoli uguali contenendone quattro il trian-

golo ABF, e sei il triangolo GPO, questi triangoli saranno fra loro come 4 a 6; ma questa è la ragione delle due basi AF, GO, dunque le superfici dei due triangoli sono come le basi.

184. *Scolio.* Se le due basi non avessero comune misura, pure, essendo i triangoli di uguali altezze, le loro superfici sono come le basi. Se è possibile nel detto caso non esista la proporzione (fig. 88.) $ADC : EGF = AC : EF$, modificando un suo termine (§. 123.) sussisterà. Si supponga, che sussista ponendo invece di AC una linea minore AB, onde si abbia la proporzione $ADC : FGE = AB : EF$. Si prenda una misura minore di BC, che entri esattamente in EF; portata questa sopra AC, e notate su di questa le parti uguali alla detta misura, vi sarà una divisione fra B, e C; si supponga, che questa sia I, e si conduca DI. Essendo le basi AI, EF dei due triangoli ADI, EGF misurate da una comune misura avremo la proporzione $ADI : EGF = AI : EF$, della quale abbiamo (§. 128.) ancora $ADI : AI = EGF : EF$: ma abbiamo per ipotesi $ADC : EGF = AB : EF$, ossia $ADC : AB = EGF : EF$: dunque abbiamo due proporzioni nelle quali è comune il rapporto di EGF : EF: dunque la ragione ADI : AI, è uguale alla ragione ADC : AB; perciò avremo la proporzione $ADI : AI = ADC : AB$, ossia $ADI : ADC = AI : AB$; ma ciò è assurdo, perchè essendo ADI minore di ADC, contrariamente AI è maggiore di AB: (§. 122.) dunque comunque fra loro siano le basi di due triangoli di uguali altezze, le loro superfici sono come le basi.

185. *Coroll.* I parallelogrammi di uguali altezze sono come le loro basi. I due parallelogrammi BCHG, DILE (fig. 72.) abbiano basi qualunque GH, IL, ma uguali altezze NO, EM. I triangoli BGH, EIL sono metà di questi parallelogrammi, ed hanno le stesse loro basi ed altezze: dunque sono due triangoli di uguali altezze, sono perciò fra loro come le loro basi: dunque i parallelogrammi doppi dei triangoli sono come queste basi, che sono le loro.

TEOREMA XVII.

I TRIANGOLI DI UGUALI BASI SONO COME
LE LORO ALTEZZE.

186. *Dimostr.* Siano i triangoli ADC, FEH (fig. 89.) di uguali basi AC, FH; dico, che le loro superfici sono come le loro altezze. Sopra la retta IL uguale a ciascuna delle due basi si elevi LO normale, ed in essa si prenda la parte LN uguale a DB, ed LM uguale ad EG: condotte IN, IM, i due triangoli INL, IML hanno uguali basi, ed uguali altezze coi triangoli ADC, FEH; dunque le superfici dei primi sono uguali alle superfici di questi; ora i due triangoli INL, IML hanno la stessa altezza IL, perchè nei triangoli rettangoli si può prendere uno dei due cateti per altezza (§. 161.), dunque le loro superfici sono fra loro come le basi NL, ML: cioè si avrà $INL : IML = LN : LM$: ma invece di INL, IML si pongano i triangoli ADC, FEH, ed in luogo di LN, LM si pongano DB, EG, ed avremo $ADC : FEH = BD : EG$.

187. *Coroll.* Due parallelogrammi di uguali basi sono come le loro altezze, perchè condotte come sopra (§. 185.) le diagonali sorgono triangoli metà dei parallelogrammi, che hanno uguali le altezze, e basi a quelle dei due parallelogrammi: dunque questi triangoli essendo come le altezze, anche i parallelogrammi doppi dei triangoli saranno come le loro altezze.

188. *Scolio.* Quello che si è detto dei parallelogrammi si dica dei rettangoli, e dei quadrati, che sono casi particolari dei parallelogrammi stessi.

TEOREMA XVIII.

SE DUE PARALLELOGRAMMI (fig. 90.) GDEH, CDBA AVENDO GLI ANGOLI UGUALI GDE, CDB SONO EQUIVALENTI, I LATI INTORNO A QUESTI ANGOLI DARANNO LA PROPORZIONE

$$DE : DC = DB : DG, \text{ E VICEVERSA.}$$

189. *Dimostr.* Si dispongano i detti due parallelogrammi come nella figura, in guisa cioè, che DC sia per diritto con DE, e DB con DG, ciò che si potrà ottenere potendo essere verticali i due angoli uguali GDE, CDB. Fatto ciò si prolunghino i lati HG, AC fino all'incontro in F. I due parallelogrammi HGDE, DGFC hanno uguali altezze, dunque il rapporto delle loro superfici deve essere quello delle basi DE, DC. Per la stessa ragione il rapporto delle superfici dei parallelogrammi BDCA, DGFC è quello delle loro basi DB, DG: ma il rapporto di HGDE a DGFC è uguale al rapporto di BDCA a DGFC, perchè formati di termini uguali: dunque il rapporto di DE a DC è uguale al rapporto di DB a DG, ossia si ha la proporzione $DE : DC = DB : DG$.

190. *Scolio 1.º* I lati intorno ad un angolo di uno dei due parallelogrammi nella figura si corrispondono, perchè sono in uno stesso parallelogrammo, ed intorno allo stesso angolo: ma nella proporzione superiore non si corrispondono nei termini della proporzione, perchè in essa non si dice DE lato del parallelogrammo DEHG sta CD lato del parallelogrammo CDBA come DG altro lato del primo parallelogrammo sta a DB altro del secondo, con che per antecedenti e per conseguenti dei due rapporti si avrebbero i lati d'uno stesso parallelogrammo, ma vi è un rovescio, perchè la proporzione dice, un lato del primo parallelogrammo sta ad un lato del secondo, come altro lato di questo secondo sta ad altro lato del primo.

191. Se fosse la proporzione nel primo modo si direbbe,

che i lati intorno agli angoli uguali di due parallelogrammi equivalenti sono fra loro *in ragione diretta*: ma nella seconda proporzione si dice, che i detti lati sono fra loro *in ragione inversa*.

192. In genere ogni volta, che due quantità geometriche corrispondendo rispettivamente di loro natura a due altre, non si corrispondono nei posti della proporzione, cioè che le corrispondenti non siano o antecedenti, o conseguenti dei due rapporti, si dice, che le due *prime quantità sono in ragione inversa delle due altre, o inversamente proporzionali a queste*.

193. *Scolio 2.º* Si deve avvertire, che sussiste l'inverso del nostro teorema; cioè se i lati intorno a due angoli uguali in due parallelogrammi sono inversamente proporzionali, i due parallelogrammi sono equivalenti. Basta per ciò richiamare le due proporzioni superiori $HGDE : GFCD = DE : DC$; $BDCA : GFCD = BD : DG$. Ora se esiste la proporzione $DE : DC = BD : DG$ la seconda ragione nella prima proporzione sarà uguale alla seconda ragione nella seconda proporzione; perciò le due prime ragioni di ambedue le proporzioni debbono essere uguali, cioè il quoto di $HGDE$ diviso per $GFCD$ deve essere uguale al quoto di $BDCA$ diviso per $GFCD$: ma il divisore $GFCD$ è comune, dunque i dividendi $HGDE$, $BDCA$ debbono essere uguali fra loro per dare lo stesso quoto.

TEOREMA XIX.

IN DUE TRIANGOLI EQUIVALENTI, E CON UN ANGOLO UGUALE,
I LATI INTORNO AGLI ANGOLI UGUALI SONO INVERSAMENTE
PROPORZIONALI, E VICEVERSA.

194. *Dimostr.* Siano i due triangoli DGE , DCB (fig. 90.) equivalenti, e cogli angoli uguali GDE , CDB . I due triangoli GDE , GDC hanno la stessa altezza, che è la normale calata dal comun vertice G sulla retta CE , sulla quale am-

bedue insistono ; dunque (§. 183.) sono tra loro come le basi DE , DC , cioè si ha $DGE : DGC = DE : DC$. Parimenti i triangoli BDC , DGC ci danno $BDC : DGC = BD : DG$: i primi rapporti di queste due proporzioni sono uguali, dunque sono uguali i secondi, e perciò $DE : DC = BD : DG$. L'inverso è come nel caso antecedente (§. 193.).

TEOREMA XX.

SE QUATTRO RETTE (fig. 91.) A , B , C , D SONO IN PROPORZIONE CIOÈ SIA $A : B = C : D$, IL RETTANGOLO FATTO DAI TERMINI ESTREMI A , D È UGUALE AL RETTANGOLO FATTO DALLI DUE MEDI B , C ; E VICEVERSA.

195. *Dimostr.* Se colle rette A , D , prendendo una per base, e l'altra per altezza si faccia un rettangolo, ed allo stesso modo un rettangolo si faccia colle rette B , C ; le rette A , D saranno i lati intorno all'angolo retto in un rettangolo, e le B , C saranno i lati intorno all'angolo retto dell'altro, ed i due primi lati sono in ragione inversa degli altri due non corrispondendosi nei termini della proporzione : ma quando ciò avvenga (§. 193.), i due rettangoli sono uguali; e quando questi sono uguali, i lati intorno agli angoli retti sono inversamente proporzionali; dunque quando si abbia $A : B = C : D$, il rettangolo fatto da A , e D deve essere uguale al rettangolo fatto da B , C ; e viceversa se questi rettangoli sono uguali deve esistere la proporzione $A : B = C : D$, in cui i lati A , D sono i lati intorno ad un angolo retto in un rettangolo, e B , C sono intorno all'angolo retto dell'altro.

196. *Coroll.* 1.º Se la retta B fosse uguale a C il rettangolo fatto da B , C sarebbe un quadrato fatto sopra B ; e se fra A , B , D esistesse la proporzione $A : B = B : D$ la proporzione si direbbe *continua*, e la retta B si dice *media proporzionale geometrica fra A, D*. Il teorema superiore poi si enuncierebbe così. *Se tre rette sono in proporzione geome-*

trica continua, il quadrato fatto sulla media è uguale al rettangolo fatto colle rette estreme; e viceversa se tre rette sono tali, che il quadrato fatto sulla media sia uguale al rettangolo fatto colle estreme, le tre rette sono in proporzione geometrica continua.

197. *Coroll. 2.°* Si è dimostrato (§. 178.) (fig. 84.), che il quadrato sopra BC è uguale al rettangolo fatto coi segmenti AC, CD del diametro: dunque la normale calata da un punto qualunque della circonferenza sul diametro è media proporzionale fra i segmenti di questo.

198. *Alternare* in una proporzione vuol dire scrivere; l'antecedente della prima ragione sta all'antecedente della seconda, come il conseguente della prima ragione sta al conseguente della seconda. Nella proporzione superiore $A:B=C:D$ se si scrivesse $A:C=B:D$, si sarebbero alternati i termini.

199. *Invertere* vuol dire, in una proporzione cambiare i conseguenti in antecedenti, e gli antecedenti in conseguenti. Così se posta la proporzione $A:B=C:D$ si scrivesse $B:A=D:C$ si sarebbero inversi i termini.

TEOREMA XXI.

IN UNA PROPORZIONE DI RETTE SI POSSONO ALTERNARE,
ED INVERTERE I TERMINI.

200. *Dimostr.* Sia fra le rette A, B, C, D la proporzione $A:B=C:D$; se in questa si alternino i termini diventa $A:C=B:D$. Affinchè questa proporzione esista è necessario, che il rettangolo fatto dai termini estremi A, D sia uguale a quello fatto dai medj C, B: ma appunto questa uguaglianza esiste per la proporzione stabilita $A:B=C:D$; solo se in questa si dice il rettangolo fatto da B, C, nella nostra si dice il rettangolo fatto da C, B: ma questi due rettangoli sono gli stessi.

201. Se poi nella data proporzione s'invertono i termini sarà $B : A = D : C$, nella quale affinchè esista la proporzione è necessario, che il rettangolo fatto da B, C sia uguale a quello fatto da B, C, come difatti avviene per la stabilita proporzione.

TEOREMA XXII.

SE IN UN TRIANGOLO DAE (fig. 92.) SI CONDUCE UNA RETTA BC, CHE SI UNISCE IN DUE PUNTI B, C CON DUE SUOI LATI AD, AE, ED È PARALLELA AL TERZO DE, SPEZZA I DUE PRIMI LATI IN PARTI PROPORZIONALI FRA LORO, E PROPORZIONALI AGLI INTERI LATI, COSICCHÈ SI HANNO LE PROPORZIONI $AB : BD = AC : CE$; $AD : AB = AE : AC$; $AD : BD = AE : CE$. VICEVERSA SE ESISTE UNA DI QUESTE PROPORZIONI LA BC È PARALLELA A DE.

202. *Dimostr.* Si conducano le rette BE, CD; i due triangoli BCD, BCE avendo la stessa base BC, ed essendo compresi fra le parallele BC, DE (§. 155.) sono equivalenti. Ora i due triangoli BCD, BCA hanno un comun vertice C, ed insistono sulla stessa retta DA, quindi hanno la stessa altezza, che sarebbe la normale calata da C sopra AD: dunque sono fra loro come le basi (§. 183.); avremo dunque la proporzione $ABC : BCD = AB : BD$; per la stessa ragione sarà $ABC : BCE = AC : CE$; queste due proporzioni hanno i primi rapporti uguali, dunque sono uguali gli altri due, onde avremo $AB : BD = AC : CE$, che è la prima delle proporzioni proposte.

203. Inoltre i due triangoli ACD, ACB hanno un comun vertice C, ed insistono sulla stessa retta AD, dunque hanno la stessa altezza, quindi sarà $ACD : ACB = AD : AB$; per la stessa ragione avremo $ABE : ABC = AE : AC$; ora nei due primi rapporti di queste proporzioni ABC è comune, ed ACD, ABE sono triangoli equivalenti essendo for-

mati dal comun triangolo ABC, e dai triangoli equivalenti DBC, BCE; dunque dalle dette proporzioni ricaveremo $AD : AB = AE : AC$, seconda proporzione enunciata.

204. Finalmente dai due triangoli della stessa altezza ACD, BDC ricaveremo $ACD : BCD = AD : BD$; e dai due ABE, CBE, $ABE : CBE = AE : CE$; dalle quali due proporzioni ricaviamo $AD : BD = AE : CE$, che è la terza proporzione del teorema.

205. Viceversa esista una qualunque di queste proporzioni, per esempio $AB : BD = AC : CE$, dico, che BC è parallela a DE. Non sia, e da B si conduca la parallela BF a DE; per la nostra dimostrazione avremo (§. 202.) la proporzione $AB : BD = AF : FE$; ma per ipotesi $AB : BD = AC : CE$: dunque $AF : FE = AC : CE$, ossia alternando (§. 200.) $AF : AC = FE : CE$; cioè una parte AF al tutto AC come il tutto FE ad una sua parte CE, cioè una quantità minore sta ad una maggiore, come una maggiore sta ad una minore, ciò che è assurdo (§. 122.).

206. Esista la proporzione $AD : AB = AE : AC$ deve essere BC parallela ad DE. Se non lo è si conduca BF parallela a DE avremo la proporzione $AD : AB = AE : AF$; essendo uguali i due primi rapporti in queste due proporzioni, i secondi ci daranno la proporzione $AE : AC = AE : AF$, ossia alternando $AE : AE = AC : AF$: ma il quoto di AE diviso per AE è uno, dunque uno dovrebbe essere il quoto della divisione delle due rette disuguali AC, AF, lo che è assurdo.

207. *Comporre* in una proporzione è fare, l'antecedente più il suo conseguente al conseguente stesso, come l'altro antecedente più il suo conseguente a questo conseguente; ovvero l'antecedente sta allo stesso antecedente più il suo conseguente, come l'altro antecedente sta allo stesso antecedente più il suo conseguente. Se per esempio si avessero tre rette A, B, C, D nella proporzione $A : B = C : D$,

si farebbe in essa la operazione di comporre scrivendo $A + B : B = C + D : D$; ovvero $A : A + B = C : C + D$. Il segno $+$ vuol dire più, ed $A + B$ vuol dire A sommata con B, e viceversa.

208. *Dividere* in una proporzione è scrivere, l'antecedente meno il conseguente sta al conseguente, come l'altro antecedente meno il suo conseguente sta allo stesso conseguente; ovvero l'antecedente sta all'antecedente meno il conseguente come l'altro antecedente sta allo stesso antecedente meno il conseguente. Nella proporzione $A : B = C : D$ facendo $A - B : B = C - D : D$; $A : A - B = C : C - D$ si farebbe l'operazione di dividere. Il segno $-$ si legge meno, ed $A - B$ vuol dire B tolto da A.

TEOREMA XXIII.

SE QUATTRO RETTE SONO IN PROPORZIONE, QUESTA SI PUÒ
COMPORRE, E DIVIDERE.

209. *Dimostr.* Siano le rette A, B, C, D (fig. 93.), che diano la proporzione $A : B = C : D$. Con due rette EL, EI si faccia l'angolo qualunque E. Sopra EL si prenda EF uguale ad A, FG uguale a B, ed EM uguale a B. Sul lato AI si prenda EN uguale a C, NO uguale a D, ed AP uguale a D: finalmente si congiungano colle rette MP, FN, GO i punti M, P; F, N; G, O. Avendosi la proporzione $A : B = C : D$ sarà $EF : FG = EN : NO$; dunque (§. 202.) FN è parallela a GO. Per la stessa proporzione avremo $EF : EM = EN : EP$, dunque (§. 203.) PM è parallela ad FN. Se FN è parallela a GO avremo (§. 204.) $EG : GF = EO : ON$, ed $FE : EG = NE : EO$, nelle quali ponendo i valori delle linee date, cioè A, B, C, D, avremo $A + B : B = C + D : D$, ed $A : A + B = C : C + D$.

210. *Coroll.* Se si abbia un numero di rette espresse in lunghezza da A, B, C, D, E, F, G, H, tra le quali esi-

sta la serie di rapporti uguali $A : B = C : D = E : F = G : H$, potremo fare la proporzione $A + C + E : B + D + F = G : H = A : B$; cioè la somma di un numero qualunque di antecedenti sta alla somma dei loro conseguenti come un antecedente qualunque sta al suo conseguente. Infatti essendo uguali i rapporti antecedenti, presi comunque a due a due daranno la proporzione: quindi sarà $A : B = C : D$, ossia alternando $A : C = B : D$, e componendo $A + C : C = B + D : D$; $A + C : B + D = C : D$; ma si può porre $C : D = E : F$; dunque $A + C : B + D = E : F$; $A + C : E = B + D : F$; e componendo $A + C + E : E = B + D + F : F$; $A + C + E : B + D + F = E : F = G : H = A : B$; lo che si doveva provare.

211. Dal triangolo EFN , nel quale PM è parallela ad FN abbiamo $FM : EM = PN : PE$, ed $EF : FM = EN : PN$ cioè $A - B : B = C - D : D$; $A : A - B = C : C - D$.

212. *Triangoli simili si dicono quelli, che hanno gli angoli rispettivamente uguali.* I triangoli ABC , FGH (fig. 94.) sono simili se l'angolo A è uguale a G ; B ad F ; e C ad H .

213. *I lati opposti agli angoli uguali si dicono lati omologhi:* così sono omologhi i lati BC , FH , perchè sono opposti agli angoli A , G supposti uguali.

TEOREMA XXIV.

NEI TRIANGOLI SIMILI I LATI OMOLOGHI
SONO PROPORZIONALI.

214. *Dimostr.* Su i lati AB , AC (fig. 94.) si prendano le parti AD , AE uguali ad FG , GH , e si conduca DE ; i due triangoli DEA , GFH sono coincidenti: dunque l'angolo ADE è uguale all'angolo F : ma F è uguale a B : dunque l'angolo ADE è uguale a B , e perciò DE è parallela a BC : quindi avremo (§. 203.) $AB : AD = AC : AE$; ossia $AB : FG = AC : GH$. Si prenda sopra CA la parte CN

uguale ad HG, CM sopra CB uguale ad HF, e si meni MN, sarà questa parallela ad AB: dunque sarà $CA : CN = CB : CM$; ossia $AC : GH = CB : FH$: ora questa colla proporzione $AB : FG = AC : GH$ hanno il rapporto comune $AC : GH$; dunque i tre rapporti $AC : GH$, $AB : FG$, $CB : FH$ sono uguali, e perciò con due qualunque di essi si può fare la proporzione; ossia tra quattro lati a due a due omologhi in due triangoli simili si può fare la proporzione, cioè i lati omologhi sono proporzionali.

TEOREMA XXV.

VICEVERSA SE IN DUE TRIANGOLI I LATI SONO PROPORZIONALI, GLI ANGOLI OPPOSTI AI LATI, CHE FORMANO UNA RAGIONE NELLA PROPORZIONE SONO UGUALI, E PERCIÒ I TRIANGOLI SONO SIMILI.

215. *Dimostr.* Siano i due triangoli ABC, EFG (fig. 95.), nei quali si abbiano le proporzioni $AC : EG = AB : FE$; $AC : EG = BC : FG$, dico, che gli angoli B, F opposti ai lati AC, EG, che formano le prime ragioni nelle due proporzioni sono uguali. Così sono uguali gli angoli A, E, che sono opposti ai lati BC, FG, che formano la seconda ragione nella seconda proporzione. Ciò posto dagli estremi A, C del lato AC si conducano le rette AD, CD in guisa, che facciano gli angoli CAD, ACD uguali agli angoli E, G dell'altro triangolo. Il triangolo ADC sarà equiangolo o simile ad FGE (§. 141.), dunque avremo le proporzioni $AC : EG = AD : EF$; $AC : EG = DC : FG$: ma per ipotesi abbiamo $AC : EG = AB : FE$; $AC : EG = BC : FG$. Confrontando la prima colla terza proporzione si vede, che sono gli stessi tutti i suoi termini meno i terzi AD, AB, dunque debbono essere uguali; per la stessa ragione dalla seconda e quarta proporzione ricaveremo uguali le linee DC, BC. Da ciò si ha, che i due triangoli ABC, ADC hanno tutti i lati rispettivamente uguali, e perciò sono

coincidenti : ma il triangolo ACD è simile ad EFG, dunque sono simili i due triangoli ABC, EFG.

Andiamo ora a dimostrare le condizioni onde due triangoli siano simili.

216. Dalla dimostrazione antecedente si ricava, che quando due triangoli abbiano i lati proporzionali sono simili.

217. Sono simili due triangoli quando hanno due angoli uguali a due angoli, perchè il terzo deve essere uguale al terzo (§. 141.).

TEOREMA XXVI.

I TRIANGOLI COI LATI RISPETTIVAMENTE PARALLELI SONO SIMILI ;
E SONO UGUALI GLI ANGOLI OPPOSTI AI LATI PARALLELI ,
ONDE QUESTI SONO GLI OMOLOGHI.

218. *Dimostr.* Siano i due triangoli ABC, EDF (fig. 69.) tali, che il lato ED posto parallelo a BA riesca DF parallelo ad AC, EF a BC. Si prolunghi il lato EF a tagliare in G, H i lati AB, AC del triangolo ABC; sarà GH parallela a BC : quindi l'angolo B sarà uguale all'angolo AGH : ma per le parallele AB, ED l'angolo AGH è uguale a DEF : dunque l'angolo B è uguale a DEF. Nello stesso modo si proverà, che l'angolo C è uguale ad F : quindi l'angolo A è uguale all'angolo D. Essendo A uguale a D, B uguale ad E, C ad F, sarà BC omologo con EF, AC con DF, AB con ED, che appunto sono i lati paralleli.

TEOREMA XXVII.

DUE TRIANGOLI COI LATI RISPETTIVAMENTE NORMALI SONO SIMILI;
ED I LATI OMOLOGHI SONO I LATI L'UNO ALL'ALTRO NORMALI.

219. *Dimostr.* Siano i due triangoli DAC, MNP (fig. 97.), nei quali il lato MN ponendosi normale ad AC gli altri due lati MP, NP riescano normali a DC, DA. Dentro il

triangolo DAC si costruisca un triangolo FIG coi lati FI, FG, IG rispettivamente paralleli MP, NP, MN, saranno essi normali ai lati DC, AD, AC: ed FIG sarà simile a PMN (§. 218.) Si prolunghino gli stessi lati FI, IG, FG sino all'incontro in O, B, E coi lati DC, AC, DA. Nel quadrilatero BIOC la somma dei quattro suoi angoli vale quattro retti (§. 82.); ma i due angoli in B, ed O valgono insieme due retti, dunque l'angolo C unito ad OIB deve dare due retti: ma anche l'angolo FIB unito allo stesso OIB come suo conseguente da due retti: dunque l'angolo FIB è uguale all'angolo C: ora questi angoli sono opposti ai lati FG, DA, che sono fra loro normali, dunque questi lati normali sono omologhi. Nello stesso modo si proverà che l'angolo D è uguale all'angolo IFG, l'angolo A è uguale ad FGI, e si vedrà, che sono omologhi i lati AC, IG; DC, FI; cioè i lati omologhi sono i normali.

TEOREMA XXVIII.

DUE TRIANGOLI CHE HANNO DUE LATI PROPORZIONALI A DUE LATI,
E L'ANGOLO FATTO DAI DUE PRIMI LATI UGUALE ALL'ANGOLO
FATTO DAGLI ALTRI DUE SONO SIMILI.

220. *Dimostr.* Siano i triangoli ABC, EDF (fig. 96.), nei quali si abbia la proporzione $AB : ED = AC : DF$, e l'angolo A sia uguale a D. Sopra AB si prenda AG uguale ad ED; sopra AC si prenda AH uguale a DF, e si conduca GH. Il triangolo GAH è coincidente con EDF, dunque gli angoli AGH, AHG sono uguali agli angoli E, F. Come si ha la proporzione $AB : ED = AC : DF$, si avrà ancora, ponendovi le rette uguali, $AB : AG = AC : AH$: dunque GH è parallela a BC (§. 203.): quindi gli angoli AGH, AHG saranno uguali agli angoli B, C: ma i due primi si sono trovati uguali ad E, F, dunque a questi sono uguali gli altri due B, C: onde il triangolo ABC è equiangolo a DEF.

TEOREMA XXIX.

SE NEL TRIANGOLO RETTANGOLO SI CALA DAL VERTICE DELL'ANGOLO RETTO UNA NORMALE SULL'IPOTENUSA, QUESTA DIVIDE IL TRIANGOLO IN DUE TRIANGOLI SIMILI FRA LORO, E SIMILI A TUTTO IL TRIANGOLO.

221. *Dimostr.* Sia il triangolo ACD (fig. 98.) rettangolo in C, e da C si cali la normale CB sulla ipotenusa AD. I due triangoli ACB, CDB sono simili, perchè hanno gli angoli retti CBA, CBD. Inoltre l'angolo A unito all'angolo ACB dà un retto: ma anche BCD unito allo stesso ACB dà un retto, dunque l'angolo A è uguale all'angolo BCD. Ciascuno poi dei due triangoli è equiangolo coll'intero triangolo. Per esempio CAB ha l'angolo CBA retto come ACD nel triangolo CAD, ed i due detti triangoli hanno l'angolo comune A.

222. Prendendo i lati omologhi nei due triangoli ACB, CBD avremo la proporzione $AB : CB = CB : BD$; quindi (§. 196.) la normale calata dal vertice dell'angolo retto sulla ipotenusa è media proporzionale fra i segmenti dell'ipotenusa. Quindi (§. 196.) il quadrato fatto sulla normale CB, è uguale al rettangolo fatto coi due segmenti AB, BD dell'ipotenusa. Prendendo i lati omologhi nei triangoli ACB, ACD abbiamo $AB : AC = AC : AD$; negli altri due CBD, CAD abbiamo $BD : DC = DC : AD$: dalle quali si ricava che ciascuno dei due cateti come AC è medio proporzionale fra l'ipotenusa AD, ed il suo segmento AB adiacente al cateto.

223. *Scolio.* Nel semicircolo ADC (fig. 99.) calata la normale da un punto qualunque D della circonferenza sulla ipotenusa AC si è veduto (§. 197.), che è media proporzionale fra i segmenti AB, BC del diametro. Ciò si ricava dal (§. 222.) antecedente. Infatti condotte le corde AD, DC, il triangolo DAC sarà (§. 102.) rettangolo in D,

dunque DB è media proporzionale fra i segmenti dell'ipotenusa AC.

L E M M A

La somma di due rettangoli, che abbiano uguali altezze, e basi qualunque è uguale ad un solo rettangolo, che abbia per base la somma delle due basi, e per altezza l'altezza comune.

224. *Dimostr.* Siano due rettangoli DEBA, EFCB (fig. 100.), che abbiano l'altezza EB, e le basi AB, BC. Si ponga AB per diritto con BC come in figura, l'altezza comune si unirà in EB, e si vede chiaro, che dei due rettangoli DABE, EBCF si forma uno solo DFCA, che ha per base la somma delle due basi, e per altezza l'altezza comune.

225. *Scolio.* Riprendendo le proporzioni del (§. 222.) $AB:AC = AC:AD$; $BD:DC = DC:AD$, da esse ricaviamo, che il quadrato (§. 196.) fatto sopra AC è uguale al rettangolo fatto con AB, AD; che il rettangolo fatto sopra DC è uguale al rettangolo fatto con BD, AD. Sommando queste grandezze uguali, il quadrato fatto sopra AC più il quadrato sopra DC è uguale alla somma dei due rettangoli l'uno fatto da AB, AD, l'altro da BD, AD: ora prendendo in questi rettangoli per basi le rette AB, BD, e per altezza la AD, essi (§. 224.) equivarranno ad un rettangolo di base somma delle due AB, BD, e di altezza AD: ma (fig. 98.) la somma di AB, BD dà AD, che è l'altezza del rettangolo: perciò questo sarà un quadrato sopra AD: dunque la somma dei quadrati fatti sopra i cateti AC, CD è uguale al quadrato sulla ipotenusa AD (§. 167.)

TEOREMA XXX.

IN UN QUADRILATERO CON I VERTICI DEGLI ANGOLI NELLA PERIFERIA D'UN CIRCOLO LA SOMMA DEI RETTANGOLI FATTI COI LATI OPPOSTI È UGUALE AL RETTANGOLO FATTO COLLE DIAGONALI.

226. *Dimostr.* Sia il quadrilatero ABCD (fig. 101.). In esso da C si conduca CE in guisa, che l'angolo ECD sia uguale all'angolo BCA; i due triangoli DCE, ACB saranno simili, perchè oltre gli angoli BCA, ECD fatti uguali, sono uguali gli angoli CDB, BAC iscritti, che insistono sullo stesso arco BC: quindi prendendo i lati omologhi avremo $CD : CA = DE : BA$. Sono simili ancora i triangoli CEB, CAD, perchè essendo ACB uguale ad ECD, aggiungendo ad ambedue l'angolo FCE sarà BCE uguale ad ACD; gli angoli poi CBD, CAD sono iscritti, ed insistenti sullo stesso arco CD; avremo dunque la proporzione $BE : AD = BC : AC$. Nelle proporzioni avute dovendo essere il rettangolo fatto dai termini estremi uguale al rettangolo fatto dai medj (§. 195.), sarà il rettangolo fatto da CD, BA uguale al rettangolo di CA, DE. Sarà ancora il rettangolo di AD, BC uguale al rettangolo di CA, BE. Sommando queste grandezze uguali sarà il rettangolo di CD, BA più il rettangolo di AD, BC uguale alla somma dei due rettangoli uno di CA, DE, e l'altro di CA, BE. Ora questi due rettangoli hanno la stessa altezza CA, e le due basi BE, DE; dunque (§. 224.) equivarranno ad un rettangolo di base BE più DE, ossia di base BD, come si vede nella figura, e di altezza CA; abbiamo dunque la somma dei due rettangoli l'uno di CD, BA, l'altro di AD, BC uguale al rettangolo di CA, BD; ora la prima somma è la somma dei rettangoli fatti coi lati opposti del quadrilatero, e l'ultimo rettangolo è quello fatto dalle diagonali.

TEOREMA XXXI.

NEI TRIANGOLI SIMILI LE LINEE SIMILMENTE CONDOTTE SONO
PROPORZIONALI AI LATI OMOLOGHI.

227. *Dimostr.* Siano i due triangoli ADC, EHG simili cogli angoli A, ADC, C rispettivamente uguali agli angoli E, EHG, G (fig. 102.). Se dai vertici D, H si calino le normali DB, HF sopra i lati AC, EG omologhi, queste sono linee similmente condotte. Ora i due triangoli rettangoli DAB, EFH, nei quali gli angoli A, E sono uguali, sono simili: dunque $AD:EH = DB:HF$, e poichè $AD:EH = AC:EG = DC:HG$, quindi $AD:EH = AC:EG = DC:HG = DB:HF$. Siano i due triangoli simili ACB, EGF (fig. 103.), nei quali gli angoli CAB, C, B siano rispettivamente uguali agli angoli GEF, G, F. Se dai vertici A, E si conducano sulli punti medj dei lati opposti omologhi CB, GF le rette AD, EI, queste saranno similmente poste, e saranno in ragione dei lati omologhi. Infatti per essere simili i detti triangoli avremo la proporzione $AB:EF = BC:FG$; ma BC, GF sono come le loro metà DB, FI: dunque avremo $AB:EF = BD:FI$: dunque nei due triangoli ABD, EFI i lati intorno agli angoli uguali B, F sono proporzionali, perciò (§. 220.) questi triangoli sono simili, onde sarà $AD:EI = AB:EF = AC:EG = BC:GF$.

228. Se dai punti medj M, O delle rette AD, EI, si conducano sopra i punti medj di AB, EF le rette MN, OP, queste saranno similmente poste: quindi saranno proporzionali ai lati omologhi dei detti triangoli ACB, EGF. Infatti essendosi dimostrati simili i triangoli ADB, EIF, saranno uguali gli angoli MAN, OEP: ora i lati AM, AN intorno al primo angolo sono proporzionali ai lati EO, EP intorno al secondo, perchè sono metà delle rette proporzionali che segano: dunque i due triangoli AMN, EOP

sono simili, e perciò avremo $MN : OP = AN : EP = AB : EF = AC : EG = CB : GF$.

229. È evidente, che sussisterebbe la stessa proposizione e dimostrazione se invece di supporre AM metà di AD, ed AN metà AB si supponesse AM una parte qualunque di AD, ed AN una parte qualunque di AB, purché EO fosse di EI la stessa parte che è AM di AD, ed EP fosse di EF la parte, che è AN di AB, perchè la dimostrazione è fondata su questo, che nei due triangoli simili ADB, EIF essendo AB, AD proporzionali ad EF; EI, debbono essere AN, AM proporzionali ad EP, ed EO; ciò che è vero, perchè se EF in AB entra per es. tre volte, anche EP, che fosse i cinque settimi di EF, deve entrare tre volte in AN, che sarebbe i cinque settimi di AB.

TEOREMA XXXII.

LE SUPERFICIE DEI TRIANGOLI SIMILI SONO FRA LORO COME I QUADRATI FATTI SOPRA I LATI OMOLOGHI.

230. *Dimostr.* Siano i due triangoli simili ABC, ILM (fig. 104.); dai loro vertici B, L si calino le normali BD, LP sulle basi AC, IM, e sulle stesse basi si costruiscano i quadrati ACFE, IMON, e si conducano le diagonali CE, MN. I due triangoli BAC, AEC hanno la stessa base AC: dunque sono come le loro altezze BD, AE, o BD, AC; quindi per li due triangoli avremo le proporzioni $ABC : ACE = BD : AC$; $ILM : IMN = LP : IM$: ma nei due triangoli simili le basi sono come le altezze (§.227.), quindi $AC : IM = BD : LP$; ossia alternando $AC : BD = IM : LP$: dunque nelle due proporzioni superiori il rapporto AC:BD è uguale al rapporto IM : LP: dunque saranno uguali i loro primi rapporti, e quindi $ABC : ACE = ILM : IMN$, ed $ABC : ILM = ACE : IMN$, o finalmente $ABC : ILM = ACFE : IMON$, perchè i triangoli AEC, IMN metà dei qua-

drati ACFE, IMON è chiaro, che debbono essere come i quadrati stessi.

231. *Poligoni simili sono quelli, che hanno tutti gli angoli rispettivamente uguali, ed i lati proporzionali.*

TEOREMA XXXIII.

I POLIGONI SIMILI SI POSSONO DIVIDERE IN TRIANGOLI
SIMILI; E VICEVERSA.

232. *Dimostr.* Siano i due poligoni simili BCDEFA, GILMNO (fig. 105.), nei quali gli angoli B, BCD, CDE, DEF, EFA, FAB siano rispettivamente uguali agli angoli I, ILM, LMN, MNO, NOG, OGI, ed i lati siano rispettivamente proporzionali, talchè si abbia, $AB : GI = BC : IL = CD : LM = DE : MN = EF : NO = AF : GO$; divisi i poligoni in triangoli, come si vede nella figura i due triangoli ABC, GIL sono simili, perchè hanno i due lati AB, BC proporzionali ai due lati GI, IL, e l'angolo B fatto dai primi è uguale all'angolo I fatto dagli altri due. Se dai due uguali angoli BCD, ILM si tolgono gli uguali BCA, ILG saranno uguali i residui ACD, GLM. Ora dai due triangoli simili BCA, GIL abbiamo $BC : IL = CA : LG$; ma per ipotesi $BC : IL = CD : LM$, dunque, a causa dei primi rapporti uguali, sarà $CA : GL = CD : LM$, cioè i lati intorno agli angoli uguali ACD, GLM nei triangoli CDA, GML sono proporzionali, onde questi triangoli sono simili. Collo stesso metodo si proveranno simili i triangoli DAE, MGN, e così innanzi.

233. Viceversa se i triangoli, in che si dividono i poligoni sono rispettivamente simili, i poligoni hanno tutti gli angoli rispettivamente uguali, ed i lati proporzionali, e perciò sono simili. Infatti se i detti triangoli sono simili, o equiangoli rispettivamente, siccome i loro angoli formano gli angoli del poligono, saranno ancora questi uguali. Così per esempio i due angoli CDA, ADE formano tutto

l'angolo D del primo poligono, e gli angoli LMG, GMN formano tutto l'angolo M del secondo: ma i due primi angoli di due triangoli sono rispettivamente uguali agli altri due angoli dei due triangoli simili ai primi: dunque l'angolo CDE è uguale all'angolo LMN. I due triangoli simili CBA, GIL ci danno $AB : GI = BC : IL = CA : LG$: ma i due triangoli CAD, LMG simili ci danno $CA : LG = CD : LM = DA : MG$: dunque $AB : GI = BC : IL = CD : LM = DA : MG$; ma nei due triangoli simili DAE, MGN abbiamo $DA : MG = DE : MN = AE : GN$: dunque $AB : GI = BC : IL = CD : LM = DE : MN = AE : GN$; ma $AE : GN = EF : NO = FA : GO$, dunque $AB : GI = BC : IL = CD : LM = DE : MN = EF : NO = FA : GO$; cioè i lati delli due poligoni sono proporzionali.



CAPO QUARTO

DELLA MISURA DELLE SUPERFICIE.



TEOREMA XXXIV.

DUE RETTANGOLI QUALUNQUE SONO COME I PRODOTTI
DELLE LORO BASI NELLE LORO ALTEZZE.

234. *Dimostr.* Siano i due rettangoli BEDC, FEHG (fig. 106.). Si dispongano come nella figura in guisa, che gli angoli retti BED, FEH siano verticali, e si prolunghino i lati BC, GF finchè s'incontrino in A. I due rettangoli ABEF, BEDC hanno la stessa altezza BE: dunque sono come le loro basi; avremo dunque $ABEF : BCDE = FE : ED$. Similmente i due rettangoli FEHG, ABEF hanno la stessa

altezza FE , dunque ci danno la proporzione $FEHG:ABEF = EH:EB$. Moltiplicando queste due proporzioni, il ch     moltiplicare due quoti uguali per due quoti uguali, o due frazioni uguali per due altre uguali, donde debbono venire quoti o frazioni uguali, avremo $ABEF \cdot FEHG : BCDE \cdot ABEF = FE \cdot EH : ED \cdot EB$; e dividendo il primo rapporto per $ABEF$ avremo $FEHG : BCDE = FE \cdot EH : ED \cdot EB$, che   il teorema.

235. *Coroll. 1. * I rettangoli sono equivalenti ai parallelogrammi di uguali basi, e di uguali altezze: dunque anche i parallelogrammi sono fra loro come i prodotti delle loro basi nelle loro altezze.

236. *Coroll. 2. * I rettangoli sono doppi dei triangoli di uguali basi, e di uguali altezze; dunque due triangoli qualunque sono come le loro basi moltiplicate per le loro altezze.

237. Sia un rettangolo di superficie espressa da R ; la sua base sia b , e l'altezza a . Sia un quadrato di cui un lato sia l , e la sua superficie sia Q . Essendo due rettangoli (§. 234.) come i prodotti delle rispettive basi per le altezze avremo $R : Q = ab : l^2$. Supponiamo ora, che col lato l preso per unit  siano misurati i lati a, b del rettangolo; essendo $l = 1$, l^2 sar  pure 1; si avr  dunque $R : Q = ab : 1$, ed $R = abQ$; dalla quale uguaglianza si ricava, che se la base, e l'altezza d'un rettangolo si misurano col lato d'un quadrato preso per unit , con che per i due lati avremo due numeri, la superficie del rettangolo   uguale al detto quadrato ripetuto tante volte quanto sono le unit  del prodotto dei detti due numeri.

238. Dai geometri si misura una superficie con una superficie. Per la figura di questa si fissa il quadrato, come la figura pi  semplice, perch  in essa basta fissare un lato, essendo tutti uguali, e gli angoli retti. La grandezza di questo lato   arbitraria, e se si prenda per essa un palmo, una canna, un metro, il quadrato si dice *palm *

quadrato, canna quadrata, metro quadrato : quindi per palmo, o metro quadrato s'intende un quadrato, ciascun lato del quale è un palmo, o un metro; e la superficie misurata da questo palmo, o metro quadrato, si dice di tanti palmi, o metri quadrati.

239. Se dunque a misurare il detto rettangolo si assumesse il metro quadrato, si misurerebbe la sua base, e la sua altezza col metro lineare, si moltiplicherebbero fra loro i numeri provenienti, ed il prodotto esprimerebbe quanti metri quadrati sarebbe il detto rettangolo. Se per esempio la base fosse di metri lineari 8, e l'altezza di metri 10, la superficie sarebbe 80 metri quadrati.

240. Se nell'espressione (§. 237.) $R = abQ^2$ si faccia anche $Q = 1$, cioè si supponga uno la superficie misuratrice, si avrà $R = ab$. Ciò si esprime dicendo, che *il rettangolo è uguale alla sua base moltiplicata per la sua altezza*; s'intende però, che questo prodotto ripeta il quadrato preso per unità, con un lato del quale si è misurata la detta base, ed altezza.

Dopo ciò vengono subito le misure delle principali figure geometriche.

241. Il quadrato è un rettangolo di base uguale all'altezza, dunque *nel quadrato invece di moltiplicare la base per l'altezza si moltiplicherà un lato per se stesso*. Se il lato sia 7 palmi, la superficie sarà $7 \cdot 7$, o 49 palmi quadrati. Se il lato del quadrato sia a la superficie sarà a^2 ; il perchè la seconda potenza di una quantità a si chiama quadrato. Così si chiama, perchè esprime la superficie d'un quadrato, di cui un lato è a .

242. Un parallelogrammo è equivalente ad un rettangolo di ugual base, e di uguale altezza: ma la superficie di questo è la base moltiplicata per l'altezza, dunque anche *la superficie d'un parallelogrammo è uguale alla base moltiplicata per l'altezza*. Ci ricorderemo, che l'altezza d'un parallelogrammo è la normale calata sopra d'un suo lato

prolungato se bisogna da un punto qualunque del lato opposto.

243. Un triangolo è metà d'un rettangolo di ugual base e di uguale altezza, dunque *la superficie d'un triangolo è uguale alla metà del prodotto della sua base per la sua altezza; o al prodotto della metà della base per l'altezza, o della base per la metà dell'altezza.* Qui ancora ricorderemo, che l'altezza d'un triangolo è la normale calata sopra un suo lato preso per base prolungato se sia duopo dal vertice dell'angolo opposto.

244. Ora non essendovi superficie piana terminata da linee rette, che non possa dividersi in tanti triangoli, non v'è superficie, che non si possa valutare.

245. Sia il poligono qualunque come nella (fig. 107.) si vede, che si è diviso in tanti triangoli. Ora in un triangolo qualunque ESF preso il lato EF per base su questo da S si cali la normale SO, e la metà del prodotto di FE per SO darà la superficie di questo triangolo. Si faccia così negli altri triangoli, e sommate le loro superficie avremo la superficie di tutto il poligono.

246. Il quadrilatero ACDB (fig. 108.), in cui due lati AB, CD sono paralleli si chiama *trapezio*. Si conduca la retta CB, il trapezio sarà diviso in due triangoli ACB, CDB.

Ora la superficie del primo è $\frac{AB \cdot CF}{2}$, e quella del

secondo è $\frac{CD \cdot BE}{2}$, ossia poichè BE è uguale a CF,

come due normali fra parallele, questa superficie sarà $\frac{CD \cdot CF}{2}$; dunque la superficie di tutto il trapezio è

$$\frac{AB \cdot CF}{2} + \frac{CD \cdot CF}{2} = \left(\frac{AB + CD}{2} \right) CF :$$

dunque la superficie d'un trapezio è uguale alla semisomma dei due lati, o basi parallele moltiplicata nell'altezza, che è la normale fra le parallele stesse.

247. Si conduca nello stesso trapezio la linea IS , che biseghi i lati AC , DB in I ed S , e si conducano le normali CF , DL . Egli è chiaro, che essendo $OP = CD = FL$, sarà $OP = \frac{CD + FL}{2}$. I triangoli ICO , ACF sono simili ;

dunque avremo $CI : CA = IO : AF$: ma per costruzione CI è la metà di CA : dunque IO è la metà di AF . Per la stessa ragione PS sarà la metà di LB : dunque IS sarà la metà di AF , di FL , di LB , o la metà di AB , e la metà di CD , ossia IS sarà la semisomma dei due lati paralleli del trapezio : ma la superficie del trapezio è uguale a questa semisomma moltiplicata per l'altezza del trapezio : dunque *la superficie d'un trapezio si ottiene moltiplicando la linea, che bisega i due lati non paralleli per la normale fra i lati paralleli.*

Dopo ciò si possono esprimere in calcolo molti dei teoremi dimostrati colle figure.

248. Il teorema (§. 167.) si traduce così : sia a l'ipotenusa del triangolo rettangolo, e b , c i cateti, essendo i tre quadrati espressi (§. 241.) da a^2 , b^2 , c^2 , avremo pel detto teorema $a^2 = b^2 + c^2$, la quale equazione in calcolo si enuncia. *La seconda potenza dell'ipotenusa è uguale alla somma delle seconde potenze dei due cateti.* Dalla detta equazione si ricava $a = \sqrt{b^2 + c^2}$, la quale ci dice, che *l'ipotenusa è uguale alla radice della somma delle seconde potenze dei due cateti.* Dalla stessa equazione abbiamo

$$b^2 = a^2 - c^2, \quad b = \sqrt{a^2 - c^2},$$

cioè un cateto è uguale alla radice della seconda potenza dell'ipotenusa meno la seconda potenza dell'altro cateto.

249. Se i due cateti sono uguali sarà

$$a^2 = 2b^2, \quad a = b\sqrt{2}$$

essendo $\sqrt{2}$ incommensurabile, l'ipotenusa a non potrà aversi in parti di b ; onde a , b non hanno comune misura,

ossia come si dice; *l'ipotenusa, ed il cateto d' un triangolo rettangolo isoscele sono incommensurabili.* Il perchè nei (§§. 127, 184.) abbiamo ammesso queste linee incommensurabili.

250. Se a è la retta del teorema (§. 169.), e le sue parti qualunque, in che è divisa, siano b, c , sarà $a = b + c$. Ora il detto teorema dice, che il quadrato fatto sull' intera retta $b + c$, ossia $(b + c)^2$ è uguale alla somma dei quadrati fatti sulle due parti b, c , ossia $b^2 + c^2$, più due volte il rettangolo fatto prendendo per suoi lati le stesse parti b, c , ossia $2cb$: dunque sarà

$$(b + c)^2 = b^2 + c^2 + 2cb,$$

che dice, che la seconda potenza del binomio $b + c$ è uguale alla somma delle seconde potenze del primo e secondo termine più due volte il prodotto dei termini stessi; ciò che si accorda coll'algebra.

251. Pel teorema (§. 170.) siano b, c le due parti della retta a , il quadrato dell' intera retta aggiuntogli il quadrato di una parte b sarà espresso da $a^2 + b^2$, questa somma deve essere uguale a due volte il rettangolo fatto dall'intera retta, e dalla stessa parte più il quadrato dell'altra parte c , ossia $2ab + c^2$, dunque $a^2 + b^2 = 2ab + c^2$; questa uguaglianza combina coll'algebra, perchè nel nostro caso abbiamo $a = b + c$, donde

$$a - b = c; (a - b)^2 = c^2; a^2 + b^2 - 2ab = c^2;$$

$$\text{e finalmente} \quad a^2 + b^2 = 2ab + c^2.$$

252. Andando al teorema (§. 171.) sia a la retta, e sia b la parte presa cominciando dal suo punto medio, e minore della metà della retta. Il quadrato della metà della retta, che sarà $\frac{a^2}{4}$, equivale al rettangolo fatto dalle parti disuguali, che sono $\frac{a}{2} + b$, $\frac{a}{2} - b$, e che sarà espresso

da $\frac{a^2}{4} - b^2$, più il quadrato sulla parte b , cioè b^2 : il tutto dà appunto $\frac{a^2}{4}$.

253. Nel teorema (§. 172.) sia la retta a , cui si aggiunga la retta b , il quadrato sulla metà più la parte aggiunta b , ossia $\left(\frac{a}{2} + b\right)^2$ deve essere uguale al rettangolo fatto dalla totale $a + b$, e dalla parte aggiunta b , cioè $(a + b)b$, o $ab + b^2$, più il quadrato sulla metà $\frac{a}{2}$, dunque $\left(\frac{a}{2} + b\right)^2 = ab + b^2 + \frac{a^2}{4}$ equazione chiaramente esistente per le regole dell'algebra.

254. Nel triangolo ottusangolo (fig. 80.) si può tradurre il teorema (§. 173.) scrivendo

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2AB \cdot BD.$$

Cioè; nel triangolo ottusangolo la seconda potenza del lato opposto all'angolo ottuso è uguale alla somma delle seconde potenze degli altri due lati più due volte il prodotto di uno di questi due lati nel suo prolungamento fino al piede della normale calata dal vertice dell'angolo opposto.

255. Nel triangolo acutangolo in C (fig. 81.) si traduce così il teorema (§. 174.)

$$DA^2 = AC^2 + DC^2 - 2AC \cdot BC.$$

Cioè; nel triangolo acutangolo la seconda potenza del lato opposto all'angolo acuto è uguale alla somma delle seconde potenze degli altri due lati più due volte il rettangolo fatto da uno di questi lati, e la sua parte compresa fra il piede della normale calata sopra di esso dall'angolo opposto, ed il vertice del detto angolo acuto.

256. Finalmente dai teoremi (§. 177, 180.) ricaviamo i prodotti delle due parti di ciascuna di due corde che si se-

gano sono uguali. La seconda potenza della tangente è uguale alla secante moltiplicata per la sua parte esterna.

257. *I prodotti di due secanti d'un circolo, che si uniscono in un punto, nelle loro parti esterne sono uguali (§. 181.).*

258. *La seconda potenza d'una perpendicolare calata da un punto qualunque della circonferenza sul diametro è uguale al prodotto dei segmenti del diametro (§. 178.).*

259. Il teorema (§. 226.) si esprime in calcolo dicendo, che *la somma dei prodotti dei lati opposti d'un quadrilatero iscritto ad un circolo è uguale al prodotto delle diagonali.*

260. Essendosi dimostrato nel (§. 230.), che le superficie di due triangoli simili sono come i quadrati dei lati omologhi; questi quadrati nel loro rapporto si possono considerare come due rette. Infatti i valori di questi due quadrati sono le seconde potenze dei loro lati, che ripetono il quadrato misuratore (§. 241.): ma nel rapporto questo comun quadrato sparisce, come in un quoto, o in una frazione sparisce il moltiplicatore de'suoi due termini: dunque due triangoli simili sono come le seconde potenze dei numeri esprimenti i loro lati omologhi, i quali numeri moltiplicati per una stessa retta diventano rette; e perciò le superficie di due triangoli simili sono come due rette. Per la stessa ragione le superficie dei due triangoli simili si possono rappresentare in rette: dunque la proporzione, che le superficie di due triangoli simili sono come li quadrati dei lati omologhi è proporzione di rette.

Ciò fissato possiamo dimostrare il

TEOREMA XXXV.

LE SUPERFICIE DEI POLIGONI SIMILI SONO COME I QUADRATI,
E SECONDE POTENZE DEI LATI PROPORZIONALI.

261. *Dimostr.* Siano i due poligoni della (fig. 105.). Nei parziali triangoli simili, per ciò che si è detto (§§. 230, 241.),

avremo le proporzioni $ACB:GIL = BC^2:IL^2$; $CAD:LGM = CD^2:LM^2 = BC^2:IL^2$; $DAE:MGN = DE^2:MN^2 = BC^2:IL^2$; $AFE:GON = EF^2:NO^2 = BC^2:IL^2$. In queste proporzioni essendo comune il rapporto $BC^2:IL^2$ potremo avere $BCA:IGL = CDA:GLM = DAE:MGN = AEF:GON = BC^2:IL^2$. In questa serie di rapporti uguali pel (§.210,260.) potremo avere $BCA + CDA + DAE + AEF:IGL + GLM + MGN + GON = BC^2:IL^2$: ma il primo rapporto è quello delle superficie dei due poligoni, dunque le superficie di due poligoni simili sono come i quadrati, e seconde potenze dei lati proporzionali.



CAPO QUINTO

DEI POLIGONI REGOLARI ISCRITTI, E CIRCOSCRITTI AI CIRCOLI.



262. *Un poligono si dice iscritto ad un circolo quando i vertici dei suoi angoli sono sulla circonferenza del circolo stesso, ed il circolo si dice circoscritto al poligono.*

263. *Un poligono si dice circoscritto ad un circolo quando i suoi lati sono tante tangenti alla circonferenza di questo circolo; ed il circolo si dice iscritto al poligono.*

TEOREMA XXXVI.

AD UN POLIGONO REGOLARE SI PUÒ SEMPRE
CIRCOSCRIVERE UN CIRCOLO.

264. *Dimostr.* Sia il poligono regolare qualunque ABCDEF (fig.109.). Dai punti medj M, N dei lati AB, BC

si alzino le normali MO , NO : queste s'incontreranno in un punto O . Se non s'incontrassero sarebbero parallele. Sia dunque se è possibile NO parallela ad MO . Si prolunghino BN , MO fino che s'incontrino in un punto S . Come SN è normale ad ON , così deve essere normale alla sua parallela SO (§. 69.); ossia BS normale ad SO : quindi nel triangolo SBM vi sarebbero due angoli retti S , M , o da B si potrebbero condurre due normali BM , BS ad una stessa retta SO ; il tutto assurdo: quindi MO , NO si uniscono in un punto O come nella figura, perchè essendo ON normale ad SC , e facendo SO con SC l'angolo acuto BSO si debbono incontrare al di sopra di SN (§. 62.). Essendo ON , OM due normali calate dallo stesso punto O ai punti medj delle rette BC , BA saranno uguali le tre distanze OC , OB , OA del punto O dai tre vertici C , B , A degli angoli del poligono (§. 37.) ; se dunque fatto centro in O coll'intervallo OC si descriva un circolo passerà per li detti tre vertici : ma dico che passerà per tutti gli altri vertici D , E , F . Per provarlo si conducano da O le rette OD , OE , OF , OA , OB , OC . I due triangoli AOB , OBC , che hanno tutti i lati rispettivamente uguali sono coincidenti : dunque sono uguali i due angoli OBC , OBA , quindi OBC è metà dell'angolo ABC ; ma nel triangolo isoscele OBC l'angolo OCB è uguale a CBO ; quindi anche OCB sarà metà dell'angolo BCD , che è uguale a CBA come angoli del poligono regolare. Dopo ciò i due triangoli BOC , OCD sono coincidenti, perchè i lati BC , CO dell'uno sono uguali ai lati CD , OC dell'altro, e l'angolo OCB fatto dai primi è uguale all'angolo OCD fatto dai secondi, ambedue metà dell'angolo BCD : quindi BO è uguale a OD , e perciò la descritta circonferenza, che passava per A , B , C passa anche per D . Si vede ora come si possa procedere per dimostrare, che i lati OE , OF sono uguali ai lati OD , OC ec.

265. *Scolio.* Dal metodo eseguito onde far passare la

circonferenza per A , B , C si ha quello per far passare una circonferenza per tre punti qualunque A , B , C , e così circoscrivere una circonferenza ad un triangolo. Se i detti tre punti non sono congiunti da rette, se ne conducano due AB , BC , e dai punti medj di queste si elevino due normali, che si è dimostrato incontrarsi in un punto O . Si faccia centro in O , e con un'apertura di compasso uguale ad una delle distanze di questo punto da uno dei dati si descriva la circonferenza, questa passerà per i tre dati punti. I tre punti poi non possono essere in linea retta, perchè se una circonferenza potesse passare per tre punti in linea retta, condotti dal centro a questi tre raggi si potrebbero condurre tre rette uguali da un punto ad una retta; cosa assurda (§. 35.).

TEOREMA XXXVII.

ISCRITTO UN POLIGONO REGOLARE QUALUNQUE IN UN DATO CIRCOLO SI PUÒ A QUESTO CIRCOSCRIVERE UN POLIGONO SIMILE.

266. *Dimostr.* Sia iscritto (fig. 110.) il poligono regolare $ABDCE$ al circolo $ABDCE$; dal centro O si conducano sopra i lati BD , DC ec. i raggi normali OP , OM ec., ed ai punti P , M ec. si conducano le tangenti GH , HI ec; queste uendosi nei punti H , I , L ec. formeranno il poligono $GHILFG$ equiangolo coll' iscritto, ed avente tutti i lati uguali. Per provare, che l'angolo qualunque PHM è uguale all'angolo RDN si conduca per i vertici H , D di questi angoli la retta HDO . Essendo GH , BD normali alla stessa retta OP saranno parallele; dunque l'angolo interno PHO è uguale all'esterno ed opposto RDO . Per la stessa ragione l'angolo OHM è uguale all'angolo ODN : dunque tutto l'angolo H è uguale all'angolo RDN . Si conduca ora dal centro O al punto H la retta OH , avremo i due trian-

goli rettangoli POH, OHM coincidenti, perchè hanno l'ipotenusa OH comune, ed i cateti uguali PO, OM: quindi l'angolo HOP è uguale all'angolo HOM: dunque OH divide in mezzo l'angolo MOP. Si conduca ora da O al punto D il raggio OD, i due triangoli ORD, ODN sono coincidenti, perchè hanno l'ipotenusa OD comune, ed uguali i cateti RD, DN metà delle due corde, e lati uguali del poligono: dunque OD divide per metà l'angolo RON: dunque le due rette condotte dallo stesso punto O ai due D, H dividono per metà lo stesso angolo RON: quindi queste due rette coincidono, e formano la sola OH: perciò i vertici H, D dei due angoli corrispondenti dei poligoni iscritto, e circoscritto, ed il centro del circolo sono in una stessa retta. Si conduca OCI, essendo CD parallela ad IH, i due triangoli OCD, OIH sono simili, perciò avremo $CD : IH = OD : OH$: nella stessa maniera sarà $BD : GH = OD : OH$. Avendo queste due proporzioni lo stesso rapporto $OD : OH$, avremo $CD : IH = DB : HG$; ma CD è uguale a BD; dunque IH è uguale ad HG. Si conosce da ciò come si possa dimostrare l'uguaglianza degli altri lati: quindi tutti i lati del poligono circoscritto sono uguali.

267. Avendo il poligono circoscritto tutti gli angoli uguali agli angoli dell'iscritto, ed i lati uguali sarà simile a questo, adempiendo le due condizioni, onde i poligoni (§. 231.) siano simili.

TEOREMA XXXVIII.

AVENDO ISCRITTO IN UN DATO CIRCOLO UN POLIGONO REGOLARE SI PUÒ SEMPRE ISCRIVERVI UN POLIGONO REGOLARE D'UN DOPPIO NUMERO LATI; E SE IL DATO POLIGONO È D'UN NUMERO PARI DI LATI, NEL CIRCOLO SI PUÒ ISCRIVERE UN POLIGONO REGOLARE, CHE ABBA LA META' DEL NUMERO DE'SUOI LATI.

268. *Dimostr.* Sia iscritto il poligono ABDCE (fig. 110.), dal centro O si cali sul lato BD il raggio normale OP, e

si congiungano i punti B, P; P, D colle rette BP, PD, queste saranno due corde uguali, perchè gli archi BP, PD sono uguali. Se si faccia lo stesso negli altri lati del poligono iscritto si avrà un poligono iscritto coi lati uguali, perchè ognuno sottende un arco metà di quello settoso da un lato del poligono proposto. Gli angoli poi BPD, DMC ec. del nuovo poligono sono uguali, perchè sono angoli iscritti insistenti sopra archi uguali, che sono l'intera circonferenza toltagli l'arco come BPD di costante valore sotteso da un lato del poligono proposto.

269. Se poi si abbia il poligono BPDMC ec. (fig. 110.) di pari numero di lati iscritto, congiungendo con corde a due a due gli archi sottesi, dal poligono stesso si avrà il poligono regolare iscritto BDCEA della metà del numero de'suoi lati. Questo poligono ha i lati uguali, perchè sono corde, che sottendono due degli archi uguali sottesi dai lati del poligono proposto. Il poligono poi ha gli angoli uguali, perchè tutti sono angoli iscritti insistenti sopra archi, che sono la intera circonferenza tolti quattro archi sottesi dai lati del poligono proposto. Così l'angolo BDC insiste sull'arco BAEC, che è l'intera circonferenza meno l'arco BPDMC che è formato dai quattro archi BP, PD, DM, MC sottesi dai lati del poligono proposto. Dopo ciò mostriamo quali siano i poligoni regolari, che si sanno iscrivere in un dato circolo.

TEOREMA XXXIX.

UN QUADRATO S'ISCRIVE IN UN CIRCOLO CONGIUNGENDO
A DUE A DUE L'ESTREMITÀ' DI DUE DIAMETRI
FRA LORO NORMALI.

270. *Dimostr.* Sia ABCD (fig. 111.) un quadrato iscritto in un dato circolo, e si conducano in esso le rette BD, AC. Essendo l'angolo ABC retto, ABC sarà un semicircolo (§. 102.),

quindi AC è un diametro. Essendo anche BCD un angolo retto, la retta BD sarà un diametro. Poichè i lati BA, BC sono uguali, gli archi sottesi BMA, BNC saranno uguali, quindi sarà ciascuno un quadrante, e perciò saranno retti gli angoli BOC, BOA: quindi i due diametri BD, AC sono normali, ed il quadrato iscritto ABCD si ottiene unendo a due a due le loro estremità.

TEOREMA XL.

UN ESAGONO REGOLARE S'ISCRIVE IN UN DATO CIRCOLO
PORTANDO SEI VOLTE IL RAGGIO INTORNO ALLA
CIRCONFERENZA COME ALTRETTANTE CORDE.

271. *Dimostr.* Sia ABCDEF (fig. 109.) un esagono regolare iscritto; si conducano all'estremità F, E d'un suo lato FE i raggi FO, OE. L'angolo FOE essendo misurato dall'arco FRE sarà misurato da un sesto della circonferenza, o dalla terza parte di mezza circonferenza: ma mezza circonferenza misura due angoli retti, dunque l'angolo FOE vale il terzo di due angoli retti, o il terzo della somma dei triangoli del triangolo OFE: dunque per gli altri due angoli presi insieme OFE, OEF rimarranno due terzi di due retti, ma questi due angoli sono uguali a causa dei due lati uguali OF, OE, dunque anche ognuno di questi vale un terzo di due retti: quindi i tre angoli del triangolo FOE sono uguali, e perciò il lato FE dell'esagono iscritto è uguale al raggio FO: quindi il raggio si può portare come corda esattamente sei volte nella circonferenza. Gli angoli poi del nostro esagono sono uguali perchè iscritti, ed insistenti sopra archi uguali, che sono l'intera circonferenza meno il doppio d'un arco sotteso dal lato dell'esagono. Così l'angolo FED è iscritto, ed insiste sull'arco FABCD, che è l'intera circonferenza meno l'arco FED doppio dell'arco FRE sotteso da un lato FE dell'esagono.

272. *Scolio.* Si Poteva dimostrare equiangolo il triangolo FOE per mezzo della misura in gradi degli angoli. La corda FE sottende la sesta parte della circonferenza : quindi l'arco FRE è il sesto di 360° , o 60° . La somma dei tre angoli del triangolo FOE vale gradi 180, togliendovi il 60 rimarranno gradi 120 per la somma dei due angoli OFE, OEF ; ma questi sono uguali , dunque ciascuno vale la metà di gradi 120 , ossia vale gradi 60° : quindi i tre angoli del triangolo FOE sono uguali.

273. Abbiamo scelta la prima dimostrazione , affinché i teoremi della nostra geometria siano esenti dal calcolo, che noi introduciamo solamente nella misura delle figure. Così ci siamo serviti del calcolo nella misura degli angoli, e nel capo della misura delle superficie.

TEOREMA XLI.

DIVISO IL RAGGIO D'UN DATO CIRCOLO IN MEDIA ED ESTREMA RAGIONE, LA PARTE MAGGIORE SI PUÒ PORTARE ESATTAMENTE COME CORDA DIECI VOLTE SULLA CIRCONFERENZA, E COSÌ ISCRIVERE UN DECAGONO REGOLARE NEL NETTO CIRCOLO.

274. *Dimostr.* Sia il circolo ABDFO (fig.112.), nella metà del quale vi siano cinque corde uguali AB, BC, CD, DE, EF. Si conducano i raggi AM, MC, MD, MF. Si meni AD, che segnerà CM in un punto I; dimostro, che IM è la parte maggiore del raggio CM diviso in media, ed estrema ragione in I, e che è uguale a CD supposto lato del decagono regolare iscritto. Nel triangolo AMD isoscele l'angolo MAD è uguale ad ADM; ma MAD , o FAD insiste sull'arco DEF, che è doppio di DRE, o di CSD, sul quale iusiste l'angolo al centro CMD : dunque abbiamo due angoli MAD, CMD il primo iscritto, e l'altro col vertice al

centro, il primo insistente sull'arco doppio dell'arco, sul quale insiste il secondo: quindi il primo angolo è uguale al secondo; dunque anche ADM è uguale a CMD; perciò il triangolo IMD è isoscele, onde ID è uguale ad IM. L'angolo AIM esterno è uguale alla somma dei due angoli interni ed opposti IDM, IMD, ossia è doppio di uno IMD di questi due angoli uguali: ma l'angolo AMC è ancor doppio di CMD, perchè insiste sull'arco ABC doppio di CSD: quindi AIM, AMI sono uguali: dunque il triangolo AIM è isoscele. Il triangolo CID è equiangolo con AMI, perchè CID è uguale ad AIM; gli angoli CDA, DAF iscritti insistono sugli archi uguali ABC, DEF: dunque l'angolo DCI è uguale ad IMA: ma sono uguali gli angoli AIM, AMI: dunque sono uguali gli angoli DCI, CID, onde CD è uguale a DI, è uguale ad IM. Nei detti due triangoli simili CID, AIM abbiamo la proporzione $CD : AM = CI : IM$; ossia ponendo CM invece di AM, ed IM invece di CD, avremo $IM : CM = CI : IM$: quindi (§. 196.) il quadrato fatto sopra IM è uguale al rettangolo fatto dall'intero raggio CM, e dall'altra parte CI: perciò veramente CD lato del decagono regolare iscritto uguale ad IM è la parte maggiore del raggio diviso in media ed estrema ragione.

TEOREMA XLII.

IL LATO DEL PENTADECAGONO REGOLARE ISCRITTO IN UN CIRCOLO È LA CORDA DELL'ARCO BC (fig. 113.), CHE È LA DIFFERENZA DEI DUE ARCHI ABC, AB, L'UNO SOTTESO DAL LATO DELL'ESAGONO, L'ALTRO DAL LATO DEL DECAGONO, AMBEDUE POLIGONI REGOLARI, CHE SI POSSONO ISCIVERE NEL DATO CIRCOLO.

275. *Dimostr.* L'arco ABC è un sesto della circonferenza, ed AB un decimo, dunque BC è la differenza fra un se-

sto, ed un decimo della circonferenza stessa : sottratto $\frac{1}{10}$ da $\frac{1}{6}$ viene $\frac{1}{15}$: dunque l'arco BC è un quindicesimo di circonferenza, e però la sua corda si può portare esattamente 15 volte nella circonferenza.



CAPO SESTO

FORMOLE PER CALCOLARE ALCUNE GRANDEZZE NEI POLIGONI REGOLARI ISCRITTI E CIRCOSCRITTI, E LA CIRCONFERENZA, E SUPERFICIE DEL CIRCOLO



PROBLEMA I.

DETERMINARE IN VALORE DEL RAGGIO DEL CIRCOLO
IL LATO DEL QUADRATO ISCRITTO, E DEL DECAGONO.

276. *Soluzione.* Nel triangolo rettangolo BOC (fig. 111.) abbiamo, a causa di $BO = OC$, $BC^2 = 2BO^2$: se dunque si esprime per r il raggio del circolo si ha $BC^2 = 2r^2$, e $BC = r\sqrt{2}$; lato del quadrato iscritto dato nel raggio. Pel lato del decagono sia x la parte maggiore del raggio diviso in media ed estrema ragione, l'altra parte sarà $r - x$, ed avremo $x^2 = (r - x)r$, che evidentemente esprime, essere il quadrato sulla parte maggiore x uguale al rettangolo fatto dall'altra parte $r - x$, e dal raggio. Se si risolve l'equazione antecedente avremo x dato in r , o il lato del decagono dato per mezzo del raggio. La solu-

zione è

$$x = \frac{-r \pm r\sqrt{5}}{2} ;$$

ove si deve prendere il segno più, perchè coll'altro segno meno si avrebbe un valor negativo, e maggiore del raggio, il che non può essere, essendo il lato del esagono regolare iscritto uguale al raggio : quindi il valor domandato dal lato del decagono è

$$x = \frac{r(-1 + \sqrt{5})}{2} .$$

PROBLEMA II.

DETERMINARE IL LATO DEL PENTADECAGONO REGOLARE
ISCRITTO PER MEZZO DEL RAGGIO DEL CIRCOLO.

277. *Soluz.* Siano (fig. 113.) AB, AC i lati del decagono, ed esagono iscrivibili nel circolo AOCB, e BC il lato del pentadecagono. Si conduca il diametro AO; e le corde BO, CO. Si esprima con d il lato del decagono, e con e il lato dell'esagono. Il triangolo OCA rettangolo in C (§. 248.) si dà

$$OC = \sqrt{AO^2 - AC^2} = \sqrt{4r^2 - e^2} ;$$

dal triangolo OAB abbiamo

$$OB = \sqrt{AO^2 - AB^2} = \sqrt{4r^2 - d^2}.$$

Ora nel quadrilatero iscritto ABCO (§. 259.) abbiamo

$$BC \cdot AO + AB \cdot CO = OB \cdot AC ,$$

$$\text{ossia} \quad 2BC \cdot r + d\sqrt{4r^2 - e^2} = e\sqrt{4r^2 - d^2}$$

$$BC = \frac{e\sqrt{4r^2 - d^2} - d\sqrt{4r^2 - e^2}}{2r} ;$$

ora (§. 271, 274.)

$$c = r, \quad d = r \frac{(-1 + \sqrt{5})}{2},$$

dunque

$$BC = \frac{r}{4} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} = \frac{r}{4} (-1 + \sqrt{5})\sqrt{3}$$

valore domandato.

PROBLEMA III.

ASSEGNARE UNA FORMOLA, PER LA QUALE DATO IL RAGGIO D'UN CIRCOLO, ED IL LATO DI UN POLIGONO REGOLARE ISCRITTO SI POSSA CALCOLARE UN LATO DEL POLIGONO REGOLARE DELLA META' DEL NUMERO DE' SUOI LATI.

278. *Soluzione.* Sia dato il lato PD (fig. 110.), e si voglia il lato BD. Si conduca da P il diametro PE, e le corde BE, DE. Si dica r il raggio del circolo, p il lato BD, e p il lato PD. Dal triangolo rettangolo PBE abbiamo

$$BE = DE = \sqrt{(PE^2 - PB^2)} = \sqrt{(4r^2 - p^2)}$$

Ora dal quadrilatero iscritto BPDE abbiamo

$$PE \cdot BD = 2PD \cdot BE,$$

ossia
$$rP = p\sqrt{(4r^2 - p^2)},$$

e
$$P = \frac{p\sqrt{(4r^2 - p^2)}}{r} (a).$$

Sapendosi, che r è il valore del lato dell'esagono regolare iscritto si voglia trovare il lato del triangolo equilatero iscritto. Si ponga $p = r$, e sarà

$$P = \frac{r^2\sqrt{3}}{r} = r\sqrt{3}.$$

Si voglia il lato del pentagono sarà

$$p = \frac{r(-1 + \sqrt{5})}{2},$$

e
$$P = \frac{r}{4} (-1 + \sqrt{5}) \sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}.$$

279. Per l'inverso del problema si risolva l'equazione superiore (a) e si troverà

$$p = \sqrt{(2r^2 \pm r\sqrt{(4r^2 - P^2)})} (b).$$

Poiché dopo il quadrato iscritto, che poi non si può avere da poligono iscritto di una metà di numero di lati, non vi è poligono iscritto, il di cui lato valga più del raggio, nella formola superiore (b) dovrà prendersi dentro il primo radicale il segno meno, e perciò avremo

$$p = \sqrt{(2r^2 - r\sqrt{(4r^2 - P^2)})}.$$

Conoscendosi il lato del triangolo equilatero iscritto $r\sqrt{3}$ si voglia trovare il lato dell'esagono. Essendo $P = r\sqrt{3}$ sarà $p = \sqrt{(2r^2 - r^2)} = r$. Si voglia il lato dell'ottagono iscritto. Si ponga $P = r\sqrt{2}$ sarà

$$p = r\sqrt{(2 - \sqrt{2})}.$$

PROBLEMA IV.

ASSEGNARE UNA FORMOLA, PER LA QUALE DATO IL LATO DEL
POLIGONO ISCRITTO SI POSSA TROVARE QUELLO
DEL POLIGONO SIMILE CIRCOSCRITTO.

280. *Soluzione.* Dai due triangoli simili IOH, CDO

(fig. 110.) abbiamo $HI : CD = OM : ON$. Esprimendo con c il lato del poligono circoscritto, e con i quello dell'iscritto avremo

$$ON = \sqrt{OC^2 - CN^2} = \sqrt{\left(r^2 - \frac{i^2}{4}\right)} = \frac{\sqrt{4r^2 - i^2}}{2};$$

quindi la proporzione antecedente diventa

$$c : i = r : \frac{\sqrt{4r^2 - i^2}}{2}; \quad c = \frac{2ir}{\sqrt{4r^2 - i^2}}.$$

Si voglia il lato del quadrato circoscritto. Per l'iscritto abbiamo $i = r\sqrt{2}$: dunque

$$c = \frac{2r^2\sqrt{2}}{\sqrt{4r^2 - 2r^2}} = 2r.$$

Pel lato dell'esagono circoscritto essendo $i = r$ sarà

$$c = \frac{2r}{\sqrt{3}}.$$

Pel lato del triangolo equilatero circoscritto, essendo $i = r\sqrt{3}$ sarà

$$c = 2r\sqrt{3}.$$

PROBLEMA V.

DARE IL METODO, ONDE COGNITO IL RAGGIO SI POSSA
DETERMINARE LA CIRCONFERENZA D'UN CIRCOLO.

281. *Soluzione.* Si supponga uno il raggio del proposto circolo. Egli è certo, che crescendo indefinitamente il numero dei lati di un poligono iscritto, e circoscritto i loro perimetri indefinitamente si accostano alla circonferenza: se dunque si calcolassero successivamente i perimetri di questi poligoni, sempre meno tra loro differirebbero, cosic-

chè, se si fissa un dato numero di cifre decimali per es. sette, si giungerà ai perimetri di due poligoni iscritto, e circoscritto, che avranno comuni queste prime sette cifre decimali, in guisa, che prendendo il numero con questo stesso decimale ad esprimere la circonferenza del circolo compreso fra i due detti perimetri, l'errore sarebbe minore di 0.0000001.

282. Per ottenere ciò si cominci dal perimetro d' un dato poligono regolare iscritto per esempio dal quadrato. Se il raggio è 1 un suo lato è $\sqrt{2}$, ed il suo perimetro è $4\sqrt{2}$. Cognito il lato del quadrato iscritto pel problema (§. 280.) si potrà determinare quello del circoscritto, quindi moltiplicandolo per 4 si troverà il suo perimetro. Cognito il lato del quadrato iscritto pel problema (§. 279.) si troverà quello dell'ottagono, che moltiplicato per 8 ci darà il suo perimetro. Dal lato dell'ottagono iscritto si troverà quello dell'ottagono circoscritto, di cui si troverà il perimetro moltiplicando per otto il detto lato. Si vede poi che non è necessario fin dal principio di moltiplicare il lato del poligono iscritto, e circoscritto pel numero dei lati: basterà ciò fare quando i lati del poligono iscritto, e del circoscritto hanno delle prime cifre decimali comuni. Nella matematica superiore vi è metodo più spedito per trovare la circonferenza cognito il raggio.

TEOREMA XLIII.

I PERIMETRI DEI POLIGONI REGOLARI DELLO STESSO NUMERO
DI LATI ISCRITTI SONO COME I RAGGI DEI CIRCOLI,
NEI QUALI SONO ISCRITTI.

283. *Dimostr.* Siano i due circoli FBD, IMO (fig. 114.), nei quali siano iscritti due poligoni dello stesso numero di lati per es. due esagoni regolari; questi sono equiangoli (§. 83.); avendo poi ciascuno i lati uguali, fra due d'nn

poligono vi sarà lo stesso rapporto 1, che fra due lati dell'altro; quindi $AB : BC = HI : IL$, ossia $AB : HI = BC : IL$: con ciò avremo la serie di rapporti uguali $AB : HI = BC : IL = CD : LM = DE : MN = FE : NO = FA : HO$. Di qui (§. 210.) $AB + BC + CD + DE + FE + FA : HI + IL + LM + MN + NO + HO = AB : HI$: ma per i due triangoli simili AGB , HPI si ha $AB : HI = AG : HP$: dunque $AB + BC + CD + DE + FE + FA : HI + IL + LM + MN + NO + HO = AG : HP$: cioè i perimetri di due poligoni regolari d'uno stesso numero di lati iscritti in due cerchi sono come i raggi dei cerchi stessi.

284. Nella matematica si distinguono le quantità in costanti, e variabili. Costanti sono quelle, che mantengono lo stesso valore in una data ipotesi. Così posto un dato circolo, costanti sono il suo raggio, diametro, periferia, e superficie, perchè posto lo stesso circolo queste grandezze non cambiano. Variabili sono quelle quantità, che in grandezza possono cambiare a piacere; tali sono in un dato circolo le corde, gli angoli iscritti, i perimetri, e le superficie dei poligoni iscritti, e circoscritti. Limite d'una data grandezza è quella, cui questa grandezza va indefinitamente accostandosi ne'suoi indefiniti aumenti, e decrementi senza mai potervi giugnere. Così la periferia d'un circolo, e la sua superficie sono i limiti dei perimetri, e delle superficie dei poligoni iscritti e circoscritti; perchè moltiplicandosi indefinitamente i loro lati i loro perimetri indefinitamente si accostano alla circonferenza del circolo, senza mai potervi arrivare; e crescendo indefinitamente la superficie del poligono iscritto, e decrescendo quella del poligono circoscritto si accostano alla superficie del detto circolo senza potervi arrivare.

Le quantità costanti si esprimono colle prime lettere dell'alfabeto a, b, c ec., come le quantità cognite; e le variabili per mezzo delle ultime x, y, z ec. come le incognite.

L E M M A

Avendosi una equazione fra quantità variabili, e costanti, le variabili parzialmente sono uguali, e parzialmente sono uguali le costanti.

285. *Dimostr.* Sia un'equazione $a + x = b + y$, ove a, b esprimano quantità costanti, ed x, y quantità variabili: da questa equazione avremo $a - b = y - x$. Se y non è uguale ad x esiste la differenza $y - x$, che essendo di due variabili sarà variabile: ma in questa stessa ipotesi di y differente da x non essendo zero $a - b$, questa esprimerà una differenza costante: dunque dovrebbe essere una differenza costante uguale ad una variabile, cioè una quantità di valor fisso uguale ad una quantità a piacere, ciò, che è assurdo, dunque $y - x = 0$, d'onde $a - b = 0$, e perciò $0 = 0$, equazione sempre esistente. Dalle due dette uguaglianze derivano $x = y$, $a = b$, cioè le costanti fra loro, e le variabili fra loro sono uguali.

TEOREMA XLIV.

LE PERIFERIE DI DUE CIRCOLI QUALUNQUE SONO FRA LORO
COME I LORO RAGGI.

286. *Dimostr.* Siano c, c' le circonferenze di due circoli, ed r, r' i loro raggi; s'intendano iscritti in essi due poligoni regolari dello stesso numero di lati, ed indefinitamente crescenti. Siano x, x' le differenze fra i loro perimetri, e le circonferenze c, c' ; questi perimetri saranno espressi da $c - x, c' - x'$: ora questi perimetri sono (§. 283.) come i raggi dei circoli, nei quali i detti poligoni sono iscritti: dunque $c - x : c' - x' = r : r'$, e $cr' - xr' = c'r - x'r$. Questa equazione sussiste negli

indefiniti aumenti del numero dei lati di ambedue i poligoni, ossia negli indefiniti avvicinamenti dei loro perimetri alle periferie c , c' dei due cerchi, o finalmente per gl' indefiniti impiccolimenti di x , x' : quindi nell' antecedente equazione le quantità c , c' , r , r' sono quantità costanti, ed x , x' sono variabili: dunque pel lemma antecedente sarà $cr' = c'r$, dalla quale $c:c' = r:r'$, cioè le circonferenze dei cerchi sono come i raggi.

287. La normale ON calata dal centro O (fig. 110.) di un poligono regolare ABDCE iscritto, che è lo stesso centro del circolo circoscritto, sopra un lato qualunque CD si si chiama *apotema*.

TEOREMA XLV.

LA SUPERFICIE D' UN POLIGONO ISCRITTO È UGUALE AL SUO PERIMETRO MOLTIPLICATO PER LA META' DELL'APOTEMA; E LA SUPERFICIE DEL POLIGONO CIRCOSCRITTO È UGUALE AL SUO PERIMETRO MOLTIPLICATO PER LA META' DEL RAGGIO DEL CIRCOLO ISCRITTO.

288. *Dimostr.* La superficie del triangolo COD (fig. 110.) è espressa da CD moltiplicato per la metà di ON. Se si formano sopra gli altri lati del poligono iscritto altrettanti triangoli come COD saranno tutti coincidenti con COD, e dello stesso apotema ON, quindi la superficie del poligono di lati n sarà espresso da n volte la superficie COD, ed il suo valore sarà $n \cdot CD \cdot \frac{ON}{2}$, ma $n \cdot CD$ è il perimetro del detto poligono, quindi la sua superficie è il suo perimetro moltiplicato per la metà dell'apotema.

289. La superficie del triangolo IOH è espressa da IH $\cdot \frac{OM}{2}$, e la superficie di tutto il poligono circoscritto

di n lati sarà espressa da $n \cdot IH \cdot \frac{OM}{2}$: ma $n \cdot IH$ è il suo perimetro : quindi la superficie d'un poligono regolare circoscritto è uguale al suo perimetro moltiplicato per la metà del raggio del circolo iscritto.

TEOREMA XLVI.

LA SUPERFICIE D'UN CIRCOLO È UGUALE ALLA SUA CIRCONFERENZA Moltiplicata per la metà' del RAGGIO; E LE SUPERFICIE DEI CIRCOLI SONO COME I QUADRATI DE' RAGGI.

290. *Dimostr.* In questo circolo vi sia iscritto un poligono regolare d'un numero qualunque di lati, e che questo numero vada continuamente crescendo. Se c è la circonferenza del circolo circoscritto si potrà esprimere con $c - x$ il perimetro del nostro poligono, nel quale indefinitamente crescendo il numero de'lati esso s'anderà accostando indefinitamente alla circonferenza c , onde x anderà indefinitamente decrescendo. Sia il raggio OM (fig. 110.) uguale ad r , ed $MN = y$: l'apotema ON sarà $r - y$, ove parimenti la y anderà indefinitamente decrescendo quando il poligono anderà indefinitamente accostandosi al circolo: quindi la superficie del poligono sarà espressa da $(c-x) \frac{(r-y)}{2}$. Se S esprima la superficie del ciculo, po-

trà indicarsi con $S - z$ quella del poligono, essendo z la differenza fra l'una e l'altra superficie, che pure anderà indefinitamente decrescendo quando il poligono si accosti indefinitamente al circolo: dunque avremo

$$S - z = (c - x) \frac{(r - y)}{2},$$

ossia

$$S - z = c \cdot \frac{r}{2} - x \cdot \frac{r}{2} - \frac{cy}{2} + \frac{xy}{2}.$$

In questa le costanti sono S , c , r , e le variabili x , y , z : dunque pel lemma

$$S = c \cdot \frac{r}{2} :$$

291. *Scolio 1.º* Abbiamo veduto (§. 282.) come cognito il raggio, che si è supposto uno si possa trovare la sua circonferenza. Se si supponga piuttosto il diametro uno, come comunemente dai Geometri, in tal caso il raggio è $\frac{1}{2}$. Essendosi dimostrato, che (§. 286.) le circonferenze sono come i raggi, si dovrà prendere la metà della circonferenza trovata, quando invece del raggio uno si suppone $\frac{1}{2}$. Archimede trovò, che la circonferenza è al diametro come 22 a 7. Mezio con più approssimazione trovò, che la circonferenza è al diametro come 355 a 113.

292. Se dunque sia dato un raggio r , secondo Archimede faremo la proporzione per determinare la sua circonferenza x ; $22 : 7 = x : 2r$, ed $x = \frac{22 \times 2r}{7}$: cioè si

deve moltiplicare il doppio del raggio dato pel rapporto $\frac{22}{7}$ onde trovare la sua circonferenza. Viceversa se si conoscesse la circonferenza c , e si volesse il suo diametro, e quindi il raggio r , si farebbe la proporzione

$$22 : 7 = c : 2r \quad \text{e} \quad 2r = \frac{7}{22} \cdot c :$$

quindi si deve moltiplicare la circonferenza per $\frac{7}{22}$, onde avere il suo diametro.

293. Ma con indicibile approssimazione, supposto il diametro uno, si è trovata la circonferenza 3.14159265358979 ec. fino a 127 decimali. Se si prenda una parte di questo decimale, e si fissi il numero 3.1416, in tal caso, essendo la circonferenza come il raggio, o come il diametro, per

trovare la circonferenza di diametro $2r$ si moltiplicherà la circonferenza 3.1416 del diametro 1 per l'attuale diametro $2r$.

294. Se poi fosse data la circonferenza, e si volesse il suo diametro, si dividerà la data circonferenza per 3.1416. Trovata la circonferenza si avrà la superficie del circolo moltiplicando lo sua circonferenza per la metà del suo raggio. In generale nella matematica il numero 3.1416 si suole esprimere con π , essendo π la circonferenza di diametro uno. Se dunque si abbia il raggio r evidentemente la sua circonferenza sarà $\pi \cdot 2r$, o $2\pi r$. Moltiplicando questa per la metà del raggio r la superficie del circolo sarà espressa da πr^2 .

295. Se s esprime la superficie d'un circolo di raggio r , ed s' la superficie d'un altro di raggio r' , avremo $s = \pi r^2$, $s' = \pi r'^2$: d'onde $s : s' = r^2 : r'^2$: cioè le superficie dei circoli sono come i quadrati dei raggi.

296. *Scolio 2.º* Se sopra i cateti AC, CB d'un triangolo rettangolo ACB (fig. 115.), e sulla ipotenusa AB come diametri si descrivano tre circoli; la superficie del circolo nell'ipotenusa è uguale alla somma dei circoli nei cateti. Infatti abbiamo $AB^2 = AC^2 + CB^2$, e moltiplicando per $\frac{\pi}{4}$ sarà $\pi \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \pi \left(\frac{AC}{2}\right)^2 + \pi \left(\frac{CB}{2}\right)^2$ (§.294.), che è la nostra proposizione. Se poi sopra gli stessi cateti, e l'ipotenusa si descrivano tre poligoni simili, che indico con (p.AC), (p.CB), (p.AB), il poligono sull'ipotenusa è uguale alla somma dei poligoni sopra i cateti. Infatti abbiamo (§.261.) (p.AC):(p.CB) = $AC^2 : CB^2$; (p.AC) + (p.CB) : (p.CB) = $AC^2 + CB^2 : CB^2$: ossia (p.AC) + (p.CB) : $AC^2 + CB^2 = (p.CB) : CB^2$: ma (p.AB) : $AB^2 = (p.CB) : CB^2$: dunque (p.AC) + (p.CB) : $AC^2 + CB^2 = (p.AB) : AB^2$: ma $AC^2 + CB^2 = AB^2$; dunque (p.AC) + (p.CB) = (p.AB).



PARTE TERZA

DEI SOLIDI.



297. Un solido terminato da facce piane, che si uniscono in linee rette si chiama *poliedro*. Il solido AFKDB (fig. 116.) è un poliedro terminato dalle facce GHEF, HKCDE, AKCB ec.

298. Le rette, nelle quali le facce, o piani si uniscono nel poliedro si dicono *gli spigoli del solido*. Spigoli sono per es. le rette GH, AK, nelle quali si uniscono le facce GHEF, GHKA, e le facce GHKA, AKCB.

299. Gli angoli di più facce si uniscono nei loro lati contigui, ed i loro vertici si riuniscono in un punto. Lo spazio compreso fra questi piani nelle indefinite vicinanze del detto punto d'unione si chiama *angolo solido*, e questo punto si dice *vertice dell'angolo*. Per es. gli angoli GHE, GHK, KHE delle tre facce GHEF, GHKA, KHEDC unendosi nelle rette HG, KH, HE, i loro vertici si uniscono nel punto H: lo spazio interno circoscritto da queste facce considerato nella massima vicinanza del punto d'unione H si dice l'angolo solido H, ed H è il vertice di questo angolo.

300. Un poliedro, che abbia due facce poligoni coincidenti e paralleli, ed all'intorno tanti parallelogrammi quanti sono i lati di ciascuno di questi poligoni uniti nei lati contigui si dice *prisma*, ed i due poligoni si chiamano le *basi del prisma*. La (fig. 117.) presenta un prisma, nel quale le basi sono i due poligoni KFGHI, ABCDE, ed all'intorno si hanno i cinque parallelogrammi GC, HD, IE, FE, FB quanti sono i lati di uno dei due poligoni, questi parallelogrammi uniti negli spigoli HC, DI, KE, FA, GB.

301. Se poi il poliedro avendo una faccia poligona le

altre facce siano tanti triangoli quanti sono i lati del poligono, essendo questi triangoli uniti nei lati contigui, e perciò i loro vertici riuniti in un punto, il poliedro si chiama *piramide*; il poligono si chiama *la base della piramide*; ed il punto di riunione dei vertici di tutti i triangoli si chiama *il vertice della piramide*. Nella (fig. 118.) si ha la piramide ABCDES colla base poligona ABCDE, e colle facce triangolari ASB, BSC, CSD, DES, SAE, quanti sono i lati della base, essendo le facce contigue unite negli spigoli SB, SC, SD, SE, SA, ed i vertici dei triangoli uniti in S.

302. Se le basi del prisma sono due triangoli coincidenti si chiama *prisma triangolare*; e se la base della piramide è un triangolo si dice *piramide triangolare*; perchè in genere il prisma, e la piramide prendono la denominazione dal numero dei lati del poligono, che è la base; così si dice prisma, e piramide quadrangolare, pentagona, esagona ec. secondo che il poligono della base è un quadrilatero, un pentagono, un esagono. ec.

303. Il prisma triangolare, e la piramide triangolare sono i più semplici solidi, alli quali collo spezzamento si possono ridurre tutti gli altri.

304. Il prisma si dice *prisma retto* se i suoi spigoli siano normali alle due basi; si dirà *obliquo* se ciò non sia.

305. La piramide si dice *piramide retta*, se avendo per base un poligono regolare la normale calata dal suo vertice alla base cade nel centro del poligono. Quando ciò non avvenga si dirà *piramide obliqua*.

306. *L'altezza d'un prisma è una retta condotta fra le due basi prolungate se faccia duopo, e normale alle basi stesse*. Se il prisma è retto si vede chiaro, che l'altezza può essere uno dei suoi spigoli.

307. *L'altezza d'una piramide è la normale calata dal suo vertice sulla sua base prolungata se bisogni*.

308. Se le basi del prisma siano due parallelogrammi, il solido si chiama *parallelepipedo*, e sarà *parallelepipedo rettangolare* se le basi siano due rettangoli, e rettangoli le facce all'intorno.

309. Un prisma che abbia le basi quadrate, e le quattro facce intorno quadrate si chiama *cubo*.

310. Vi sono tre solidi di superficie curva, che sono molto considerati nella Geometria. Questi sono il *cilindro*, il *cono*, e la *sfera*.

311. Il cilindro è un prisma, in cui i poligoni delle due basi diventino due cerchi coincidenti (fig. 119.).

312. Il cono è un solido, a cui si riduce una piramide quando la sua base diventi un circolo (fig. 120.).

313. La sfera è un solido, in cui tutti i punti della superficie equidistano da uno interno, che si chiama *centro*.

314. Il cilindro è *retto* se calata dal centro del circolo superiore una normale al circolo inferiore cade sul centro di questo: quando ciò non avvenga il cilindro si dice *obliquo*.

315. Un cono è *retto* quando calata dal suo vertice una normale sulla base circolare cade nel centro. Quando ciò non si verifichi il cono si dice *obliquo*.

316. Il cilindro retto s'intende formato dal ravvolgersi di un rettangolo intorno alla sua altezza. Nella (fig. 119.) si supponga, che il rettangolo APCL si avvolga intorno all'altezza AL, la traccia, che si suppone lasciare la superficie APCL è la solidità del cilindro; la traccia lasciata dal lato PC è la superficie all'intorno del cilindro stesso.

317. Il cono retto s'immagina formato dalla traccia, che si suppone lasciare un triangolo rettangolo nel ravvolgersi intorno alla sua altezza. Così il cono (fig. 120.) BEDGA si suppone formato dal ravvolgersi il triangolo rettangolo AFD intorno all'altezza FA; e l'ipotenusa AD s'immagina generare colla sua traccia la superficie all'intorno del cono.

Il nostro trattato dei solidi sarà diviso in tre capi; nel primo tratteremo delle proprietà dei piani, dai quali sono terminati i solidi, nelle loro posizioni, ed intersezioni rispettive, e riguardo alle rette ad essi riferite; nel secondo tratteremo delle proprietà dei solidi; nel terzo della misura delle solidità, e delle superficie dei solidi.

CAPO PRIMO.

PROPRIETÀ DEI PIANI CONSIDERATI FRA LORO,
E RIGUARDO ALLE RETTE.

~~SONO~~

318. Già si è detto (§. 150.), che il piano è una superficie, sulla quale in tutti i sensi si possono disegnare linee rette.

319. Da ciò viene, che una retta, che ha due punti comuni con un piano vi coincide in tutta la sua estensione, altrimenti disegnando sul piano, e per quelli due punti una retta, si avrebbero due rette con due punti comuni, non coincidenti, ciò che è assurdo.

320. Quindi una retta non può trovarsi parte in un piano, e parte al di sopra, o al di sotto di esso: perchè nella parte ove coincidesse avrebbe due punti comuni col piano, e ciò basta, come si è detto, per coincidere con esso in tutta la sua estensione.

321. Dunque due piani, che si segano, si segano in linea retta. Infatti facendo passare una retta per due punti dell'intersezione, questa retta avrebbe due punti comuni coi due piani, quindi dovrebbe combaciare con essi, o essere comune ai due piani stessi; ma la linea di loro intersezione è la sola ad essi comune, dunque questa linea d'intersezione è retta.

322. Un piano può passare per tre punti fissi, e se questi non sono in linea retta fissano la posizione del piano. Che un piano possa passare per tre punti in linea retta viene da ciò, che passando per due, ossia, che avendo due punti comuni colla detta retta, deve coincidere con essa in tutta la sua estensione, onde deve passare pel terzo punto, per cui si suppone, che essa passi. Se poi i tre punti non siano in linea retta, si faccia passare per due di questi un pia-

no : facendo poi rotare questo piano intorno alla retta , che si suppone congiungere questi punti, dirigendosi verso il terzo, quando l'incontrerà avrà in se i tre punti, ed il detto piano sarà fissato di posizione, non essendo suscettibile di alcun moto.

323. Dunque un triangolo si trova in un piano, ed il piano sul quale si trova è fissato di posizione, perchè il piano passa per i suoi tre vertici, ed i lati congiungenti a due a due questi vertici hanno due punti comuni col detto piano, e perciò si trovano su di esso.

324. Gli angoli fatti in questo triangolo trovandosi sopra del piano, ne viene, che un angolo qualunque trovasi sopra d'un piano. Se ora si prolungano le rette, che formano l'angolo, a formare l'angolo verticale , tutte intiere queste rette dovranno trovarsi sopra del piano, perchè le loro parti, che formano il primo angolo vi si trovano: dunque due rette, che si segano si trovano in un piano.

TEOREMA I.

UNA NORMALE CALATA SULL'INTERSEZIONE DI DUE RETTE, E AD ESSE NORMALE, È NORMALE A QUALUNQUE ALTRA RETTA CHE PASSI PER LA DETTA INTERSEZIONE, E CHE SIA NEL PIANO DELLE RETTE, CHE SI SEGANO.

325. *Dimostr.* Sia la GO (fig.121.) normale in O alle due rette CD , AF , e per O sul piano di queste due rette si conduca comunque BE , dico, che GO è normale a BE . Si prendano le parti uguali OA , OF ; e le altre due parti uguali OC , OD , e si conducano AC , DF ; da un punto G della normale si conducano le rette GA , GB , GC , GD , GE , GF . I due triangoli COA , FOD , che hanno i lati uguali intorno agli angoli verticali COA , FOD sono coincidenti; dunque gli angoli OCA , ODE , e gli angoli CAO , OFD sono uguali, ed uguali sono i lati CA , FD .

I due triangoli OCB , OED sono coincidenti, perchè hanno gli angoli uguali OCB , ODE , gli angoli verticali COB , DOE , ed i lati uguali OC , OD : dunque le rette OB , OE sono uguali, ed uguali CB , DE . I triangoli rettangoli GOC , GOD sono coincidenti; dunque GD , GC sono uguali. Si proverà ancora, che sono uguali le rette GA , GF colla coincidenza dei triangoli GOA , GOF : dunque sono coincidenti i triangoli GDF , GAC , che hanno tutti i lati uguali: dunque gli angoli GDE , GCB sono uguali: quindi i triangoli GBC , GDE , che hanno i lati uguali intorno agli angoli uguali GCB , GDE sono coincidenti, perciò le rette GE , GB sono uguali; dunque i triangoli GOB , GOE , che hanno tutti i lati uguali sono coincidenti, onde gli angoli GOB , GOE sono uguali, e perciò GO è normale sopra BE .

326. *Scolio.* Una retta, che cade così sopra d'un piano, che è normale a tutte le rette, che dal suo piede si conducono su questo piano dicesi *normale al piano*. Da ciò, e dal teorema dimostrato si ricava, che una retta calata all' intersezione di due altre giacenti sopra d'un piano, e a queste normale, è normale al piano, perchè è normale a qualunque retta dal suo piede condotta nel piano; dunque affinchè una retta sia normale ad un piano basta, che sia normale nell'intersezione a due rette descritte nel piano.

327. *Coroll. 1.º* Tutte le oblique GD , GE , GF , GC ec. sono maggiori della normale GO , perchè sono oblique, che si trovano nello stesso piano colla normale, e colla normale da un punto cadono sulla stessa retta: quindi sono nel caso del (§. 34.). Da ciò viene, che la più corta retta da un punto al piano è la normale calata dal punto al piano stesso.

328. *Coroll. 2.º* Da un punto non si possono calare due normali sopra d'un piano, nè da un punto del piano si possono sopra di esso elevare due normali. Infatti nell'uno e nell'altro caso le due normali, perchè congiunte ad angolo sarebbero in un piano (§. 324.). Si consideri dunque questo

piano, che col proposto si segnerà in una retta. Le due normali calate dal punto sul piano proposto dovrebbero essere due normali alla retta d'intersezione, ciò che è assurdo. Le due rette elevate dallo stesso punto normali sopra il piano dovrebbero essere due normali ad una retta elevata da uno stesso suo punto, ciò che è parimente assurdo (§. 113.).

TEOREMA II.

SE NEL PIANO OP (fig. 122.) VI SIA UNA RETTA DB , E SIA SUL DETTO PIANO CALATA LA NORMALE AE , QUALORA DAL PIEDE A DELLA NORMALE SI CALI ALLA RETTA DB LA NORMALE AC , LA STESSA DB SARÀ NORMALE AL PIANO EAC .

329. *Dimostr.* Si conduca EC , e prese le parti uguali DC , CB si menino le rette ED , EB , AB , AD . Le rette AD , AB sono uguali, dunque i due triangoli rettangoli EAD , EAB sono coincidenti, quindi sono uguali le rette EB , ED : perciò EC che va al mezzo C di BD è a questa normale: dunque BD è normale alle due rette CE , CA , e perciò (§. 326.) è normale al piano EAC , come si doveva dimostrare.

330. *Coroll.* Se ad una retta BD (fig. 122.) in un piano dal piede A della normale AE sopra di esso si cali una normale AC , e da un punto qualunque E della normale si conduca all'intersezione C della normale AC colla retta DB una retta EC , questa è normale alla retta stessa DB .

TEOREMA III.

SE UNA DI DUE PARALLELE È NORMALE AD UN PIANO
L'ALTRA PURE DEVE ESSERE NORMALE.

331. *Dimostr.* Siano (fig. 123.) EF , DA parallele, e la EF normale al piano RO , dico, che è anche normale DA . Le

parallele sono in un piano, perchè così si sono considerate sempre. Si congiungano i punti F, A, e da un punto a piacere E di FE si conduca EA. Tutte queste rette EA, FA, EF, DA sono sopra un piano. Nel piano RO conducete BC normale ad FA sarà anche normale (§. 330.) ad EA, perciò BC sarà normale al piano EFAD: quindi sarà normale a DA: ma per le parallele è retto DAF: dunque DA è normale alle rette AF, AB condotte dal suo piede nel piano RO, onde a questo è normale.

332. *Coroll.* 1.° Se due rette EF, DA (fig. 123.) sono normali ad un piano RO sono parallele, perchè se in questa ipotesi DA non fosse parallela ad EF, da A si potrebbe menare questa parallela, quindi farebbe con FA un angolo retto: ma per ipotesi DA, che è nello stesso piano di questa parallela fa con FA un angolo retto, essendo normale al piano, dunque da uno stesso punto si potrebbero nello stesso piano elevare due normali ad una retta, ciò che è assurdo (§. 113.)

333. *Coroll.* 2.° Se due rette A, B sono parallele ad una terza C, che non è nel loro piano, sono parallele fra loro. Conducete un piano normale alla retta C, sarà normale (§. 331.) alle due parallele A, B: dunque A, B sono normali ad un piano, e perciò sono (§. 332.) parallele.

334. Una retta si dice parallela ad un piano quando prolungata da ambe le parti quanto si voglia non può incontrare il piano. Due piani sono paralleli quando prolungati da qualunque parte non s'incontrano.

TEOREMA IV.

UNA RETTA PARALLELA AD UN'ALTRA DESCRITTA
IN UN PIANO È PARALLELA AL PIANO.

335. *Dimostr.* Per le due rette parallele si conduca un piano, è chiaro, che la retta al di sopra del piano non

potrà con questo incontrarsi, che in qualche punto dell'intersezione dei due piani, ma questa e la retta parallela colla quale non può incontrarsi, dunque non s'incontrerà neppur col piano.

TEOREMA V.

DUE PIANI PERPENDICOLARI AD UNA RETTA
SONO PARALLELI.

336. *Dimostr.* La retta normale ai due piani è normale a qualunque retta condotta per i suoi piedi sopra gli stessi piani. Se ora s'immagina, che i due piani s'incontrino, da uno dei punti d'incontro si conducano ai due piedi della detta normale due rette, queste saranno due normali condotte dallo stesso punto sopra una retta, ciò ch'è assurdo.

TEOREMA VI.

LE DUE RETTE D'INTERSEZIONE D'UN PIANO CON
DUE PIANI PARALLELI SONO PARALLELE.

337. *Dimostr.* Poichè se le dette due rette s'incontrassero, nel punto d'incontro si unirebbero ancora i due piani paralleli, che le rette in essi descritte non abbandonano mai.

TEOREMA VII.

UNA RETTA NORMALE AD UN PIANO È NORMALE
AL PIANO PARALLELO.

338. *Dimostr.* Siano due piani A, B paralleli, ed una retta intermedia normale al piano A; dal piede di questa retta nel piano B in questo si conduca una retta, e per questa, e l'intermedia si conduca un piano intermedio, che in una retta segnerà il piano A, questa retta sarà normale

alla retta intermedia fra i due piani; ora pel teorema antecedente le due rette d'intersezione del piano intermedio coi due piani A, B paralleli sono parallele: ma l'intersezione nel piano A è normale alla retta intermedia: dunque a questa retta deve essere normale anche l'intersezione nel piano B; questa è una retta qualunque su questo piano, dunque la retta intermedia normale al piano A è normale al piano B, perchè è normale a qualunque retta condotta in questo piano dal suo piede.

TEOREMA VIII.

DUE RETTE PARALLELE FRA PIANI PARALLELI
SONO UGUALI.

339 *Dimostr.* Per queste rette fate passare un piano, che segnerà in due rette i piani paralleli. Queste saranno parallele (§. 337.), le quali colle due parallele date formeranno un parallelogrammo, in cui queste due saranno uguali come lati opposti.

340. *Coroll.* I due piani paralleli sono equidistanti in tutti i punti; perchè condotte le normali fra i piani saranno queste parallele, e perciò uguali.

TEOREMA IX.

DUE ANGOLI NON SITUATI NELLO STESSO PIANO, COI LATI
RISPETTIVAMENTE PARALLELI, E DIRETTI DALLA STESSA
PARTE SONO UGUALI, ED I PIANI NEI QUALI SI
TROVANO SONO PARALLELI.

341. *Dimostr.* Siano gli angoli CAE, DBF (fig. 124.) e sia AC parallela a BD, AE parallela a DF. Si prenda AC uguale a BD, ed AE uguale a BF, e si conducano le rette CE, DF; AB, CD, EF. Essendo AC uguale, e parallela a

BD sarà AB uguale e parallela a CD. Essendo AE uguale e parallela a BF sarà AB uguale e parallela ad EF: quindi FE (§. 333.) sarà uguale, e parallela a CD, perciò CE sarà uguale e parallela a DF; dunque i due triangoli ACE, DBF sono coincidenti, onde l'angolo CAE è uguale a DBF.

342. Li piani poi nei quali giacciono i due triangoli sono paralleli. Non sia se è possibile il piano CAE parallelo a DBF, sempre da B si potrà condurre un piano parallelo a DBF. Supponiamo, che questo seghi i lati CD, EF in G, ed H. Essendo le rette AB, GD, HF parallele fra piani paralleli saranno uguali (§. 339.), ma sono già uguali le rette AB, CD, EF, dunque GD è uguale a CD, ed HF uguale ad EF, ciò che è assurdo.

343. *Coroll.* Due piani ABFE; ABDC (fig. 124.) segandosi in AB, se si seghino anche con due piani paralleli MN, PQ, le intersezioni AE, AC sopra il primo piano formeranno un angolo CAE uguale all'angolo DBF fatto dalle intersezioni sull'altro piano. Infatti le intersezione AE, BF del piano ABF coi due piani paralleli MN, PQ sono parallele (§. 337.), e le intersezioni AC, BD del piano ACDB cogli stessi piani sono parallele, dunque l'angolo CAE è uguale a DBF.

TEOREMA X.

SE TRE RETTE AB, CD, EF (fig. 124.) NON SITUATE NELLO STESSO PIANO SONO UGUALI, E PARALLELE, CONGIUNTE LE LORO ESTREMITÀ' SUPERIORI ED INFERIORI CON RETTE FORMERANNO I TRIANGOLI ACE, FBD COINCIDENTI, ED IN PIANI PARALLELI.

344. *Dimostr.* Nell'ipotesi del teorema avremo i tre parallelogrammi ABFE, FECD, CDBA, perchè per es. nel primo le rette AB, FE sono uguali e parallele. Nei detti parallelogrammi deve essere AE uguale e parallela a BF: lo stesso poi saranno le rette AC, CE rispetto le rette

BD, DF: dunque i due triangoli ACE, BDF sono coincidenti.

345. Li piani poi di questi due triangoli sono paralleli, perchè se non fossero condotti come innanzi da A un piano parallelo a BDF taglierebbe CD, EF in punti G, H diversi da C, E, d'onde verrebbero come sopra le rette GD, HF uguali alle rette CD, EF.

TEOREMA XI.

DUE RETTE SEGATE DA TRE PIANI PARALLELI
SONO SEGATE IN PARTI PROPORZIONALI.

346. *Dimostr.* Sia la retta (fig. 125.) CD segata in C, F, D dai tre piani MN, PQ, RS, e sia un'altra retta AB segata dagli stessi piani. Si conduca la retta AD, e le rette AC, EG, BD, GF. Nel triangolo ABD segato da EG parallela a BD abbiamo $AE : EB = AG : GD$, e nel triangolo ADC abbiamo $AG : GD = CF : FD$; dunque $AE : EB = CF : FD$.

TEOREMA XII.

L'ANGOLO FATTO DA DUE PIANI NEL SEGARSI È ESPRESSO
DALL'ANGOLO FATTO DA DUE RETTE NEGLI STESSI
PIANI E NORMALI ALLA RETTA D'INTERSEZIONE
IN UNO STESSO PUNTO.

347. *Dimostr.* Siano i due piani MAP, MAN (fig. 126.) che si segano nella retta AM. Al punto A negli stessi piani si conducano le normali PA, NA all'intersezione MA; dico, che PAN esprime l'angolo fatto dai due piani. Per dimostrare ciò faremo vedere primo, che questo angolo è lo stesso qualunque sia il punto A dell'intersezione de' piani. Secondo, che l'angolo dei due piani varia proporzionalmente alla variazione di questo angolo.

Riguardo al primo. Nei due piani si conducano le due normali BM , CM , al punto qualunque M dell'intersezione MA . Essendo MB ed AP nello stesso piano, e normali alla retta MA sono parallele. Per la stessa ragione sono parallele le rette MC , AN : dunque gli angoli BMC , PAN in due diversi piani, e coi lati rispettivamente paralleli (§. 341.) sono uguali. Per provare, che l'angolo fatto dai due piani varia proporzionalmente all'angolo PAN , sul piano PAN da A si conduca la retta AD , e per MAD si meni un piano, che si seghi col piano BMC secondo ME : queste due rette ME , AD essendo intersezioni d'un piano MAD con due BAC , PAN paralleli saranno parallele: quindi gli angoli BME , PAD coi lati rispettivamente paralleli sono uguali. Se ora PAD entrasse per esempio sei volte nell'angolo PAN altrettante volte BME uguale a PAD entrerebbe in BAC uguale PAN , e se dalle rette di divisioni come ME , AD si conducessero dei piani l'angolo dei due piani MAP , MAN riuscirebbe diviso in sei angoli uguali, cioè l'angolo fatto dai due piani è proporzionale a PAN , o a qualunque altro BMC formato nello stesso modo che PAN . Se PAN fosse incommensurabile colla solita prova dell'assurdità si proverebbe la detta proporzionalità.

348. *Scolio.* 1.° Se dal punto M si elevino due normali MX , MY l'una al piano MAP , l'altra al piano MAN , l'angolo XMY è uguale a BAC . Infatti essendo MX normale al piano MAP sarà normale ad MB , retta condotta dal suo piede M nello stesso piano. Per la stessa ragione l'angolo YMC è retto: dunque sono uguali i due angoli XMB , YMC , e togliendo ad ambedue l'angolo YMB saranno uguali gli angoli YMX , BMC : dunque l'angolo fatto da due piani è anche espresso dall'angolo fatto da due normali agli stessi piani.

349. *N. B.* Quando si tratta di angoli fatti da rette condotte comunque nello spazio, può avvenire, che queste non giacciono nello stesso piano: in tal caso questo angolo si

rappresenta per quello fatto da due rette condotte da uno stesso punto, e parallele alle due; il perchè nell'espressione antecedente non ci siamo astretti alla condizione, che le normali ai due piani siano condotte da uno stesso punto.

350. *Scolio 2.º* Quando due piani fanno angolo retto l'uno si dice normale all'altro, e per giudicarsi retto il detto angolo deve trovarsi retto l'angolo fatto da due rette condotte nei detti piani normali alla comune loro intersezione nello stesso punto.

TEOREMA XIII.

SE UNA RETTA È NORMALE AD UN PIANO,
QUALUNQUE PIANO MENATO PER QUESTA RETTA
È NORMALE ALL'ALTRO.

351. *Dimostr.* Sia AP (fig. 127.) normale ad MN; per AP si conduca il piano ABC, che si seghi col primo in BC: si conduca sul piano MN la retta DP normale a BC. Essendo AP normale al piano MN sarà normale a PD condotta pel suo piede nello stesso piano. Ora DP ed AP sono due rette nei piani MN, ABC, e normali in un punto P alla loro intersezione BC, dunque l'angolo APD (§. 347.) misura l'angolo fatto da essi, ma questo APD è retto, dunque l'angolo fatto dai piani è retto, e perciò il piano ABC è normale ad MN.

352. *Coroll.* Quando tre rette AP, DP, BP sono fra loro normali, il piano, che passa per una è normale al piano, che passa per le altre due, ed i tre piani che passano per le tre rette considerate a due a due sono fra loro normali.

TEOREMA XIV.

SE UN PIANO È NORMALE AD UN ALTRO QUALUNQUE RETTA
ELEVATA NORMALE ALLA INTERSEZIONE DE' PIANI,
E DESCRITTA IN UN PIANO È NORMALE ALL'ALTRO.

353. *Dimostr.* Sia il piano ABC (fig. 128.) normale al piano MN, e da un punto P dell'intersezione BC si elevi nel piano BAC la PA normale a BC, sarà questa normale al piano MN. Si conduca DP normale a BC sarà l'angolo APD retto, perchè essendo per ipotesi retto l'angolo fatto dai due piani MN, ABC, deve essere retto l'angolo fatto dalle due rette DP, PA negli stessi piani, e normali in un punto P alla loro intersezione. Essendo ora AP normale alle due rette BP, PD menate dal suo piede nel piano MN sarà a questo normale (§. 326.).

354. *Coroll.* Se il piano ABC è normale al piano MN, qualunque retta elevata da un punto P dell'intersezione normale al piano MN deve trovarsi nel piano ABC. Perchè se ciò non fosse si conduca dallo stesso punto P nel piano ABC la PA normale a BC, questa sarà normale al piano MN, (§. 353.); ma la prima retta è anche normale al piano: dunque da uno stesso punto P ad un piano MN si potrebbero condurre due distinte normali, ciò che è assurdo (§. 328.)

TEOREMA XV.

SE DUE PIANI SONO NORMALI AD UN TERZO, A QUESTO TERZO
DEVE ESSERE NORMALE LA LORO RETTA D'INTERSEZIONE.

355. *Dimostr.* Siano i piani ABC, ADE (fig. 128.) normali ad MN. Se da un punto P di loro intersezione si eleva una normale al piano MN deve trovarsi per l'antecedente corollario in ambedue i detti piani normali; dunque deve essere la retta di loro intersezione.

CAPO SECONDO

DELLE PROPRIETÀ DEI SOLIDI.



TEOREMA XVI.

QUALUNQUE SEZIONE FATTA IN UN PRISMA PARALLELA
AD UNA DELLE BASI È AD ESSA COINCIDENTE.

356. *Dimostr.* Sia la sezione LMNOP (fig. 129.) nel prisma FKIBC parallela alla base ABCDE. I lati MN, BC saranno paralleli, perchè (§. 337.) intersezioni del piano MBCN coi piani paralleli LMNOP, ABCDE. Per la stessa ragione saranno paralleli gli altri lati della sezione alli corrispondenti della base: dunque i quadrilateri MBCN, NCDO, PODE, PLAE, ALMB sono parallelogrammi; perciò MN, BC sono uguali, e sono uguali gli altri lati della sezione ai rispettivi lati della base: quindi i poligoni della sezione, e della base sono equilateri fra loro. Inoltre gli angoli MNO, BCD sono uguali, perchè (§. 341.) fatti da lati paralleli, e diretti nello stesso senso. Quindi gli angoli della sezione, e della base sono a due a due uguali: dunque la sezione, e la base hanno gli angoli ed i lati uguali, perciò sono coincidenti.

TEOREMA XVII.

OGNI SEZIONE IN UNA PIRAMIDE PARALLELA ALLA BASE
È UN POLIGONO SIMILE AL POLIGONO DELLA BASE.

357. *Dimostr.* Sia la sezione MNLPR (fig. 130.) parallela alla base ABCDE della piramide ABCDES. Per la stessa dimostrazione antecedente il poligono MNLPR sarà equiangolo al poligono ABCDE, perchè hanno i lati rispettivamente paralleli. Dal triangolo BSC segato dalla retta NL parallela a BC avremo $NL : BC = SL : SC$; nel triangolo SCD sarà

$SL : SC = LP : CD = SP : SD$; quindi $NL : BC = LP : CD = SP : SD$; nel triangolo SED abbiamo $SP : SD = RP : ED = SR : SE$; dunque $NL : BC = LP : CD = RP : ED = SR : SE$; dal triangolo SAE si ha $SR : SE = MR : AE = SM : SA$; dunque $NL : BC = LP : CD = RP : ED = MR : AE = SM : SA$; finalmente nel triangolo ASB abbiamo $SM : SA = MN : AB$; dunque $NL : BC = LP : CD = RP : ED = MR : AE = MN : AB$; dunque la sezione, e la base della piramide sono poligoni equiangoli, ed hanno i lati proporzionali; perciò sono simili.

TEOREMA XVIII.

NELLA PIRAMIDE LE SEZIONI PARALLELE ALLA BASE SONO
FRA LORO, E COLLA BASE COME I QUADRATI
DELLE LORO DISTANZE DAL VERTICE.

358. *Dimostr.* Sia la piramide $ABDEL$ (fig. 131.); dal vertice L si cali la normale LC sulla base $ABDE$ prolungata in C . Si faccia una sezione $QIGO$ parallela a questa base, che si prolunghi fino all'intersezione F colla normale: si conducano da F le rette FI , FG agli estremi del lato IG , e le rette CB , CD agli estremi di BD . I triangoli IFG , BCD coi lati rispettivamente paralleli sono simili, perchè il triangolo IFG si può considerare come una sezione della piramide $LCDB$ parallela alla base BCD ; quindi sarà $IG : BD = IF : BC$, ed anche quadrato di IG sta a quadrato di BD come quadrato di IF sta a quadrato di BC : perchè ambedue i rapporti sono come le superficie de'due triangoli simili IGF , BDC (§. 230.), ma nei due triangoli simili LIF , LBC abbiamo per la stessa ragione quadrato di IF sta a quadrato di BC come quadrato di LF sta a quadrato di LC : dunque quadrato di IG sta a quadrato di BD come quadrato di LF sta a quadrato di LC : ma il primo rapporto è il rapporto della superficie dei due poligoni simili $QOGI$, $AEDB$ (§. 261.): dun-

que le superficie di questi due poligoni della sezione, e della base sono come i quadrati delle loro distanze LF , LG dal vertice della piramide.

TEOREMA XIX.

DUE PIRAMIDI DI UGUALI BASI, E DI UGUALI ALTEZZE
HANNO SEZIONI UGUALI AD UGUALI DISTANZE
DAL VERTICE.

359. *Dimostr.* Sia B il valore delle due basi, ed A , l'altezza comune. Siano s , s' due sezioni fatte ad uguali distanze d dal vertice: avremo per le due piramidi (§. 158.) $s : B = \text{il quadrato di } d \text{ al quadrato di } A$; $s' : B = \text{il quadrato di } d \text{ sta al quadrato di } A$: ora affinché queste proporzioni sussistano è necessario che le sezioni s , s' siano uguali.

360. La solidità d'una figura è lo spazio che essa occupa, perchè la solidità è l'estensione di lunghezza larghezza e profondità: ora lo spazio, che occupa una figura, che si dice solido, è appunto una estensione della sua lunghezza, larghezza, e profondità.

361. Dunque due di solidi, che occupano lo stesso spazio, sono uguali in solidità.

TEOREMA XX.

DUE PRISMI, E DUE PIRAMIDI DI UGUALI BASI E DI UGUALI
ALTEZZE SONO RISPETTIVAMENTE UGUALI IN SOLIDITA'.

362. *Dimostr.* Siano i due detti prismi; facendo in essi sezioni parallele alle basi sono uguali alle stesse basi (§. 356.): ma per ipotesi queste sono uguali, dunque sono uguali anche le sezioni. Ora se le due basi dei due prismi siano collocate sopra d'un piano, è evidente, che facendo successive sezioni in uno, cominciando dalla base, parallele alla base stessa si faranno altrettante sezioni nell'altro prisma, e viceversa: dunque in tutta l'altezza di

ambedue li prismi si può fare lo stesso numero di sezioni, che sono tutte uguali : ma è chiaro, che i due prismi con tutte queste sezioni occupano gli spazii da loro occupati : dunque questi spazii sono uguali , e perciò sono uguali le loro solidità (§. 361.).

363. Riguardo alle due piramidi di uguali basi ed altezze s'intendano colle loro basi collocate sopra uno stesso piano. Se cominciando da queste si facciano successive sezioni in ambedue ad uguali distanze dai vertici saranno fra loro uguali (§. 359.), e di più di ugual numero, se con queste sezioni si giunga fino ai vertici : dunque ragionando come innanzi, le due piramidi occuperanno uguali spazii, e perciò avranno uguali solidità.

TEOREMA XXI.

SIA IL CUBO AD (fig. 132.). PER GLI SPIGOLI OPPOSTI AG, CD; BI, EF SI FACCIANO DUE SEZIONI, QUESTE SARANNO I RETTANGOLI ACDG, BEFI. SE IN QUESTI SI CONDUCCANO LE DIAGONALI AD, GC ; BF, IE, IL CUBO SARA' DIVISO IN SEI PIRAMIDI GIODF, FOECD, BOCDI, BOIGA, AOEF, QUANTE SONO LE FACCE DEL CUBO, AVENTI PER BASI LE FACCE STESSE, UN COMUN VERTICE IN O , DI ALTEZZA UGUALE ALLA META' DELL'ALTEZZA DEL CUBO, E PERCIO' UGUALI FRA DI LORO, E DIVIDENTI IL CUBO IN SEI PARTI UGUALI.

364. *Dimostr.* Nei rettangoli ACDG, BEFI coincidenti le diagonali uguali si dividono per metà, di più ciascuno dei due pnnti di divisione si trova sulla metà della comune intersezione dei due rettangoli, che è la retta che congiunge L con M : dunque è unico pnnto O dove tutte e quattro le diagonali si segano : quindi le sei piramidi hanno un comun vertice in O alla metà della distanza dei due punti L, M, o dell'altezza CD del cubo : perciò le sei piramidi hanno per altezza la metà dell'altezza del cubo; quindi sono uguali fra loro avendo (§. 363) uguali basi

ed uguali altezze, e quindi dividono il cubo in sei parti uguali.

365. *Coroll. 1.°* Queste piramidi sono rette (§. 305.); la solidità di una di queste piramidi è il sesto della solidità del cubo : dunque una piramide retta , che ha per base una delle facce del cubo, e per altezza la sua metà è il sesto del cubo stesso.

366. *Coroll. 2.°* Una piramide qualunque , che abbia la sua base equivalente ad una delle facce del cubo, e per altezza la metà dell'altezza del cubo stesso è un sesto della solidità di questo ; perchè la detta piramide equivale (§. 363.) alla solidità d'una piramide retta di base uguale ad una delle facce del cubo, e di altezza uguale alla metà dell'altezza del cubo, avendo per ipotesi queste due piramidi la stessa altezza, e basi equivalenti.



CAPO TERZO

DELLA MISURA DELLE SUPERFICIE, E DELLE SOLIDITA' DE'SOLIDI.



TEOREMA XXII.

DUE PARALLELEPIPEDI RETTANGOLI DI UGUALI BASI
SONO COME LE ALTEZZE.

367. *Dimostr.* Siano i due parallelepipedi (fig. 133.) che abbiano uguali basi BACF, TMNO, dico, che le loro solidità sono come le altezze IC , SM. Supponiamo , che queste altezze siano come cinque a sette. Divisa l'altezza IC in cinque parti uguali, l'altezza SM si potrà dividere

in sei uguali alle prime. Se nell'una e nell'altra altezza dai punti di divisione si conducano piani paralleli alle basi avremo diviso i due parallelepipedi rettangoli in tanti parallelepipedi rettangoli tutti uguali fra loro, perchè hanno uguali basi, ed uguali altezze, e 5 ne conterrà il parallelepipedo GC, e 7 l'altro RN: dunque i due parallelepipedi saranno fra loro come 5 a 7, o come le loro altezze.

368. Se le altezze fossero incommensurabili supponiamo, che la detta proporzione non esista, allora invece della proporzione $GC : RN = IC : SM$ sia l'altra $GC : RN = IC : XM$. Si prenda un intervallo minore di SX, che entri esattamente in IC. Portato questo sopra MX darà un punto di divisione fra S ed X, e sia U. Si compia il parallelepipedo MZ. Avendo IC, MU una comune misura sarà la proporzione $GC : YN = IC : MU$, ossia $GC : IC = YN : MU$; ma avevamo $GC : IC = RN : XM$; dunque sarà $YN : MU = RN : XM$, ovvero $YN : RN = MU : XM$; cioè il solido YN maggiore sta al minore RN come la retta minore MU sta alla maggiore MX, cosa assurda.

TEOREMA XXIII.

DUE PARALLELEPIPEDI RETTANGOLI DI UGUALI ALTEZZE
SONO FRA LORO COME LE BASI.

369. *Dimostr.* Siano i due parallelepipedi AG, AK (fig. 134.) di uguali altezze. Si adatti così l'uno all'altro, che abbiano lo stesso angolo EAB. Si prolunghi la faccia KO finchè in PQ tagli la faccia HC. I due parallelepipedi AQ, AG hanno la stessa base ED, dunque sono (§. 167.) come le altezze; perciò sarà $AQ : AG = AO : AB$. I due parallelepipedi AG, AK hanno la stessa base AI, dunque daranno $AK : AQ = AM : AD$. Moltiplicando termine a termine queste due proporzioni, e togliendo nel primo rap-

porto il fattore comune AQ sarà $AK : AG = AO \times AM : AB \times AD$; cioè i due parallelepipedi sono come le loro basi.

TEOREMA XXIV.

DUE PARALLELEPIPEDI QUALUNQUE SONO COME LE LORO BASI MOLTIPLICATE PER LE ALTEZZE, O COME I PRODOTTI DEI LORO TRE SPIGOLI CONGIUNTI AD ANGOLO.

370. *Dimostr.* Siano i due parallelepipedi AG, AZ (fig. 134.) Si adattino ad avere lo stesso angolo OAX. Coll'opportuno prolungamento delle facce si formi il parallelepipedo AK della stessa altezza del parallelepipedo AG. Ora i due parallelepipedi AG, AK avendo la stessa altezza (§. 369.) ci daranno $AG : AK = ABCD : MNOA$. I due parallelepipedi AZ, AK, che hanno la stessa base MNOA (§. 367.) ci danno $AK : AZ = AE : AX$. Moltiplicando queste due proporzioni, e togliendo il fattore AK comune nel primo rapporto avremo $AG : AZ = ABCD \times AE : MNOA \times AX$; ma $ABCD = AD \times AB$, $MAON = MA \times AO$; dunque $AG : AZ = DA \times AB \times AE : MA \times AO \times AX$. Le due proporzioni dimostrano l'asserzioni del teorema.



MISURA DELLE SUPERFICIE DE'SOLIDI



TEOREMA XXV.

LA SUPERFICIE ALL'INTORNO D'UN PRISMA RETTO È UGUALE AL PERIMETRO DELLA BASE MOLTIPLICATO PER UNO DEGLI SPIGOLI.

371. *Dimostr.* Supponendo retto il prisma FKIBC (fig. 129.), i quadrilateri GC, HD ec. saranno tanti rettangoli

della stessa altezza, che è uno degli spigoli, dunque i parziali rettangoli saranno uguali alle rispettive basi moltiplicate per uno spigolo; supponendo dunque b, b', b'', b''' ec. queste basi, ed s lo spigolo, la somma delle superficie dei rettangoli sarà

$$bs + b's + b''s + b'''s \text{ ec.} = (b + b' + b'' + b''' \text{ ec.})s :$$

dunque la somma delle loro superficie sarà uguale alla somma delle basi moltiplicate per lo spigolo, ossia al perimetro della base del prisma moltiplicato per lo spigolo.

TEOREMA XXVI.

LA SUPERFICIE DELLA PIRAMIDE RETTA È UGUALE AL PERIMETRO DELLA BASE MOLTIPLICATO PER LA META' DELLA NORMALE CALATA DAL SUO VERTICE SOPRA UNO DEI LATI DELLA BASE STESSA.

372. *Dimostr.* Se la piramide ABCDES (fig. 130.) è retta, è facile a dimostrarsi, che le normali calate dal vertice S sopra i lati BC, CD ec. del poligono regolare della base sono uguali, ossia, che le facce triangolari hanno la stessa altezza, che è la normale calata dal vertice della piramide sopra una delle basi dei triangoli. Ora la superficie di ogni faccia triangolare è uguale alla base moltiplicata per la metà di questa altezza: dunque ragionando come nel prisma (§. 371.) la somma delle superficie delle facce è uguale alla somma delle basi, o al perimetro della base della piramide moltiplicato per la metà della detta altezza.

Scolio. Se il prisma, e la piramide sono oblique si prenderanno le superficie delle singole facce, e si sommeranno. Nel prisma FKIBC (fig. 129.) obbliquo si potrebbe condurre un piano LMNOP normale agli spigoli uguali, ed è chiaro che la somma delle superficie delle facce sarebbe uguale al perimetro di questo poligono moltiplicato per uno spigolo: perchè per esempio la superficie della faccia GHCB = HC $\times$ MN.

TEOREMA XXVII.

LA SUPERFICIE ALL'INTORNO D'UN TRONCO DI PIRAMIDE RETTA OTTENUTO CON UNA SEZIONE PARALLELA ALLA BASE È UGUALE ALLA SEMISOMMA DEL PERIMETRO SUPERIORE ED INFERIORE MOLTIPLICATA PER LA NORMALE CONDOTTA FRA DUE LATI CORRISPONDENTI INFERIORE E SUPERIORE.

373. *Dimostr.* Sia il tronco di piramide retta (fig. 130.) MPABCDE, è chiaro, che ogni faccia come BNLC, CLPD ec. è un trapezio, e tutti questi trapezii sono della stessa altezza, che è la normale fra due lati superiore, ed inferiore: ora la superficie di ciascuno è uguale alla semisomma delle due basi parallele moltiplicata per la detta altezza: dunque la somma delle superficie delli detti trapezii sarà uguale alla semisomma dei due perimetri superiore, ed inferiore moltiplicata per la normale fra due lati paralleli.

Scolio. Se il tronco è di piramide obliqua si troveranno parzialmente le superficie delle facce.

TEOREMA XXVIII.

LA SUPERFICIE ALL'INTORNO D'UN CILINDRO RETTO È UGUALE ALLA PERIFERIA DELLA BASE MOLTIPLICATA PER L'ALTEZZA DEL CILINDRO. LA SUPERFICIE D'UN CONO RETTO È UGUALE ALLA PERIFERIA DELLA BASE MOLTIPLICATA PER META'DELLA NORMALE CALATA DAL VERTICE ALLA STESSA PERIFERIA. E LA SUPERFICIE D'UN TRONCO DI CONO RETTO È UGUALE ALLA SEMISOMMA DELLE PERIFERIE DELLE DUE BASI MOLTIPLICATA PER LA NORMALE FRA LE DUE PERIFERIE STESSE; OVVERO È UGUALE ALLA DETTA NORMALE MOLTIPLICATA PER LA PERIFERIA CHE DIVIDE IN MEZZO LE NORMALI FRA LE DUE PERIFERIE O L'ALTEZZA DEL TRONCO.

374. *Dimostr.* Nel cilindro si suppongano circoscritti alle periferie delle due basi due poligoni regolari dello stesso numero di lati. Congiunti con rette i vertici degli angoli

superiori, ed i vertici degli angoli sottoposti avremo all'intorno tanti rettangoli, che coi due poligoni formeranno un prisma retto, di cui uno spigolo sarà l'altezza del cilindro. Se si dica C la superficie all'intorno del cilindro, e sia x la differenza fra la sua superficie e quella del prisma, sarà $C+x$ la superficie di questo. Sia y la differenza fra la circonferenza c del circolo iscritto, ed il perimetro del poligono circoscritto; questo perimetro sarà espresso da $c+y$. Sia finalmente a lo spigolo del prisma, o l'altezza del cilindro. La superficie del prisma sarà espressa da $(c+y)a$; dunque $C+x = (c+y)a$ o $C+x = ca + ay$. Supponendo, che i lati dei due poligoni vadano indefinitamente moltiplicandosi allo stesso modo, i due poligoni indefinitamente anderanno accostandosi ai circoli, ed il prisma al cilindro: dunque nella nostra equazione x, y continuamente variano, rimanendo costanti C, c, a ; dunque uguagliando fra loro le quantità costanti sarà $C = ca$: cioè la superficie all'intorno del cilindro retto è uguale alla periferia della base moltiplicata per la sua altezza.

375. Biguardo al cono retto si circoscriva un poligono regolare alla periferia della base, e dal vertice del cono si conducano tante rette ai vertici degli angoli dello stesso poligono, si formeranno così all'intorno tanti triangoli isosceli quanti sono i lati del poligono, e questi triangoli daranno la superficie d'una piramide retta, che ha la stessa altezza del cono. I lati del poligono sono tante tangenti (§. 266.) nei loro punti medii al circolo della base: quindi se dal comun vertice dei triangoli isosceli si conducano le rette a questi punti di tangenza, andando alla metà delle basi dei detti triangoli isosceli, saranno le loro altezze, e saranno tutte uguali. Si dica C la superficie del cono, ed essendo y la differenza di questa superficie, e quella all'intorno della piramide, sarà $C+y$ la superficie di questa. Sia c la circonferenza del circolo iscritto, ed indicando per x la differenza di essa, ed il perimetro del poligono

circoscritto, sarà questo espresso da $c + x$: se dunque sia a la normale calata dal vertice della piramide ad uno dei punti di tangenza del poligono avremo per la superficie della piramide

$$C + y = (c + x) \frac{a}{2} = \frac{ca}{2} + \frac{ax}{2},$$

d'onde, ragionando come innanzi, $C = \frac{ca}{2}$, cioè la superficie del cono è uguale alla metà del prodotto della periferia della sua base moltiplicata per la normale calata dal suo vertice alla periferia stessa.

376. Pel tronco di cono retto si suppongano circoscritti alle periferie della basi due poligoni regolari dello stesso numero di lati, e congiunti i vertici degli angoli del poligono superiore coi corrispondenti degli angoli inferiori si avrà così intorno al tronco di cono la superficie d'un tronco di piramide retta. Questa superficie (§. 373.) sarà uguale alla semisomma dei perimetri superiore, ed inferiore dei poligoni moltiplicata per la normale fra due lati paralleli, che può essere la retta, che congiunge i punti di tangenza coi circoli dei due stessi lati, perchè questa retta andando ai punti medii dei due detti lati prolungata anderebbe al vertice del triangolo isoscele formato dai spigoli vicini prolungati anche essi fino al punto d'incontro. Sia dopo ciò T la superficie all'intorno del tronco di cono retto, ed y la differenza di essa e la superficie all'intorno del tronco di piramide. Siano c , C le circonferenze dei due circoli superiore ed inferiore, ed x , z le differenze di esse, e dei corrispondenti perimetri dei due poligoni; sia poi a la retta normale a due lati paralleli dei poligoni, o la normale ai perimetri dei due circoli, avremo dopo ciò

$$T + y = \left(\frac{c + x + C + z}{2} \right) a = \left(\frac{c + C}{2} \right) a + \left(\frac{x + z}{2} \right) a;$$

dunque
$$T = \left(\frac{c+C}{2}\right)a ,$$

ciò , che si doveva trovare.

377. Se ora s'immagina, che il trapezio (fig. 135.) ABDF col lato AF normale alle due basi AB, FD si travolga intorno ad AF, le rette AB, FD colle loro estremità B, D genereranno le circonferenze delle basi del tronco di cono generato dal trapezio nella rivoluzione. Se si suppone condotta la retta EC bisegante i lati AF, BD in E, C, questa sarà la semisomma delle rette (§. 247.) AB, FD; generando dunque essa la circonferenza d'un circolo col punto C, questa sarà la semisomma delle circonferenze delle due basi del tronco di cono, perchè le circonferenze sono come i raggi (§. 286.). Da ciò viene, che la superficie d'un tronco di cono retto, che è uguale alla semisomma delle circonferenze delle due basi moltiplicata per la normale fra le due stesse circonferenze (§. 376.), è anche uguale alla circonferenza media, che divide in mezzo l'altezza AF del tronco, o le normali fra le dette circonferenze moltiplicata per una di queste.

Scolio. Non è della Geometria elementare il misurare le superficie dei cilindri, coni, e tronchi di coni obliqui.

TEOREMA XXIX.

CIRCOSCRITTO IL SEMIPOLIGONO BAHQPO (fig. 136.) REGOLARE DI PARI NUMERO DI LATI AD UN SEMICIRCOLO NIM, SI SUPPONGA RAVVOLGERSI INTORNO ALL'ASSE BO, DICO, CHE LA SUPERFICIE DEL SOLIDO DA ESSO GENERATO, CHE SI CHIAMA *SFEROIDE* È UGUALE ALLA PERIFERIA DEL CIRCOLO ISCRITTO AL POLIGONO MOLTIPLICATA PER L'ASSE BO.

378. *Dimostr.* Si consideri il cono retto generato da ABC nella detta rivoluzione. La sua superficie è la periferia di raggio AC moltiplicata per la metà di AB: dunque questa superficie è espressa da $2\pi AC \cdot \frac{AB}{2}$, ossia, con-

dotto il raggio GD al punto di tangenza D, da $2\pi AC \times DB$. Ora i triangoli ABC, GDB sono simili, dunque avremo la proporzione $DB : DG = BC : AC$: dunque $AC \times DB = DG \times BC$: dunque la superficie del cono retto è uguale a $2\pi DG \times BC$. La retta AH nella rivoluzione del semipoligono genera la superficie d'un tronco di cono retto, questa superficie è uguale alla circonferenza del circolo medio di raggio FE moltiplicata per l'altezza AH : dunque la detta superficie è espressa da $2\pi FE \times AH$, I due triangoli simili (§. 219.) AHS, FEG ci danno $AH : AS = FG : FE$: dunque $FE \times AH = FG \cdot AS$: dunque l'espressione antecedente della superficie del tronco di cono diventa $2\pi FG \cdot AS$, ossia $2\pi DG \times CL$. La superficie del cilindro generato da HI è espressa da $2\pi IG \times HI$, o da $2\pi DG \times GL$. Rinnendo le quantità trovate si vedrà, che la superficie generata da BAI è uguale a $2\pi DG \times BC + 2\pi DG \times CL + 2\pi DG \times LG$, ossia a $2\pi DG (BC + CL + LG)$, ossia $2\pi DG \times BG$; e la superficie generata dal semipoligono BHQO sarà espressa da $2\pi DG \cdot BO$, come si doveva dimostrare.

379. *Coroll.* La superficie d'una porzione della sferoide o cominciando dal vertice B fino ad un punto qualunque H limitata dal piano condotto secondo HL normale a BO, o compresa fra due piani normali all'asse come sarebbe quella generata dalla rivoluzione di AHI, è espressa dalla periferia del circolo iscritto al poligono moltiplicata per l'altezza BL, o per l'altezza CG delle rispettive porzioni della sferoide.

TEOREMA XXX.

LA SUPERFICIE D'UNA SFERA È UGUALE ALLA CIRCONFERENZA D'UN CIRCOLO DI RAGGIO UGUALE AL SUO, O ALLA CIRCONFERENZA D'UN CIRCOLO MASSIMO MOLTIPLICATA PEL DIAMETRO.

380. *Dimostr.* Moltiplicandosi all'infinito il numero dei

lati del semipoligono BIO (fig. 136.) la superficie della sferoide indefinitamente s'accosta alla superficie della sfera, e l'asse BO al diametro NM. Sia s la superficie della sfera, ed y la differenza della sua superficie, e quella della sferoide; sia r il raggio della sfera, che è il raggio del circolo iscritto al semipoligono. Sia x la differenza fra il diametro $2r$ del detto circolo, o della sfera, e l'asse BO della sferoide. Avremo $S + y = 2\pi r (2r + x)$, quindi al solito $S = 2\pi r \cdot 2r$, che è il teorema.

381. *Coroll.* La superficie d'una porzione di sfera prodotta dalla rivoluzione dell'arco NF, che si chiama *Callotta* è uguale alla circonferenza del circolo massimo moltiplicata per l'altezza NE della callotta.

382. La superficie di una zona sferica fra due piani normali al diametro generata dalla rivoluzione dell'arco XI è uguale alla circonferenza del circolo massimo moltiplicata per l'altezza CG della zona.



MISURA DELLE SOLIDITA' DE'SOLIDI



383. Per misurare un solido si prende un'altro solido cognito per unità, e si vede quante volte entra nel primo. La figura di queste unità è quella del cubo, come la più semplice nel suo concetto, bastando il conoscere solo uno spigolo. È in arbitrio la grandezza di questo cubo, che dipende dalla lunghezza d'un suo spigolo. Se questo sia un piede, un palmo, un pollice, un metro, l'unità misuratrice si dice *piede cubo*, *palmò cubo*, *pollice cubo*, *metro cubo*; e quando si dice, che un solido è per es. di dieci metri cubi, ciò vuol dire, che un cubo ciascun spigolo del quale è un metro entra nel solido dieci volte. Diamo i metodi per misurare i solidi elementari, quali sono i prismi, e le piramidi per li

solidi terminati da piani; valuteremo in seguito la solidità dei cilindri, e dei con, che son solidi li più semplici terminati da superficie curva, ed in ultimo daremo il valore della solidità della sfera.

TEOREMA XXXI.

UN PARALLELEPIPEDO RETTANGOLARE È UGUALE AL PRODOTTO DE' SUOI TRE SPIGOLI CONGIUNTI AD ANGOLO, O È UGUALE ALLA SUA BASE MOLTIPLICATA PER L' ALTEZZA. LA SOLIDITÀ D'UN PRISMA QUALUNQUE È UGUALE ALLA SUA BASE MOLTIPLICATA PER L'ALTEZZA.

384. *Dimostr.* Siano due parallelepipedi rettangolari. Le loro solidità siano S, S' ; i tre spigoli congiunti ad angolo nel primo siano a, b, c ; nel secondo $a'b'c'$. Avremo (§. 370.) $S : S' = abc : a'b'c'$. Sia S' un cubo di solidità C , di cui un lato sia l : il prodotto dei tre lati congiunti ad angolo sarà l^3 , e questo si dovrà porre invece di $a'b'c'$ uella proporzione antecedente: dunque si avrà $S:C=abc:l^3$, Se i lati a, b, c del parallelepipedo si misurino col lato l preso per unità sarà $l^3 = 1$, ed $S = abc . C$: dunque misurati i tre spigoli congiunti ad angolo nel parallelepipedo rettangolare col lato supposto uno del cubo, il prodotto dei tre numeri, che vengono, esprime quante volte il detto cubo entra nel parallelepipedo. Se il cubo C si prenda per cubo misuratore della solidità, potrà farsi $C = 1$, e si dirà, che la solidità d'un parallelepipedo rettangolare è uguale al prodotto dei suoi tre spigoli congiunti ad angolo; supponendo però, che questo prodotto ripeta il cubo misuratore, con un lato del quale preso per unità sono stati misurati i detti spigoli.

385. Nel prodotto abc considerando per base il rettangolo fatto dai due lati a, b , il prodotto ab sarà la sua superficie, e c l'altezza del solido: quindi si può dire an-

cora, che la solidità d'un parallelepipedo rettangolare è uguale al prodotto della base per l'altezza.

386. Se il parallelepipedo rettangolare diventa un cubo, il prodotto dei tre lati diventa la terza potenza d'un lato; il perchè la terza potenza di una quantità si chiama il cubo della quantità stessa. Così a^3 si dice il cubo di a , perchè fatto un cubo collo spigolo a , a^3 ci dà la sua solidità, o quante volte un cubo minore, col lato del quale si è misurato a , entra nel proposto cubo.

387. Si consideri ora un prisma di base qualunque, ma equivalente alla base d'un parallelepipedo rettangolare, e di altezza uguale all'altezza di questo, i due solidi saranno equivalenti (§. 362.), ma la solidità del parallelepipedo è uguale alla base moltiplicata per l'altezza (§. 385.), dunque anche la solidità del prisma è uguale alla sua base moltiplicata per la sua altezza.

TEOREMA XXXII.

LA SOLIDITÀ D'UNA PIRAMIDE QUALUNQUE È UGUALE
ALLA SUA BASE MOLTIPLICATA PER UN TERZO
DELL'ALTEZZA.

388. *Dimost.* Si prenda una delle sei piramidi, in che fu diviso il cubo (§. 364.), la solidità d'ognuna è (§. 365.) il sesto della solidità del cubo; ora la solidità del cubo, come quella del parallelepipedo rettangolare, è uguale alla base moltiplicata per l'altezza: dunque la solidità della nostra piramide è il sesto del prodotto della base del cubo moltiplicato per l'altezza del cubo stesso. Se si dica B la base del cubo, che è la base della piramide, e $2A$ l'altezza del cubo; la solidità della piramide sarà uguale a $B \cdot \frac{2A}{6} = B \cdot \frac{A}{3}$: ora A è la metà dell'altezza del cubo, dunque (§. 365.) sarà l'altezza della piramide: dunque la solidità d'una delle piramidi nel cubo è uguale alla sua base moltiplicata per un terzo della sua altezza.

389. Si supponga ora un' altra piramide qualunque, che abbia la base equivalente ad una delle dette piramidi nel cubo, e per altezza l'altezza di questa; queste due piramidi saranno uguali (§. 363.) in solidità: dunque la solidità della piramide proposta sarà uguale alla base della piramide del cubo moltiplicata pel terzo dell'altezza: ma questa base ed altezza è la base ed altezza della piramide proposta: dunque la solidità d'una piramide qualunque è uguale alla sua base moltiplicata pel terzo della sua altezza.

TEOREMA XXXIII.

LA SOLIDITA' D'UN CILINDRO QUALUNQUE È UGUALE ALLA BASE
MOLTIPLICATA NELL'ALTEZZA; E LA SOLIDITA' D'UN CONO
QUALUNQUE È UGUALE ALLA BASE MOLTIPLICATA
PER UN TERZO DELL'ALTEZZA.

390. *Dimostr.* La dimostrazione si fa come si è fatta per le superficie dei due solidi, circoscrivendo alli circoli delle basi poligoni regolari, costruendo le formole per le solidità del prisma la di cui superficie attornia il cilindro, e della piramide, che colla superficie circonda il cono. Queste formole contenendo quantità costanti e variabili si uguaglieranno fra loro le costanti, e l'equazioni provenienti dimostreranno il teorema.

TEOREMA XXXIV.

LA SOLIDITA' D'UN TRONCO DI CONO È UN TERZO DELLA PERIFERIA
DESCRITTA COL DIAMETRO UGUALE ALL'ALTEZZA DEL TRONCO
MOLTIPLICATA PER LA SOMMA DEI QUADRATI, E DEL PRODOTTO
DEI DUE RAGGI DELLE BASI.

391. *Dimostr.* Sia il cono retto ABC (fig. 137.), e si voglia la solidità del tronco DECA fatto con un piano DE parallelo alla base AC. Si conduca BG per i centri F, G delle due basi. Sia il raggio $FE = r$, $GC = R$, l'altezza FG del tronco sia a , e $BF = x$. I triangoli simili

BFE, BCG ci danno $BF : BG = FE : GC$, ossia $x : x + a = r : R$,

$$\text{ed} \quad x = \frac{ra}{R-r}, \quad x + a = \frac{aR}{R-r}.$$

La solidità del cono

$$ABC = \frac{1}{3} \pi R^2 (x + a) = \frac{1}{3} \pi a \frac{R^3}{R-r} :$$

la solidità del cono

$$DBE = \frac{1}{3} \pi a \frac{r^3}{R-r} :$$

dunque il tronco di cono

$$DECA = \frac{1}{3} \pi a \frac{R^3}{R-r} - \frac{1}{3} \pi a \frac{r^3}{R-r} =$$

$$\frac{1}{3} \pi a \left(\frac{R^3 - r^3}{R-r} \right) = \frac{1}{3} \pi a (R^2 + r^2 + Rr).$$

392. *Scolio.* Se il cono è obliquo si dovrà calare la normale BP : in tal caso sarà $BO = x$, $OP = a$, ed a sarà l'altezza del tronco di cono : ma si ha sempre la proporzione $BO : BP = FE : GC$, ossia $x : x + a = r : R$, perchè $BO : BP = BF : BG = FE : GC$.

TEOREMA XXXV.

RAVVOLGENDOSI IL TRIANGOLO ISOSCELE ACB (fig. 138.) INTORNO ALLA RETTA CD CONSERVANDO INVARIABILE L'ANGOLO BCD, IL SOLIDO PRODOTTO DALLA RIVOLUZIONE È UGUALE A DUE TERZI DELLA SUPERFICIE DEL CIRCOLO CHE HA PER RAGGIO L'ALTEZZA DEL DETTO TRIANGOLO MOLTIPLICATI PER LA PORZIONE MN LIMITATA SULLA RETTA CD DA DUE NORMALI AM, BN CALATE SULLA RETTA STESSA DAGLI ESTREMI DELLA BASE AB.

393. *Dimostr.* Condotte le due normali AM, BN, si me-

ni la normale CP ad AB, e la PK normale sopra CD. Si prolunghi AB fino all'incontro in D con CD. Si ravvolga ora tutto il triangolo CAD intorno a CD; il cono prodotto da

$$CAM = \frac{1}{3} \pi AM^2 \times CM.$$

Il cono prodotto da

$$AMD = \frac{1}{3} \pi AM^2 \times MD:$$

dunque il solido prodotto da

$$ACD = \frac{1}{3} \pi AM^2 (CM + MD) = \frac{1}{3} \pi AM^2 \times CD.$$

Similmente il solido prodotto da

$$CBD = \frac{1}{3} \pi BN^2 \times CD:$$

dunque il solido prodotto da

$$\begin{aligned} ACB &= \frac{1}{3} \pi AM^2 \times CD - \frac{1}{3} \pi BN^2 \times CD = \\ &= \frac{1}{3} \pi CD (AM^2 - BN^2) = \frac{1}{3} \pi CD (AM + BN)(AM - BN) = \\ &= \frac{1}{3} \pi CD \times 2PK \times AO. \end{aligned}$$

Abbiamo posto invece di $AM + BN$ il doppio della retta PK condotta nel trapezio AMNB parallela alle due basi AM, BN dal mezzo P di AB uno de' lati non paralleli, e ciò pel (§.247.). Se si conduca BO normale sopra AM i due triangoli AOB, CPD sono simili, quindi sarà $CP : AO = CD : AB$: di qui $CP \times AB = AO \times CD$: dunque il solido prodotto da ACB è uguale $\frac{2}{3} \pi PK \times CP \times AB$. I triangoli simili ABO, PKC (§. 219.) ci danno $AB : CP = BO : PK$: dunque $AB \times PK = CP \times BO = CP \times MN$: sostituendo il valore di $AB \times PK$ in quello del solido generato dal triangolo

ACB, sarà questo espresso da $\frac{2}{3}\pi CP^2 \times MN$. Se il triangolo ACB (fig. 139.) isoscele è così disposto, che la sua base AB non s' incontri colla retta CN, intorno alla quale esso si ravvolge, pure il solido generato è due terzi della superficie del circolo di raggio uguale alla distanza del punto medio della base AB da C, o nel nostro caso uguale alla distanza della base da CN espressa da una normale qualunque AM fra AB, CN, questo circolo moltiplicato per MN parte nella CN limitata dalle normali AM, BN calate su d'essa dagli estremi della base AB del triangolo. Infatti il cilindro descritto dal rettangolo ABNM avvolgendosi intorno ad AM è uguale a $\pi AM^2 \times MN$. La solidità del cono descritto dal triangolo CAM avvolgendosi intorno a CM è $\frac{1}{3} \pi AM^2 \times CM$: dunque la solidità del solido descritto dal trapezio ABNC avvolgendosi intorno a CN sarà $\pi AM^2 \times MN + \frac{1}{3} \pi AM^2 \times CM$; se da questo si tolga il cono generato da CBN, o $\frac{1}{3} \pi AM^2 \times CN$ avremo il solido generato dal triangolo ACB, che sarà espresso

$$\begin{aligned} \text{da} \quad & \pi AM^2 \left(MN + \frac{1}{3} CM - \frac{1}{3} CN \right) = \\ & \pi AM^2 \left(MN + \frac{1}{3} CM - \frac{1}{3} CM - \frac{1}{3} MN \right) = \frac{2}{3} \pi AM^2 \times MN. \end{aligned}$$

TEOREMA XXXVI.

LA SOLIDITA' D'UNA SFEROIDE È DUE TERZI DELLA SUPERFICIE
DEL CIRCOLO ISCRITTO NEL POLIGONO GENERATORE
MOLTIPLICATI PER L'ASSE DELLA SFEROIDE.

394. *Dimostr.* Sia il semipoligono regolare PACG (fig. 140.). Considerando il lato AB, se dal centro O si conducano le rette OA, OB, e la normale OI, questa, che è l'altezza del triangolo isoscele AOB sarà il raggio del circolo iscritto al poligono. Nel avvolgersi del semipoligono

intorno a PG, AOB genererà un solido espresso da (§.393.)
 $\frac{2}{3} \pi OI^2 \times MN$; similmente il solido generato da BOC
 sarà espresso da $\frac{2}{3} \pi OI^2 \times NO$; il solido generato da
 COD ci darà $\frac{2}{3} \pi OI^2 \times OQ$: dunque il solido generato da
 AODC sarà espresso da $\frac{2}{3} \pi OI^2 (MN + NO + OQ)$ o da
 $\frac{2}{3} \pi OI^2 \times MQ$: dunque la solidità di tutta la sferoide
 sarà $\frac{2}{3} OI^2 \times PG$.

TEOREMA XXXVII.

LA SOLIDITÀ DELLA SFERA È UGUALE ALLA SUA SUPERFICIE
 MOLTIPPLICATA PER UN TERZO DEL RAGGIO.

395. *Dimostr.* Supponendo, che S esprima la solidità della sfera di raggio OI (fig. 140.) ed y la differenza fra questa solidità e quella della sferoide generata dal semipoligono regolare circoscritto al semicircolo generatore della sfera, sia x la differenza fra il diametro 2r della sfera e l'asse PG della sferoide; è evidente, che (§.394.) avremo
 $S + y = \frac{2}{3} \pi r^2 (2r + x)$: dunque per il solito criterio
 $S = \frac{2}{3} \pi r^2 \cdot 2r = \frac{4}{3} \pi r^3 = 4\pi r^2 \cdot \frac{r}{3}$, ove $4\pi r^2$ esprimendo la superficie della sfera (§. 380.) è dimostrato il teorema.

TEOREMA XXXVIII.

LA SOLIDITÀ DEL SETTORE SFERICO È UGUALE ALLA SUPERFICIE
 SFERICA DELLA SUA BASE MOLTIPPLICATA
 PER UN TERZO DEL RAGGIO.

396. *Dimostr.* Ravvolgendosi il settore POB (fig. 140.) intorno a PO, il solido generato, che si dirà il settore della

sferoide sarà uguale (§. 394.) $\frac{2}{3} \pi OI^2 \times PN$. Se PAB diventi un arco di circolo il settore circolare POB genererà un solido, che si dice settore sferico. La solidità di questo col solito ragionamento sarà

$$\frac{2}{3} \pi OI^2 \cdot PN, \text{ ossia } 2\pi OI \times PN \times \frac{OI}{3} : \dots$$

ma $2\pi OI \times PN$ è la superficie generata dall' arco PAB (§. 381.), ossia è la base del nostro settore : dunque è dimostrato il teorema.

TEOREMA XXXIX.

LA SOLIDITÀ DEL RIPOERTO SOLIDO PRODOTTO DAL SEGMENTO BMDI INTORNO AL CONO TRONCATO DESCRITTO DAL TRAPEZIO EDFE (fig. 141.) RAVVOLGENDOSI INTORNO ALL'ASSE AC È UN SESTO DEL CILINDRO CHE ABBA PER RAGGIO DELLA BASE LA CORDA BD, E PER ALTEZZA L'ALTEZZA EF DEL TRONCO DI CONO.

397. *Dimostr.* Conducete i raggi BC, DC, e dal centro C calate CI normale alla corda BD. Il settore sferico descritto dal settore circolare BCA r avvolgendosi intorno all'asse è uguale a (§.396.) $\frac{2}{3} \pi CB^2 \times AE$. Il settore sferico generato da DCA è $\frac{2}{3} \pi CB^2 \times AF$: dunque il solido generato dal settore DCB è $\frac{2}{3} \pi CB^2 \times AF - \frac{2}{3} \pi CB^2 \times AE = \frac{2}{3} \pi CB^2 (AF - AE) = \frac{2}{3} \pi CB^2 \times EF$. Ma il solido descritto dal triangolo isoscele DCB r avvolgendosi intorno ad AC è (§. 393.) $\frac{2}{3} \pi CI^2 \times EF$: dunque il solido descritto dal segmento BMDI ha per valore $\frac{2}{3} \pi EF (CB^2 - CI^2)$. Ora dal triangolo rettangolo BCI si ha $CB^2 - CI^2 = BI^2 = \frac{1}{4} BD^2$:

dunque il solido generato da BMDI è espresso da

$$\frac{1}{6}\pi BD^3 \times EF, \text{ come si doveva provare.}$$

TEOREMA XL.

IL SEGMENTO DI SFERA COMPRESO FRA DUE PIANI PARALLELI EQUIVALE ALLA SOLIDITÀ D'UN CILINDRO CHE ABBA PER BASE LA SOMMA DELLE BASI DEL SEGMENTO, E PER ALTEZZA LA METÀ DELL'ALTEZZA DEL SEGMENTO STESSO, PIÙ LA SOLIDITÀ DELLA SFERA, DI CUI QUESTA STESSA ALTEZZA È IL DIAMETRO.

398. *Dimostr.* Il segmento sferico di cui si tratta è generato dalla rivoluzione di BEFDM (fig. 141.) intorno AC. Ora il solido descritto dal segmento BMDI è $\frac{1}{6}\pi BD^3 \times EF$. Il tronco di cono descritto da BEFD è (§. 391.)

$$\frac{1}{3}\pi EF(BE^2 + DF^2 + BE \times DF):$$

dunque il segmento di sfera generato da BMDFE sarà la somma di questi due solidi, ossia

$$\frac{1}{6}\pi EF(2BE^2 + 2DF^2 + 2BE \times DF + BD^2).$$

Si meni BO normale sopra DF sarà $DO = DF - BE$; $DO^2 = DF^2 + BE^2 - 2DF \times BE$, onde $BD^2 = BO^2 + DO^2 = DO^2 + EF^2 = DF^2 + EF^2 + BE^2 - 2DF \times BE$. Ponendo questo valore di BD^2 in quello antecedente del segmento diventerà.

$$\frac{1}{6}\pi EF(3BE^2 + 3DF^2 + EF^2) = (\pi BE^2 + \pi DF^2) \frac{FE}{2} + \frac{1}{6}\pi EF^3:$$

che dimostra il teorema.

399. *Coroll.* Se non esiste il piano superiore secondo BE avremo la solidità della calotta sferica generata dalla rivoluzione del segmento ADF intorno ad AF espressa dal cilindro, che ha per base la base della calotta, e per altezza la metà della sua altezza più la solidità della sfera di diametro uguale all'altezza stessa.



APPENDICE



SOLUZIONI DI PROBLEMI GEOMETRICI



400. *Da una retta AB togliere una parte data CD.* (fig. 152.).

In un estremo A della retta AB fatto centro, con una apertura di compasso CD si descriva un circolo, in E, ove questo segnerà la retta AB, sarà limitata la parte tolta AE uguale a CD.

401. *Da un punto A menare una retta AB uguale ad una data CD* (fig. 153.).

Da A menate una indefinita retta AF, e sopra di questa (§. 400.) prendete la parte AB uguale a CD, avrete sciolto il problema.

402. *Sopra una data retta CD costruire un triangolo equilatero* (fig. 154.).

Presa un'apertura di compasso CD prima facendo centro in C si descriva il circolo EMR, poi facendo centro in D si descriva il circolo FNS, si congiungano quindi i punti C, B, ed i punti B, D il triangolo CBD sarà il triangolo domandato; perchè i lati CB, BD sono raggi uguali a CD.

403. *Da un punto A d'una indefinita retta PQ elevate su d'essa una normale* (fig. 154.).

Aperto il compasso a piacere, e fissata una punta in A, coll'altra si segnino i due punti C, D da una parte e dall'altra di A sulla data retta; inoltre sulla CD si costruisca il triangolo equilatero CBD (§. 402.), congiunti i due punti B, A, la retta BA sarà la normale domandata, perchè passa per due punti B, A equidistanti dagli estremi C, D della retta CD (§. 38.).

404. *Altrimente.* Sia l' indefinita PQ , ed il punto A (fig. 155.). In un punto D a piacere al di sopra di PQ fatto centro con una apertura di compasso DA distanza del punto dato A dal preso D si descriva il circolo EAB , che segnerà P, Q in due punti A, E (§. 99.); menato per D, E il diametro EDB e congiunto A con B , la AB sarà la normale domandata; perchè l'angolo EAB è retto (§. 102.). Questo metodo è da usarsi quando il punto dato della retta è una delle sue estremità.

405. *Da un punto A fuori della retta PQ calarvi una normale* (fig. 156.).

Fatto centro in A con un intervallo da potere avere un arco di circolo che si seghi con PQ si descriva quest' arco MN ; sotto o sopra MN si descriva il triangolo equilatero MCN , e congiunti i punti A, C colla retta AC , sarà questa la normale domandata (§. 38.).

406. *Altrimente.* Da un punto (fig. 157.) C a piacere di PQ con un intervallo CA uguale alla distanza di C dal punto dato A si descriva l' arco di circolo ADE che segnerà in un punto D le PQ ; da D come centro con un intervallo DA si segni il punto E nell'arco ADE , congiunto A con E colla retta AE sarà questa la normale domandata. Infatti C, D sono due punti equidistanti dagli estremi E, A di AE : dunque (§. 38.) PQ è normale sopra AE , e (§. 23.) viceversa.

407. *Segate in due parti uguali l'angolo PAQ* (fig. 158.).

Nelle gambe AP, AQ prendete le parti uguali AC, AD , congiungete DC , sopra CD costruite il triangolo equilatero CDE , e menate AE , con questa sarà diviso in mezzo l'angolo dato. Infatti i due triangoli ACE, ADE coi lati rispettivamente uguali sono (§. 44.) coincidenti, dunque sono uguali gli angoli DAE, EAC .

408. *Segate in due parti uguali la retta AB* (fig. 159.).

Sopra AB costruite i due triangoli equilateri ACB, ADB , congiungete i vertici C, D colla CD , questa segandosi in E con AB la dividerà in due punti uguali. Infatti CD pas-

sa per due punti C, D equidistanti dagli estremi A, B, dunque è normale (§. 38.) nel mezzo di AB.

409. *Da un punto A di AQ menate AK in guisa che formi l'angolo KAQ uguale al dato HBG (fig. 160.).*

Nelle rette BG, AQ prendete le parti uguali BC, AD, e da C elevate CD normale sopra BG, che segnerà BH in D; da D elevate la normale FD sopra AQ, e presa la parte DE uguale a CD menate per A, E la retta AK: l'angolo KAQ sarà uguale ad HBC, perchè sono coincidenti i due triangoli BCD, ADE (§. 30.).

410. *Altrimente.* Collo stesso intervallo fatto centro in B (fig. 161.), fra i lati BH, BG del dato angolo si descriva l'arco FC, e fatto centro in A estremo della AQ si descriva l'arco indefinito DER. Con un' apertura di compasso uguale alla distanza FC fatto centro in D nell'arco DER si segni il punto E, e per A, E si meni AK sarà l'angolo KAQ uguale ad HBG, perchè le corde DE, CF essendo uguali sono uguali gli archi (§. 109.) DE, FC, e perciò sono uguali gli angoli HBG, QAK (§. 108.).

411. *Avendosi tre rette A, B, C (fig. 162.) tali, che una qualunque sia minore della somma delle altre due costruire un triangolo.*

Si conduca FG uguale ad una B delle date rette, e negli estremi F, G fatto centro cogli intervalli uguali alle rette A, C si descrivano due circoli, che si segheranno in un punto K; si congiunga il punto K cogli estremi F, G, il triangolo FKG sarà il domandato.

412. *Per un punto A menare una retta RS parallela ad una data PQ (fig. 163.).*

Sopra PQ prendete un punto B, fate poi BC uguale ad AB, e menate AC. Pel problema antecedente sopra AC costruite il triangolo ADC coi lati AB, BC, la AD sarà parallela a PQ; perchè il quadrilatero ADCB avendo i lati opposti uguali per costruzione li ha paralleli (§. 88.).

Altrimente. Da A menate AB a piacere, e poi fate l'an-

golo SAB (§. 409.) uguale ad ABP, la RS sarà parallela a PQ, perchè sono uguali gli angoli alterni (§. 68.) SAB, ABP.

413. *Sopra una retta BA descrivete il quadrato BACD.*

Dall'estremo A (§. 404.) elevate AC normale ed uguale a BA, fate centro in B, C e con un'apertura di compasso uguale a BA descrivete due cerchi, che si segheranno in un punto D; unite C, D; B, D il quadrilatero CDBA sarà il quadrato domandato, perchè ha tutti i lati uguali coll'angolo A retto.

Affinchè BACD fosse un rettangolo con due lati dati uno di questi dovrebbe essere BA, e l'altro AC condotto normale all'estremo A di BA. Si dovrebbe prendere il raggio DC uguale a BA, ed il raggio BD uguale ad AC.

414. *Dividere una retta AB in quante parti uguali si vogliono (fig. 165.).*

Dall'estremo A conducete la retta AP a piacere, e dall'altro estremo B menate BQ parallela (§. 412.) ad AP. Sopra AP prendete le parti uguali AM, MN, NO, OC tante quante sono quelle in cui volete dividere AB; poi prendete sopra BQ le parti Bo, on; mn, ma uguali alle prime, e menate le rette CB, Oo, Nn, Mm, Aa, queste divideranno AB nelle parti domandate. Infatti essendo AM uguale e parallela ad am sarà Aa parallela ad Mm (§. 92.); per la stessa ragione sarà Mm parallela ad Nn, e così innanzi: quindi sono tutte parallele le rette ME, NF, OG, CB. Ora (§. 202.) nel triangolo ANF abbiamo $AM:MN=AE:EF$; ma AM, MN per costruzione sono uguali, dunque sono uguali anche AE, EF. Dagli stessi triangoli abbiamo (§. 204.) $AN:MN=AF:EF$: ma dal triangolo AGO abbiamo $AN:ON=AF:FG$: dunque alternando in queste due proporzioni sarà $AN:AF=MN:EF$; $AN:AF=ON:FG$; dunque $MN:EF=ON:FG$, o $MN:ON=EF:FG$: ma MN, ON sono uguali, dunque sono uguali EF, FG, e così di seguito.

415. *Altrimenti.* Sia la retta AB (fig. 166.) da dividersi per es. in quattro parti uguali. Dall'estremo A conducete a piacere l'indefinita AP, e si prendano in essa le tre parti uguali AM, MN, NO, cioè una di meno di quelle in cui si vuol dividere AB; si conduca da O per B una retta qualunque OQ, che si dividerà in tre parti uguali OB, BC, CD; si uniscano con retta i punti N, D, questa segnerà BA in un punto G tale che BG sarà il terzo di AG, o BG entrerà quattro volte in AB.

Infatti si conducano le rette NB, AD. Si ha la proporzione $ON:OA=OB:OD$, perchè ON è il terzo di OA come OB è il terzo di OD: dunque NB è parallela ad AD (§.205.); quindi sono simili i triangoli NGB, AGD, e perciò si ha la proporzione $NB:AD=BG:AG$; ma si ha ancora la proporzione $ON:OA=NB:AD$; dunque come ON è il terzo di OA così NB è il terzo di AD, e nella proporzione antecedente essendo NB il terzo di AD, BG sarà il terzo di AG.

416. *A due rette AB, BC trovate una terza proporzionale* (fig. 167.) *cioè una retta, che nella proporzione sia quarta proporzionale essendo i due medj uguali a BC.*

Da un punto A menate due rette indefinite AQ, AP che facciano un angolo qualunque, sopra AP prendete le parti Ab, bD uguali alle date rette AB, BC, e sopra AQ prendete Ac uguale a BC, congiungete bc, e da D menate DE parallela a bc sarà Ec la terza proporzionale domandata. Infatti nel triangolo AED (§. 202.) abbiamo $Ab:bD=Ac:cE$, ossia $AB:BC=BC:cE$: dunque cE è la terza proporzionale domandata.

417. *A tre rette date AB, AC, BD* (fig. 168.) *trovate una quarta proporzionale.*

Si faccia l'angolo qualunque QAP. Sopra l' indefinita AP prendete Ab, bD uguali ad AB, BD, e sopra AQ prendete Ac uguale ad AC; menate bc, e da D conducete la DE parallela a bc sarà cE la retta domandata.

Nel triangolo ADE abbiamo $Ab:Ac=bD:cE$, ossia $AB:CA=BD:cE$.

418. *A due rette AB, BC trovate una media proporzionale (fig. 169.).*

Sopra una indefinita PA prendete Cb, bA uguali alle rette date BC, AB, dividete in mezzo in E l'intera retta CA, e col raggio CE fatto centro in E descrivete il semicircolo CDA, finalmente da b elevate la normale bD alla retta CA, e la Db sarà la media proporzionale fra Cb, bA, o fra CB, BA (§. 223.).

419. *Dividete una data retta AC in due parti AB, BC tali, che siano in proporzione con due date rette AM, MN (fig. 170.).*

Da A menate AD, e sopra questa prendete le due parti Am, mn uguali ad AM, MN, unite n coll'estremo C, e da m menate mB parallela ad nC, e sarà risoluto il problema. Nello stesso modo la data retta si dividerebbe in un numero qualunque di parti proporzionali a rette date, o in una data ragione.

420. *Unite per dritto (fig. 171.) una retta BC ad una data AB in guisa, che tutta la retta risultante AC sia alla parte aggiunta come due date rette AN, MN.*

Prolungate AB indefinitamente, e dall'estremo A menate AD, e su questa prendete le parti An, ed mn uguali ad AN, MN; unite mB, e da n menate nC parallela ad mB, sarà BC la retta domandata; perchè $AC : BC = An : mn$, ossia $AC : BC = AN : MN$.

421. *Spezzate (fig. 172.) la retta AB in due parti tali AC, BC, che il rettangolo fatto da esse sia uguale al rettangolo fatto da due date rette PM, MN, supposto però, che questo rettangolo sia minore del quadrato fatto sulla metà di AB.*

Ponete per dritto PM con MN per trovare ad esse (§. 418.) la media proporzionale MQ. Colla metà di AB fatto centro nel punto medio O si descriva il semicircolo AEB, ed all'estremo B sopra AB si elevi BD normale ad AB, ed uguale a QM. Essendo per ipotesi il rettangolo di PM, MN minore del quadrato di OB metà di AB, sarà

anche il quadrato di MQ minore del quadrato di OB, e per ciò MQ, o BD sarà minore del raggio OB: dunque condotta da D la parallela a BA segnerà in un punto E il semicircolo. Ora se da E si cala la normale EC sopra AB sarà questa in C divisa come si voleva, perchè il rettangolo di AC, CB è uguale al quadrato di EC, o di QM, o al rettangolo di PM, MN.

422. *Ad una retta AB (fig. 173.) aggiungerne un'altra BC tale, che il rettangolo della total retta AC e dell'aggiunta BC sia uguale al rettangolo di due date rette PM, MN.*

Trovate una media proporzionale (§. 418.) a queste due rette PM, MN e sia RS, dall'estremo B di AB elevate ad AB la normale BD uguale ad RS, dividete in mezzo in O la stessa AB, e conducete OD; se nel prolungamento di AB prendete OC uguale ad OD la BC sarà la parte domandata da aggiungersi ad AB.

Infatti col raggio OB descrivete il semicircolo AEB e congiungete EC; i due triangoli OBD, OEC coll'angolo comune EOB, e coi lati uguali intorno a questo angolo sono coincidenti: dunque gli angoli OBD, OEC sono uguali, perciò OEC è retto, e quindi la EC è tangente in E: dunque (§. 180.) il quadrato di EC è uguale al rettangolo di AC, BC; ossia questo rettangolo è uguale al quadrato di BD, uguale ad EC, ossia quel rettangolo è uguale al rettangolo di PM, MN.

423. *Dividete una retta BH (fig. 174.) in due parti tali in C che il quadrato d'una parte BC sia uguale al rettangolo fatto dall'altra parte CH, e da una data retta AB.*

Ponete BA in una retta con BH, e per mezzo del semicircolo ADH descritto colla metà di AH trovate la BD media proporzionale fra AB, BH. Con OA metà di AB, fatto centro in O, descrivete il semicircolo AEB prendete OC uguale ad OD avrete in C la divisione domandata di BH.

Infatti se menate EC i due triangoli OEC, ODB sono coincidenti come nel caso innanzi: dunque EC è tangente

in E, perciò il quadrato di EC, o il quadrato di DB, o il rettangolo di AB, BH è uguale al rettangolo di AC, EC. Ma AC si compone delle due parti AB, BC: dunque il rettangolo fatto da AC e BC è due rettangoli (§. 224.) l'uno di base AB e di altezza BC, l'altro di base BC, e di altezza la stessa BC; ossia il rettangolo di AC, BC è il rettangolo di AB, BC più il quadrato di BC. Per la stessa ragione il rettangolo di AB, BH è il rettangolo di AB, BC più il rettangolo di AB, CH: dunque il rettangolo di AB, BC più il quadrato di BC è uguale al rettangolo di AB, BC più il rettangolo di AB, CH; e togliendo il rettangolo comune di AB, BC, sarà il quadrato di BC uguale al rettangolo di CH, ed AB.

424. *Coroll.* Se AB, BH sono uguali sarà il quadrato della parte BC della retta data BH uguale al rettangolo fatto dall'intera retta BH e l'altra parte CH: quindi il metodo dato nella nostra ipotesi serve a dividere una retta in media ed estrema ragione (§. 175.).

425. *Da un dato punto condurre una tangente ad un dato circolo.*

O il punto è sulla circonferenza come in A (fig. 175, 1°.) ed a questo punto condotto il raggio CA alla sua estremità gli si conduca la normale BD (§. 97.).

Se il punto A è fuori del circolo (fig. 175, 2°.) si congiunga esso col centro C, e sul diametro AC si descriva il semicircolo AEC, che segandosi col proposto in E si congiunga A con E, ed AE sarà la tangente; perchè condotto il raggio CE l'angolo AEC iscritto in mezzo circolo AEC è retto.

426. *Sopra una retta (fig. 176.) PQ descrivere un segmento di circolo PEQ capace d'un angolo iscritto PEQ uguale all'angolo CAB.*

Sia CAB ottuso. Conducete la normale AD, fate agli estremi di PQ gli angoli OPQ, OQP uguali a CAD; fate centro in O, ove PO, OQ s'incontrano, e col raggio OP descrivete il circolo avrete così il segmento domandato.

Infatti prolungato PO in R , e condotta ER , l'angolo PEQ è uguale all'angolo retto PER più l'angolo acuto REQ uguale ad RPQ uguale a CAD , dunque l'angolo PEQ è uguale all'angolo CAB .

Se l'angolo CAB (fig. 177.) è acuto menate AD normale ad AB ; fatti gli angoli OPQ , OPQ uguali a CAD , e descritto come sopra il circolo col raggio OP il segmento PRQ sarà il domandato. Infatti fatto in esso l'angolo iscritto PEQ si prolunghi PO in R ; l'angolo PEQ è l'angolo retto PER meno l'acuto REQ , ossia meno l'acuto RPQ o CAD : dunque l'angolo PEQ è uguale a CAB , che è l'angolo retto DAB meno l'acuto CAD .

427. *Iscrivete il dato triangolo ABC in un circolo* (fig. 178.).

Questo problema si risolve facendo passare il circolo per tre punti A , B , C col metodo dato (§. 264, 265.).

428. *Scolio.* Se nel circolo $ABCO$, o nell'arco ABC si volesse trovare il centro si usa lo stesso metodo che per iscrivere il triangolo in un circolo, ed è di elevare dal mezzo di due corde AB , AC non parallele le normali DF , EF , il loro punto d'incontro è il centro.

429. *In un dato triangolo ACB iscrivere un circolo.* (fig. 179.).

Bisegate i due angoli A , B colle rette AD , BD : segandosi esse in D calate la normale DE , fate centro in D , e coll'intervallo DE descrivete il circolo; come la retta AB riuscirà tangente al circolo, così lo saranno gli altri due lati AC , CB .

Infatti da D calate le normali DG , DF ai lati AC , CB , i due triangoli AGD , ADE essendo coincidenti daranno DE uguale a DG . Nello stesso modo si proveranno uguali le normali DE , DF .

430. *In un dato circolo AFB iscrivete un triangolo equiangolo ad uno dato PRQ* (fig. 180.).

Dal centro C menate tre raggi CA , CE , CB , che facciano gli angoli ACE , ECB uguali ad R ; condotta poi la corda AB fate l'angolo FBA uguale a Q , e conducete AF ,

sarà l'angolo AFB uguale ad ECB o R ; l'angolo FBA è uguale a Q : dunque il triangolo AFB è il domandato.

431. *Ad un dato circolo circoscrivete un triangolo SHI equiangolo con uno dato CAB (fig. 181.)*

Prolungate il lato AB in D, E, conducete i raggi OQ, OP, OR in guisa che l'angolo QOP sia uguale a CAD, ed ROP uguale a CBE; ai punti Q, P, R menate le rette SH, SI, HI normali all'estremità dei raggi OQ, OP, OR, il triangolo SHI sarà il domandato.

In fatti nel quadrilatero SQOP l'angolo S unito a QOP da due retti (§. 82.); ma QOP è uguale a CAD; dunque S unito a CAD dà due retti, quindi è uguale a CAB, che pure unito allo stesso CAD dà due retti. Si proverà così, che I è uguale a CBA.

432. *Fate un quadrato uguale ad un dato rettangolo ABCD (fig. 182.).*

Prolungate AB in E onde sia BE uguale a BC; col diametro AE descrivete il semicircolo AFE, elevate BF normale ad AE, sarà (§. 178.) il quadrato di BF uguale al rettangolo di AB, BE, o al rettangolo ABCD.

433. *Fate un quadrato uguale alla somma di due dati quadrati.*

Siano AB, BC i lati dei due dati quadrati (fig. 183.). Fate un angolo retto con due linee indefinite BP, BQ, prendete sopra di BP la parte uguale alla retta BA, e sull'altra PQ la parte uguale a BC e conducete AC; il quadrato (§. 167.) sopra AC uguaglia i quadrati sulle date rette BA, BC.

Se ora fate BH uguale ad AC, BE uguale a CE, e conducete EH, il quadrato sopra EH sarà uguale al quadrato sopra BH più il quadrato sopra BE : ma il quadrato sopra BH uguaglia il quadrato sopra AC, o i quadrati sopra AB, BC; dunque il quadrato sopra EH uguaglia i quadrati sulle tre rette AB, BC, CE.

Si vede come si potrebbe avere la retta, sulla quale

il quadrato costruito fosse uguale alla somma di quadrati sopra un numero qualunque di rette date.

434. *Fate un quadrato, che sia la differenza di due quadrati dati.*

Siano AB , BC (fig. 184.) i lati dei due dati quadrati. Fatto centro in B colla BA si descriva il semicircolo AE , e da C si elevi la CE normale sopra BA , sarà CE la retta, sulla quale fatto un quadrato sarà uguale alla differenza dei quadrati sopra BE , e BC , o sopra BA , e BC .

435. *Costruire un triangolo equivalente ad un quadrilatero dato $ABCD$ (fig. 185.).*

Prolungate BA dalla parte di E , conducete DE parallela a CA , e menate CE ; i triangoli CEA , DCA saranno equivalenti (§. 155.): dunque i due triangoli ACB , DCA , o il quadrilatero $ADCB$ sarà equivalente alli due triangoli ACB , ECA , o al triangolo ECB , che perciò sarà il triangolo domandato.

436. *Fare un triangolo equivalente ad un dato pentagono $AEDCB$ (fig. 186.)*

Conducete DA , DB , prolungate AB da una parte e dall'altra, conducete EH , CF parallele a DA , DB , che si segheranno in H , F colla HF , conducete DH , DF , il triangolo HDF sarà il domandato. Col metodo antecedente il triangolo ADB (§. 435.) vi servirà a dimostrare la soluzione.

437. *Sopra una data retta EF costruire un rettangolo equivalente ad un dato triangolo ABC (fig. 187.).*

Pel vertice C menate l'indefinita KN parallela ad AB , dividete in mezzo in L la base AB colla normale LQ , che segherà in K la KN , elevate da B la normale BP alla stessa AB , che segherà la KN in I , prolungate AB verso M finchè BM uguagli EF ; per M ed I conducete QM , che segherà in Q la LQ ; conducete QO parallela ad LM , ed OM ad LQ , il rettangolo PN sarà il domandato. Dimostratelo.

438. *Altrimente.* Dal vertice (fig. 188.) C calate la normale sulla base AB; e dall'estremo E della retta data EF elevate su d'essa la normale EH, che sia quarta proporzionale a 2FE, AB, CD, compiuto il rettangolo HF sarà il domandato. Provatelo servendovi del (§. 195.).

439. *Scolio.* Con ciascuno dei due metodi precedenti può essere descritto un parallelogrammo con un angolo dato sopra una data retta, ed uguale ad un dato triangolo, se invece degli angoli retti MBP, MLQ (fig. 187.), o invece di BDC, FEH si faccia l'angolo dato, perché il resto della costruzione è lo stesso.

440. *Sopra una data retta descrivete un rettangolo uguale ad una figura rettilinea qualunque.*

Dividete la figura in triangoli (fig. 189.), sopra AB retta data (§. 437.) costruite un rettangolo CB uguale ad uno dei detti triangoli; sopra CD costruite il rettangolo ED uguale all'altro triangolo, e così innanzi finchè siano esauriti tutti i triangoli, ed il rettangolo risultante dai parziali rettangoli sarà equivalente alla figura rettilinea.

441. *Scolio.* Se la figura rettilinea è un rettangolo RQ (fig. 189.) è meglio trovare una quarta proporzionale dopo la retta data, ed i lati QP, PR, chè questa sarà l'altezza del rettangolo domandato di base AB (§. 195.).

442. *Fate un quadrato equivalente ad un rettilineo qualunque ABCDF (fig. 190.).*

Fate un rettangolo AE uguale al dato rettilineo (§. 440.): quindi costruite il quadrato BH uguale a questo rettangolo (§. 432.), ed avrete risoluto il problema.

443. *Costruite una figura rettilinea coincidente con una data.*

Sia ABCDE (fig. 191.) la data, dividetela nei triangoli ACB, CAD, DAE; menate poi l'indefinita FG, e fate gli angoli GFH, HFI, IFK rispettivamente agli angoli BAC, CAD, DAE; prendete le rette FG, FH, FI, FK nguali alle rette AB, AC, AD, AE, e congiungete i punti G, H; H, I; I, K avrete costruito la figura domandata.

444. *Sopra una data retta AB costruite un rettilineo simile ad un dato PQRST (fig. 192.).*

Conducete le rette PR, PS; sopra PQ prolungata se bisogna prendete Pq uguale ad AB, menate qr parallela a QR, rs parallela ad SR, ed st parallela a TS, il rettilineo $Pqrst$ sarà simile al rettilineo PQRST. Fatto ciò costruite col metodo antecedente sopra AB il poligono ABCDE coincidente con $Pqrst$, avrete trovato il poligono domandato.

Altrimente. Costruite i triangoli ABC, ACD, ADE equiangoli ai triangoli PQR, PRS, PST, ed avrete il poligono ABCDE simile al dato.

445. *Descrivete una figura simile ad un dato rettilineo, e che siano fra loro nella ragione di due rette date.*

Sia PTSRQ il rettilineo dato (fig. 193.). In PQ prolungato se bisogna prendete (§. 419.) Pn che sia a PQ nella ragione delle due rette date, che è quella della figura da descriversi alla figura data, nella stessa retta prendete Pq media proporzionale fra Pn , e PQ (§. 418.), e sopra Pq col metodo antecedente descrivete la figura $Pqrst$ simile alla PQRST, avrete la domandata.

Infatti abbiamo per ipotesi $Pn : Pq = Pq : PQ$; dunque (§. 196.) il rettangolo fatto da Pn , PQ è uguale al quadrato sopra Pq . Ora il rettangolo fatto da Pn , PQ sta al quadrato sopra PQ come l'altezza Pn sta all'altezza PQ (§. 188.): ma il rettangolo di Pn , PQ è uguale al quadrato di Pq ; dunque Pn sta a PQ come il quadrato di Pq è al quadrato di PQ; ora questi quadrati sono come i poligoni simili $Pqrst$, PQRST (§. 261.), dunque questi poligoni sono come Pn a PQ.

446. *Scolio.* Se si abbia la proporzione continua $Pn : Pq = Pq : PQ$ fra tre rette, sarà la prima retta alla terza come il quadrato sulla media proporzionale è al quadrato sulla terza. Ciò si è provato nell'antecedente dimostrazione.

447. *Descrivere una figura rettilinea, che sia uguale ad una data P , e simile ad un'altra $ABCD$ (fig. 194.).*

Sopra AB fate il rettangolo AF uguale ad $ABCD$ (§. 440.), e sopra AG fate un rettangolo AN uguale a P ; in AB prendete AI media proporzionale fra AB , AE , e sopra AI costruite il rettilineo $AIKH$ simile ad $ABCD$, questo sarà il domandato.

Infatti il rettilineo $ABCD$ sta al rettilineo P come il rettangolo AF al rettangolo AN : ma questi due rettangoli sono come AB ad AE , dunque i due rettilinei sono come queste due rette: ma perchè si ha $EA : AI = AI : BA$ abbiamo (§. 446.), che EA , BA sono fra di loro come i quadrati di AI , BA : dunque il rettilineo $ABCD$ sta al rettilineo P come il quadrato di BA è al quadrato AI : ma i due rettilinei simili $ABCD$, $AIKH$ sono come i quadrati di AB , AI : dunque i rettilinei $ABCD$, P sono come i rettilinei $ABCD$, $AIKH$, e perciò $AIKH$ è uguale a P .

448. *Descrivete un rettilineo simile al rettilineo $ABCD$ (fig. 195.), e che sia ad un altro rettilineo P nella ragione delle due rette S , R .*

Fate il rettangolo AF uguale ad $ABCD$, ed il rettangolo AN uguale a P . Prolungate AE in Q in guisa che AQ sia quarta proporzionale dopo R , S , AE ; dopo ciò pel precedente metodo fate $AIKH$ simile ad $ABCD$ ed uguale al rettangolo di AQ , allora $AIKH$, P ossia i rettangoli AM , AN saranno come AQ ed AE , o come S ad R .

449. *In un dato triangolo ACB (fig. 196.) iscrivete un quadrato.*

Da un punto M a piacere del lato AC sulla base AB si conduca la normale MG ; fate il quadrato $MRSQ$, e da A per R menate ARE finché incontri CB in E ; da E condncete ED parallela, e DN normale ad AB potrete così formare il quadrato.

I triangoli ADE , AEF , nei quali sono condotte le pa-

rallele RM, RS alle basi, e che hanno lo stesso lato AE vi daranno la dimostrazione della costruzione.

450. *Scolio.* Collo stesso metodo può iscriversi nel triangolo un rettangolo, i di cui lati siano nella ragione di due rette. In tal caso invece di essere uguali le rette MR, MG saranno nella data ragione, e si userà la stessa costruzione.

451. *In un dato triangolo ABC (fig. 197.) iscrivere un rettangolo EFGH uguale ad un rettilineo Q, che non ecceda la metà del triangolo.*

Sopra la base AB costruite un rettangolo ABPL uguale a Q (§. 440.). Dal vertice C calate la normale CD sulla base AB, che prolungherete fino all'incontro K con LP. Dividete CD in I in due parti tali (§. 421.), che il rettangolo di CI, e DI sia uguale al rettangolo di CD, DK. Potete fare anche così. Descrivete due semicircoli KMC, DNC l'uno sul diametro KC, l'altro sopra DC. Da D elevate DM normale sopra DC, da M la MN parallela a DC, e dall'intersezione N la NI parallela ad MD, avrete così il rettangolo di IC, ID uguale al rettangolo di DC, DK, ed avrete il rettangolo EG uguale ad AP o al rettilineo Q.

Infatti essendo i rettangoli di CI, ID, e di CD, DK uguali avremo la proporzione (§. 195.) $DI:DK = CD:CI$: ma dai due triangoli simili CEF, CAB (§. 227.) abbiamo $CD:CI = AB:EF$: dunque $DI:DK = AB:EF$, dalla quale si ha, che il rettangolo di DI, EF è uguale al rettangolo di DK, AB.

452. *Conducete dentro l'angolo BAC una retta KL in guisa che sia parallela ad una data AG, e che il triangolo AKL sia uguale al dato rettangolo FD (fig. 198.).*

Prolungata FE segnerà i due punti G, H, ed in AB prendete AK media proporzionale fra GH, 2EF, e menate KL parallela ad AG. I due triangoli AKL, HGA simili ci danno, che AKL sta a HGA come il quadrato sopra AK sta al quadrato sopra GH: ma il quadrato AK per la costruzione fatta è uguale al rettangolo di GH, e 2FE:

dunque AKL , HGA sono fra loro come il rettangolo di GH , $2EF$, ed il quadrato di GH : ma queste due figure hanno la stessa altezza GH : dunque sono fra loro come $2FE$, GH : perciò i triangoli AKL , HGA sono come $2FE$, GH , o come FE , $\frac{1}{2}GH$, o come i rettangoli fatti da EF , AF , e da $\frac{1}{2}GH$, AF , cioè come il rettangolo FD , ed il triangolo AGH : dunque il triangolo AKL è uguale al rettangolo FD .

453. *Dentro l'angolo BAC menate una linea KL uguale ad una data retta MN , e che dia il triangolo KAL uguale ad un rettilineo dato (fig. 199.).*

Nella figura il punto D è medio di MN , il rettangolo FD è costruito uguale al dato rettilineo, ed il segmento MHN dà l'angolo MHN uguale ad A . Le rette AK , AL nell'angolo BAC sono uguali HM , HN . Fate la costruzione e dimostrazione.

454. *Dato un dato angolo EAB , per un dato punto P conducete FD in guisa che il triangolo AED sia uguale ad un dato rettilineo (fig. 200.).*

Fatto il parallelogrammo $AFPH$ uguale al dato rettilineo conducete IK normale ad AD ed uguale ad FP , menate KD uguale a PH ; per P , D conducete DE .

Il problema è impossibile quando KD o PH è minore di KI o PF , cioè quando il dato rettilineo è minore del parallelogrammo fatto con AF , $2FP$. Dimostrate tutto.

455. *Da un dato poligono $ABCDEFH$ togliete una parte $IAHFK$ uguale ad un rettangolo MN per mezzo d'una retta IK parallela alla data AQ , o che passi per un punto P (fig. 201.).*

Prolungate BA , FE finchè s'incontrino in G ; sopra ON costruite un rettangolo OQ uguale al rettilineo $AGFH$; allora o pel (§. 452.), o pel (§. 454.), secondo i due casi proposti, menate IK in guisa che il triangolo IGK sia uguale ad MQ .

456. *Dividete un triangolo ABC in un numero di parti per es. tre per mezzo di rette parallele ad uno dei lati, ed in una data ragione (fig. 202.).*

Sia divisa AB in tre parti AE, EF, FB, che siano fra loro nella data ragione (§. 419.); col diametro AB si descriva il semicircolo AIB, e si calino le normali EH, FI ad AB; poi fatto centro in A cogli intervalli AH, AI si descrivano gli archi HK, IL, e da K, L si menino KM, LN parallele a BC.

I triangoli AKM, ALN, ABC sono (§.230.) come i quadrati AK, AL, AB, o (§.223.) come i rettangoli di AB, AE; di AB, sopra AF, ed il quadrato di AB, ossia come AE, AF, AB. Si faranno le proporzioni, ed in queste le divisioni (§. 211.).

457. *Dividere una retta PQ in un dato numero di parti per es. 3 in guisa che costruiti sopra di esse poligoni simili abbiano fra loro la ragione che hanno date rette AB, AC, AD (fig. 203.).*

Sopra la maggiore AD descrivete il semicircolo AEFD, elevate le normali BE, CF, conducete a piacere PR, e sopra di essa prendete le parti PH, HI. IK uguali alle rette AE, AF, AD, congiungete KQ, e menate HM, IL parallele a KQ. Le figure simili PmM, M/L, LqQ costruite sulle parti PM, ML, LQ avranno la data ragione.

458. *Determinate la posizione d'un punto tale P, che da esso condotte rette all'estremità delle rette AB, CD, EF date in grandezze ed in posizioni, i triangoli ABP, CPD, EPF siano uguali (fig. 204.).*

Prolungate AB, CD, FE finchè s'incontrino in G, ed H; prendete Gm, Hs uguali a BA, EF: e Gn, Hr uguali a CD; compite i parallelogrammi mn, rs, e conducete le diagonali Gp, Ht, queste prolungate vi daranno il punto P. La dimostrazione è facile.

459. *In un circolo ABDC condurre una corda AB uguale ad una data retta RS minore del diametro, e che passi per un punto P (fig. 205.).*

Iscrivete la corda CD uguale ad RS sopra la quale dal

centro O sia calata la normale OF . Congiunti i punti P , O descrivete il semicircolo PEO , menate OE uguale ad OF ; finalmente conducete per E , P la AB , questa sarà la retta domandata.

460. *Per un dato punto P condurre in un circolo la corda AB tale che le due parti AP , PB abbiano una data differenza DE (fig. 206.).*

Congiunto il punto P col centro C descrivete il semicircolo PQC , e conducete in questo la corda PQ , che sia la metà di DE , che prolungherete in A , B alla circonferenza, sarà AQ uguale a QB , e quindi AB è la retta domandata.

461. *Trovate un punto P , al quale condotte da tre punti dati A , C , B tre rette gli angoli fatti da esse siano dati (fig. 207.).*

In AB descrivete un segmento ABP capace dell'angolo, che debbono fra le due rette da menarsi da A , B ; fate l'angolo DBA uguale all'angolo che debbono fare le rette da condursi da A , C ; per D , C menate DP , il punto P è il cercato.

462. *Descrivete una circonferenza, che passi per due dati punti A , B , e che sia tangente ad una data retta LD (fig. 208.).*

Conducete AB , bisegatela colla normale FE , che si segnerà in un punto F colla CD : da un punto qualunque H di EF calate HG normale a CD , ed avendo condotto BF menate HI uguale ad HG : da B conduce BK parallela ad HI ; fate centro in K coll' intervallo BK descrivete il circolo, e sarà il domandato.

Per i triangoli KFB , KFL , nei quali sono condotte le parallele HI , HG alle basi, e che hanno il lato comune FK come sono uguali HI , HG così sono uguali KB , KL : dunque sono uguali le tre rette KL , KB , KA . Perchè le due rette HI , Hi possono essere menate da H a BF uguali ad HG , eccetto il caso in cui HI riesca normale a BF , il problema ha due soluzioni. Quando poi la normale calata sopra BF

è maggiore di HG il problema è impossibile. Lo stesso si deve dire nel seguente problema.

463, *Descrivete la circonferenza d'un circolo, che passi per un dato punto A, ed a cui siano tangenti due rette date BD, BC (fig. 209.).*

Dal punto di concorso di queste rette conducete BA, ed anche BN che biseghi l'angolo CBD; da un punto E di BN sopra BC calate la normale EF, e ad AB applicate EG uguale ad EF, parallela alla quale menate AH, che incontrerà BN in un punto H; se coll'intervallo HA descrivete la circonferenza, sarà la domandata.

I triangoli KBH, IBH sono coincidenti, dunque sono uguali HI, HK. Come sono uguali EF, EG sono uguali HI, HA.

464. *Da un punto d'intersezione P di due dati circoli O, e C (fig. 210.) sia condotta una retta PR in guisa, che la sua parte QR intercetta fra le due periferie sia uguale ad una data retta AB.*

Sopra la retta OC, che congiunge i due centri descrivete il semicircolo ODC, nel quale conducete la corda OD, che sia $\frac{1}{2}AB$: avendo condotta a questa parallela la retta PR questa sarà la domandata. Per dimostrarlo menate DC, e ad essa parallela la OF. Dall'essere OFED un rettangolo proverete la costruzione.

465. *In un triangolo (fig. 211.) ACB determinate un tal punto P, che le normali PQ, PR, PS da esso calate sopra i lati AB, AC, CB siano come tre rette date, m, n, p.*

Prendete AE, BF uguali ad m, menate le rette EM, FN parallele ad AB, e prendete in esse le parti EG, FH rispettivamente uguali ad n, p; condotte per A, G, e per B, H le rette AG, BH nel loro incontro in P daranno il punto domandato.

Menate GI parallela ad AC, e le normali GK, GL, i due triangoli simili EGL, IGK ci danno IG, GE, o m, n

proporzionali a GK, GL o a PQ, PR. Nello stesso modo si proverà, che PQ, PS sono come m , p .

Scolio. In una maniera simile si risolve il problema quando si voglia, che le rette da condursi da P ai tre lati nella ragione di tre rette date facciano con essi un dato angolo.

166. *Trovate in un triangolo ACB (fig. 212.) un punto tale P che da esso condotte ai vertici A, B, C dei tre angoli tre rette PA, PB, PC siano come tre rette date a , b , c .*

Prendete in AB la AF uguale ad a , ed AI uguale a c ; fate gli angoli AFG, AIK uguali ad ACB; fatto centro in F, G cogli'intervalli FH, GH uguali a b ed AK descrivete due archi di circoli che si segheranno in un punto H; menate AH, e da B la BP, che faccia l'angolo PBA uguale ad AHF; il punto P d' unione delle rette AH, BP sarà il punto domandato.

Menate CP. I triangoli simili ABP, AHF vi danno subito le rette AP, BP proporzionali ad a , b . I triangoli simili ABC, AGF vi daranno le proporzioni

$$AB : AP = AH : AF ; AB : AC = AG : AF ,$$

dalle quali si ricava, che il rettangolo di AP, AH è uguale al rettangolo di AC, AG perchè ambedue sono uguali al rettangolo di AB, AF. I due detti rettangoli uguali ci danno la proporzione $AP : AC = AG : AH$, dalla quale si ricavano simili i triangoli ACP, AHG, che ci danno AP, PC proporzionali ad AG, GH, o ad AG, AK, o finalmente ad FA, AI uguali ad a , c .





TRIGONOMETRIA



1. La Trigonometria è una parte delle Matematiche, nella quale si danno le formole per calcolare alcuni dei sei elementi d'un triangolo cogniti gli altri, che lo determinano.

2. Si è veduto (G. §. 58.), che un triangolo è determinato quando sono dati tre de'suoi sei elementi, fra i quali vi sia almeno un lato. Quindi nella trigonometria si danno formole, nelle quali sono collegati i sei elementi del triangolo, onde datine tre con uno almeno, che sia un lato, dalle dette formole si possono ricavare i valori degli altri tre.

3. Dai teoremi però di Geometria non si ha maniera di collegare in equazioni i valori dei lati con quelli degli angoli d'un triangolo. Infatti i lati sono linee rette, e gli angoli sono misurati dagli archi di circolo intercetti: ora in Geometria non vi è teorema, che dia la relazione fra le linee rette, e gli archi di circolo, come sarebbe tra le corde e gli archi sottesi, che pur si veggono crescere e decrescere dentro il limite di mezza circonferenza come le loro corde, ma senza una data ragione, o relazione.

4. Da ciò si vede la necessità di abbandonare nella trigonometria gli archi come misuratori, o rappresentanti i valori degli angoli, e d'introdurre altre linee, e meglio

linee rette , che siano in così stretta relazione cogli angoli, che li rappresentino.

5. Troviamo queste rette. Qualunque triangolo si riduce a due triangoli rettangoli abbassando dal vertice d'un angolo la normale sul lato opposto. Sia il triangolo DAC (fig. 142.); calando la normale DB si hanno i due triangoli DAB, BDC, i quali quando siano calcolati è calcolato il dato triangolo; perchè sommando AB con BC abbiamo il lato AC, ed aggiungendo l'angolo ADB all'angolo BDC abbiamo ADC. Se poi il triangolo EFG (fig. 143.) è ottusangolo in F, e si voglia calare la normale da G sopra EF, che deve essere prolungata : qualora siano calcolati i triangoli rettangoli EGI, FGI , sottraendo il cateto FI dal cateto EI si avrà il lato EF; cognito l'angolo acuto GFI si conoscerà l'ottuso GFE, perchè sono angoli conseguenti; e sottratto dall'angolo EGI l'angolo FGI si avrà l'angolo EGF.

6. Basta dunque nella trigonometria di dare le formole per calcolarle i triangoli rettangoli : onde in questi è necessario assegnare le rette rappresentanti gli angoli.

7. Sia perciò descritto con un raggio noto e fisso AO (fig. 144.), che diremo *raggio trigonometrico* il quadrante AMH. Se da tutti i punti al di sopra di A di questo quadrante, come I, M, L ec. s'immaginino calate sul raggio AO le normali IS, MC, LD, e poi condotti i raggi IO, MO, LO si avranno altrettanti triangoli rettangoli ISO, MCO, LDO, ec. che hanno le ipotenuse IO, MO, LO note, e di valor fisso, e nei quali gli angoli acuti IOS, MOC, LOD ec. misurati dagli archi AI, AM, AL ec. di tutti i possibili valori, di cui sono suscettibili gli angoli acuti, saranno tutti i possibili angoli acuti; e quindi tali saranno anche gli angoli SIO, CMO, DLO ec. Quindi non vi sarà triangolo rettangolo, che non ne abbia uno equiangolo tra i triangoli così costruiti nel quadrante.

8. Di più, fissato l'angolo acuto per es. IOS, o MOC, LOD, non vi possono essere incontro, che i cateti IS,

MC, LD, e ciò per l'invariabilità del raggio. Da ciò viene, che questi cateti IS, MC, LD ec. possono rappresentare gli angoli IOS, MOC, LOD ec.; o gli archi IA, MA, LA ec., che misurano questi angoli; perchè se si fissa per es. IS si ha il solo arco IA, ed il solo angolo IOS; e viceversa dato l'angolo IOA, e perciò il suo arco IA misuratore, è dato il cateto IS.

9. Ancora i cateti SO, CO, DO possono rappresentare gli altri angoli acuti SIO, CMO, DLO dei triangoli rettangoli nel quadrante, perchè anche essi vengono necessariamente posti i detti angoli, e viceversa.

10. Se ben si osserva si vedrà, che essendo gli angoli SIO, CMO, DLO uguali agli angoli IOH, MOH, LOH, i primi angoli, come gli altri, saranno misurati dagli archi IH, MH, LH; e che quello, che sono i cateti IS, MC, LD rispetto gli archi IA, MA, LA misuratori degli angoli IOS, MOC, LOD lo sono le rette IE, MF, LG, o i cateti SO, CO, DO, rispetto gli archi IH, MH, LH misuratori degli altri angoli acuti SIO, CMO, DLO. Si noti, che il punto A è fisso, e che l'arco AI crescendo al di sopra verso H il punto I è variabile.

11. Avendo trovato le rette rappresentanti gli angoli acuti d'un triangolo qualunque rettangolo è bene dar loro i nomi, coi quali siano subito indicate.

12. Le rette IS, MC, LD si chiamano i *seni* degli archi AI, AM, AL, o degli angoli IOS, MOC, LOD misurati dagli stessi archi: dunque *il seno d'un arco è la normale calata da una sua estremità al raggio, che va all'altra estremità*. Infatti IS è una normale calata dall'estremità I dell'arco IA sul raggio OA, che va all'altra estremità A. Si scrive poi $IS = \text{sen. IA}$, $MC = \text{sen. MA}$, ovvero $IS = \text{sen. IOS}$, $MC = \text{sen. MOC}$.

13. L'arco IH unito ad IA da 90° , quindi si chiama il complemento di IA. Così se IA fosse di gradi 30, non si dice IH l'arco di 60° , ma si dice il complemento di 30° .

Essendo MA di gradi 70 , MH non si dice arco di 20 gradi; ma il complemento di 70° .

Quindi quantunque per la definizione data (§. 10.) IE sia il seno di IH , ed MF di MH , si dice IE seno dell'arco di complemento di IA ; si dice MF seno dell'arco di complemento di MA ; più semplicemente però si dice IE coseno di IA ; MF coseno di MA : quindi il coseno di un arco è il seno del complemento dell'arco stesso. Infatti MF , che è il coseno di MA , è il seno di MH complemento di MA . Se dunque si dirà il coseno di 50° , vuol dire il seno di 40° complemento di 50° . Si scrive poi $IE = \cos. IA$; $MF = \cos. MA$. E se IA è di 30° , si scriverà $IE = \cos. 30^\circ$. Generalmente se A è un arco, il suo complemento sarà $90^\circ - A$, e $\text{sen}A$ sarà lo stesso che $\cos(90^\circ - A)$, e viceversa $\text{sen}(90^\circ - A) = \cos A$.

14. Dunque i cateti SO , CO , DO , che sono i seni degli angoli SIO , CMO , DLO (§. 10.), saranno i coseni degli angoli IOS , MOC , LOD , o dei loro archi IA , MA , LA .

15. Essendo SO il coseno dell'arco IA , ed essendo SO una parte del raggio compresa fra il centro O , ed il piede S del seno IS ne viene, che il coseno d'un arco è la parte del raggio compreso fra il centro, ed il piede del suo seno.

16. Si avverta, che il seno MC è la metà della corda MR , che sottende l'arco MAR doppio di MA ; cosicchè $MR = 2\text{sen}.MA$; sarà ancora $MK = 2MF = 2\cos MA$.

17. Da ciò viene, che in un circolo descritto col raggio trigonometrico se si hanno due corde RM , MK congiunte ad angolo retto RMK , esprimendo una per esempio MR il doppio seno della metà dell'arco da essa sotteso, l'altra esprime il doppio coseno dello stesso arco.

18. Come per trovare le rette rappresentanti gli angoli acuti d'un triangolo rettangolo sono stati opportuni i triangoli rettangoli colle ipotenuse costanti, così giovano i triangoli rettangoli con un cateto costante.

19. Per averli senza dipartirci dal circolo descritto

col raggio trigonometrico, e senza ammettere altra retta nota e fissa fuori di questo raggio, da A si elevi la normale indefinita AP al raggio AO, e si prolunghino le ipotenuse IO, MO, LO fino all'incontro in B, N, P con questa normale, avremo i triangoli rettangoli BAO, NAO, PAO, nei quali posti gli archi IA, MA, LA, o gli angoli BOA, NOA, POA vengono necessariamente i cateti BA, NA, PA, e viceversa: quindi abbiamo altre rette trigonometriche rappresentanti gli angoli IOA, MOA, LOA dei triangoli rettangoli nel quadrante. Queste rette si chiamano le tangenti trigonometriche, o semplicemente le tangenti degli archi AI, AM, AL, o degli angoli IOA, MOA, LOA da essi misurati. Si vede poi, che per es. la tangente NA dell'arco MA è la tangente ad un suo estremo A limitata in N dal raggio MO prolungato, che va all'altro estremo M. Dunque *la tangente d'un arco è la tangente ad una sua estremità limitata dall'intersezione del raggio prolungato, che va all'altra estremità*. Scriveremo poi $AB = \text{tang. IA}$, $NA = \text{tang. MA}$.

20. Le ipotenuse BO, NO, PO si dicono le secanti degli archi AI, AM, AL: dunque *la secante d'un arco è il raggio prolungato, che passa pel suo estremo variabile compreso fra il centro e l'incontro colla tangente*. Noteremo poi $BO = \text{sec. IA}$, $NO = \text{sec. AM}$.

21. Se nell'arco di complemento al punto H si conduca la tangente indefinita HT, e si prolunghino i raggi MO, LO fino, che s'incontrino in T, X con questa tangente, essendo AN la tangente di AM, la TH sarà la tangente dell'arco HM di complemento di AM, o la *cotangente* di AM. La TO sarà la secante dell'arco MH di complemento di MA, o la *cosecante* di MA. Avremo dunque $TH = \text{cotang. MA}$; $TO = \text{cosec. MA}$, $XH = \text{cotang. LA}$; $XO = \text{cosec. LA}$.

22. Abbiamo dunque ottennto due serie di triangoli rettangoli gli nni coll'ipotenusa costante, che è il raggio trigonometrico, e coi cateti, che sono i seni degli angoli

opposti; ovvero, essendo un cateto il seno dell'angolo opposto, l'altro cateto è il coseno dello stesso angolo.

23. L'altra serie è di triangoli rettangoli con un cateto costante, che è il raggio trigonometrico; coll'altro cateto, che è la tangente dell'angolo opposto; e l'ipotenusa è la secante dello stesso angolo.

24. Poichè in queste due serie di triangoli gli angoli acuti possono avere tutti i valori possibili, non vi è triangolo rettangolo, che in ambedue le serie non ne abbia uno simile.

25. Le rette che abbiamo introdotto nei nostri triangoli si chiamano *rette trigonometriche*. Quindi le rette trigonometriche di un angolo acuto, o del suo arco misuratore sono il seno, la tangente, e la secante; il coseno, la cotangente, e la cosecante. È chiaro, che crescendo l'arco da A verso H il seno, la tangente, e la secante crescono: decrescono poi il coseno, la cotangente, e la cosecante.

Vediamo ora come si possano calcolare queste rette trigonometriche.

26. Si dimostra a questo oggetto, che cognito il raggio, ed il seno d'un arco si possono calcolare le altre rette trigonometriche.

27. Dal triangolo rettangolo ISO (fig. 144.) abbiamo $IS^2 + SO^2 = IO^2$, ossia facendo l'arco $AI = a$, ed esprimendo per r il raggio, sarà $\text{sen}^2 a + \text{cos}^2 a = r^2$; da questa cosa $\text{cosa} = \sqrt{r^2 - \text{sen}^2 a}$. Dalla prima si ricava, che il quadrato del seno più il quadrato del coseno d'un arco è uguale al quadrato del raggio.

28. Dalla seconda abbiamo, che il coseno è uguale alla radice del quadrato del raggio meno il quadrato del seno: dunque cognito il raggio, ed il seno d'un arco si trova il suo coseno. Può essere utile il ricavare, che il seno è uguale alla radice del quadrato del raggio meno il quadrato del coseno.

29. Dai due triangoli simili ABO, ISO si ottiene

$$BA : IS = AO : SO,$$

ossia

$$\text{tang.} a : \text{sen.} a = r : \text{cos.} a, \text{ e } \text{tang.} a = \frac{r \cdot \text{sen.} a}{\text{cos.} a} :$$

cioè la *tangente d'un arco è uguale al raggio moltiplicato pel seno dell'arco diviso pel suo coseno*; e poichè il coseno si conosce cognito il raggio, ed il seno: anche la tangente si conosce dato il raggio, e trovato il seno.

30. Gli stessi triangoli simili ci danno

$$BO : IO = AO : SO ;$$

ossia

$$\text{sec.} a : r = r : \text{cos.} a, \text{ e } \text{sec.} a = \frac{r^2}{\text{cos.} a} ,$$

dunque la *secante d'un arco è uguale al quadrato del raggio diviso pel coseno dell'arco stesso*: quindi anche la secante si conosce cognito il raggio, ed il seno.

31. I due triangoli simili THO, MOF ci danno le proporzioni $TH : MF = OH : OF$; $TO : MO = HO : FO$; ossia le due; $\text{cotang.} a : \text{cos.} a = r : \text{sen.} a$; $\text{cosec.} a : r = r : \text{sen.} a$: dalle quali abbiamo

$$\text{cotang.} a = \frac{r \text{cos.} a}{\text{sen.} a} ; \text{cos.} a = \frac{r^2}{\text{sen.} a} :$$

dunque la *cotangente d'un arco è uguale al raggio moltiplicato pel seno diviso pel coseno dell'arco stesso*.

32. La *cosecante d'un arco è uguale al quadrato del raggio diviso pel seno dell'arco stesso*.

33. Dunque è vero, che *cognito il raggio ed il seno d'un arco si possono trovare le altre rette trigonometriche dello stesso arco*.

34. Ma ancora. Se si conoscono le rette trigonometriche d'un arco per un dato raggio si conoscono subito le rette trigonometriche dello stesso arco per un altro raggio moltiplicando le prime per questo stesso raggio, e dividendo il prodotto pel primo raggio, e ciò perchè le rette trigonometriche sono come i raggi dei circoli, ove si trovano. Infatti si supponga con un raggio qualunque IO descritto il quadrante ah ; il seno dell'angolo IOA in questo quadrante è is , il suo coseno è so , la tangente at , la secante bo . Ora i triangoli simili IOS , soO ci danno $IS : is = IO : so$: cioè i seni dello stesso arco sono come i raggi dei circoli, nei quali si trovano. Dalla nostra proporzione si ricava

$$is = \frac{IS \times so}{IO}.$$

Lo stesso si dimostrerà per le altre rette trigonometriche; quindi è dimostrata la nostra proposizione.

35. I calcoli riescono più semplici se il raggio trigonometrico si suppone uno. Calcolate in questa ipotesi le rette trigonometriche degli archi diventano subito rette trigonometriche degli stessi archi per un altro raggio moltiplicandole pel nuovo raggio; perchè per esempio nell'espressione antecedente del seno is , essendo $IO = 1$, abbiamo $is = IS \times so$. Viceversa dividendo le rette trigonometriche pel loro raggio diventano rette trigonometriche dello stesso arco pel raggio uno.

36. Dopo ciò il calcolo delle rette trigonometriche per un raggio qualunque dipende dal calcolo del seno di un arco qualunque pel raggio 1.

37. Nei (G. §. 276, 277.) abbiamo dato il valore di alcuni lati dei poligoni regolari per mezzo del raggio; questi sono valori di corde di archi noti: ora le metà di queste corde sono i seni (§. 16.) degli archi metà di quelli sottesi dalle corde stesse: dunque conosciamo i seni di alcuni archi. Per esempio abbiamo trovato, che (G. §. 276.)

$r\sqrt{2}$ è il valore del lato del quadrato iscritto, o della corda di 90° , dunque $\frac{r\sqrt{2}}{2} = \frac{r}{\sqrt{2}}$ è il seno di 45° . Nel (G. §. 276.) abbiamo trovato, che $\frac{r(-1 + \sqrt{5})}{2}$ è il lato del decagono, o la corda di 36° , dunque $\frac{r(-1 + \sqrt{5})}{4}$ sarà il seno di 18° . Ma il più semplice è il valore del lato dell'esagono, che è uguale al raggio: dunque $\frac{r}{2}$ sarà il seno di 30° .

38. Possiamo dunque fissare, che di un qualche arco già conosciamo il seno cognito il raggio. Vediamo ora come si possa di qui procedere a trovare i seni di tutti gli archi maggiori e minori di uno di questi già noti. Nel (G. §. 278.) la formola

$$P = \frac{p\sqrt{4r^2 - p^2}}{r}$$

risolve il problema; dato il lato p d'un poligono regolare iscritto trovare il lato P d'un poligono della metà del numero dei lati. Se sia $2a$ l'arco sotteso da p , sarà (§. 16.) $p = 2\text{sen}a$: sarà poi $P = 2\text{sen}.2a$; dunque

$$\text{sen}.2a = \frac{2\text{sen}.a\sqrt{r^2 - \text{sen}^2.a}}{r},$$

e supponendo $r = 1$,

$$(A) \quad \text{sen}.2a = 2\text{sen}.a\sqrt{1 - \text{sen}^2.a};$$

dunque con questa formola cognito il seno d'un arco a si può trovare il seno dell'arco doppio $2a$.

39. Nel (G. §. 279.) colla formola

$$(A) \quad p = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - P^2}}$$

si risolve il problema cognito il lato P d'un poligono iscritto trovare il lato p d'un poligono d'un doppio numero di lati, se dunque sia $P=2\text{sen}.2a$ sarà $p=2\text{sen}a$, ed avremo

$$\text{sen}.a = \frac{1}{2} \sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \text{sen}^2 2a}}$$

e fatto $r = 1$

$$(B) \quad \text{sen}.a = \frac{1}{2} \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \text{sen}^2 2a}}$$

colla quale formola si calcola il seno della metà d'un arco cognito il seno dell'arco intero.

40. Siano due archi (fig. 145.) $BEA = 2a$, $AFC = 2b$, avremo $BA = 2\text{sen}.a$, $AC = 2\text{sen}.b$. Se si conduca la corda BC sarà $BC = 2\text{sen}(a + b)$. Si meni il diametro AD , e le corde CD , BD . Essendo le corde AC , CD congiunte ad angolo retto ACD , ed essendo $AC = 2\text{sen}.b$, sarà $CD = 2\cos b$ (§. 16.). Per la stessa ragione sarà $BD = 2\cos.a$. Ora dal quadrilatero iscritto $BACD$ abbiamo (G. §. 259.)

$$AD \times BC = BA \times CD + AC \times BD,$$

ossia

$$4r.\text{sen}(a + b) = 4\text{sen}.a \cos.b + 4\cos.a \text{sen}.b,$$

e

$$\text{sen}(a + b) = \frac{\text{sen}.a \cos.a + \cos.a \text{sen}.b}{r}$$

e se $r = 1$

$$(C) \quad \text{sen}(a + b) = \text{sen}.a \cos.b + \cos.a \text{sen}.b.$$

41. Sia (fig. 146.) l'arco $AEB = 2b$, e l'arco $ABC = 2a$; condotte le corde AB , AC , BC sarà $AB = 2\text{sen}.b$, $AC = 2\text{sen}.a$, $BC = 2\text{sen}(a - b)$. Si conduca il diametro AD , e le corde BD , CD . Essendo le corde AB , BD unite ad angolo retto in B , ed essendo $AB = 2\text{sen}.b$ sarà $BD = 2\cos.b$. Per la stessa ragione sarà $CD = 2\cos.a$. Ora il quadrila-

tero iscritto ABCD ci dà

$$AD \times BC + AB \times CD = AC \times BD ;$$

ove sostituendo i valori trovati delle corde, trasportando, e dividendo per 4 sarà

$$\text{sen}(a - b) = \frac{\text{sen}.a \cos.b - \cos.a \text{sen}.b}{r},$$

e facendo $r = 1$ sarà

$$(D) \quad \text{sen}(a - b) = \text{sen}.a \cos.b - \cos.a \text{sen}.b$$

42. Colle quattro formole (A), (B), (C), (D) partendo da un seno noto d'un dato arco si possono calcolare i seni di tutti gli archi. Se per esempio si parte dall'arco di 30° gradi, che ha per seno (§. 37.) un mezzo raggio, o un mezzo se il raggio è uno, colla formola (§. 39.) potremo trovare i seni degli angoli delle successive metà di 30 ; e colla formola (§. 38.) i seni dei successivi archi doppii di 30 : Combinando poi a due a due questi archi colla somma, e colla differenza, per mezzo delle formole (§§. 40, 41.) si potranno avere i seni di queste somme, e differenze. Calcolati i seni di tutti gli archi fra zero e 90° del quadrante, colle formole (§§. 27, 29, 30, 31.) si potranno avere tutte le rette trigonometriche.

43. Potremo dunque fare un catalogo formato di diverse colonne. Nella prima si scriveranno successivamente tutti gli archi compresi fra zero e 90° con quella più piccola differenza fra loro, che si vorrà. Nella seconda si scriveranno i corrispondenti seni, nella terza i coseni, nella quarta le tangenti, nella quinta le secanti, nella sesta le cotangenti, e nella settima le cosecanti. Questo catalogo si chiama *tavole trigonometriche*.

44. Ci ricorderemo, che i seni e coseni degli angoli sono i cateti dei triangoli interni del quadrante; che i seni

sono i cateti opposti agli angoli acuti, dei quali sono seni; ed i coseni i cateti opposti ai complementi di questi angoli.

45. Le tangenti sono i cateti opposti agli angoli acuti nella seconda serie de' triangoli fatti nel quadrante, mentre il cateto opposto agli angoli complementi di questi è il raggio. Le secanti poi sono le ipotennuse dei detti triangoli. Dopo ciò possiamo collegare in equazioni gli elementi del triangolo rettangolo, onde cogniti i sufficienti si possano trovare gli altri.

46. Poichè nel triangolo rettangolo l'angolo retto è sempre dato, onde il triangolo sia dato non si richiederanno tre elementi ma due, tra i quali sia almeno un lato, per trovare gli altri tre, o per meglio dire gli altri due, perchè dei due angoli acuti uno solo può essere incognito, essendo l'altro il suo complemento. Dopo ciò ecco i casi di combinazione di due elementi, tra i quali sia un lato nel triangolo rettangolo.

47. *Dati due lati trovare il terzo lato ed uno degli angoli acuti. Dato un lato, ed un angolo acuto, trovare gli altri due lati.*

48. Il primo caso ne comprende due, perchè o i due lati sono i due cateti, o l'uno è un cateto, e l'altro l'ipotenusa. Il secondo caso pur ne comprende due, secondochè il lato dato è un cateto, o l'ipotenusa.

49. *Siano dati due cateti MN, NR nel triangolo rettangolo MNR (fig. 147.). Per avere l'angolo R nel triangolo MNR si ricorra ad un triangolo ABO (fig. 144.), e nei detti due triangoli si faccia la proporzione $AB : MN = AO : NR$: questi due triangoli dovranno essere simili (G. §. 215.): quindi l'angolo BOA = R: dunque la nostra proporzione diventerà*

$$\text{tang. R} : MN = 1 : NR, \text{ e } \text{tang. R} = \frac{MN}{NR} :$$

50. Da questa uguaglianza ricavandosi il valore di tang.R

si cercherà nelle tavole trigonometriche, e nella prima colonna si troverà l'angolo corrispondente BOA, che sarà il valore dell'angolo R.

51. Conoscendosi R si troverà subito il complemento M. Riguardo all'ipotenusa MR, o ci serviremo del teorema $MR = \sqrt{MN^2 + NR^2}$; o potremo fare la proporzione (fig. 144, 147.) $MR : BO = NR : AO$, ossia, perchè i due triangoli BOA, MNR si sono resi con questa proporzione equiangoli (G. §. 215.), sarà

$$MR : \sec.BOA (= \sec.R) = NR : 1, \text{ onde } MR = NR \sec.R.$$

Si cercherà nelle tavole l'angolo già trovato R (§. 50.), e corrispondentemente nella quinta colonna si troverà la sua secante, che si sostituirà nella nostra equazione per trovare MR.

52. Si può fare anche la proporzione coi due triangoli (fig. 144, 147.) ISO, MNR; $IS : MN = IO : MR$, i quali triangoli essendosi resi simili con questa proporzione, potremo scrivere

$$\text{sen}.IOS(= \text{sen}.R) : MN = 1 : MR, \text{ onde } MR = \frac{MN}{\text{sen}.R}.$$

Qui ancora si cercherà nelle tavole l'angolo R, ed accanto nella seconda colonna si avrà il suo seno.

53. Si può fare anche la proporzione $SO:NR=IO:MR$; ossia per la fatta somiglianza dei triangoli

$$IOS, MNR \text{ sarà } \cos.R: NR=1 : MR, \text{ ed } MR = \frac{NR}{\cos R}.$$

54. Sia dato (§. 48.) il cateto MN, e l'ipotenusa MR si può trovare subito l'altro cateto, e l'angolo R. L'angolo R si trova coll'uguaglianza (§. 52.)

$$MR = \frac{MN}{\text{sen } R} : \text{dalla quale } \text{sen}.R = \frac{MN}{MR}.$$

Si calcolerà la frazione $\frac{MN}{MR}$, e si cercherà nella colon-

na dei seni il suo valore, l'angolo accanto nella prima colonna sarà il valore di R . L'altro cateto o si trova coll'equazione

$$NR = \sqrt{(MR^2 - MN^2)}, \text{ o coll'altra (§. 53.) } NR = MR \cos R,$$

ove R si conosce.

55. Andando al secondo caso (§. 47, 48.). Sia dato il cateto MN e l'angolo R ; perchè se fosse dato M anche R sarebbe cognito. Abbiamo la formola (§. 49.)

$$\text{tang. } R = \frac{MN}{NR} : \text{ dunque } NR = \frac{MN}{\text{tang. } R}.$$

Per l'ipotenusa si ha (§. 52.)

$$MR = \frac{MN}{\text{sen } R}.$$

56. Se è data l'ipotenusa MR ed un angolo R , abbiamo per trovare MN (§. 52.)

$$MR = \frac{MN}{\text{sen } R}, \text{ dalla quale } MN = MR \text{ sen } R.$$

Per NR dalla equazione (§. 53.) $MR = \frac{NR}{\cos R}$ ricaviamo

$$NR = MR \cos R.$$

57. Le formole le quali ci sono servite per risolvere i triangoli rettangoli sono (§. 52, 53, 49.)

$$MN = MR \text{ sen. } R, \quad NR = MR \cos. R, \quad \text{tang. } R = \frac{MN}{NR}:$$

queste sono assai di uso, quindi si traducono nelle tre proposizioni seguenti.

1.° Un cateto è uguale all'ipotenusa moltiplicata pel seno dell'angolo opposto.

2.° Un cateto è uguale all'ipotenusa moltiplicata pel coseno dell'angolo, che formano.

3.° La tangente d'un angolo acuto è uguale al cateto opposto diviso per l'altro cateto.

Sia ora il problema che forma lo scopo della trigonometria.

COLLEGATE IN FORMOLE I SEI ELEMENTI
D'UN TRIANGOLO QUALUNQUE.

58. Sia il triangolo ADC, che abbia l'angolo acuto C (fig. 148.) sarà (G. §. 255.) $AD^2 = AC^2 + DC^2 - 2AC \times DC \cos C$. Ora nel triangolo rettangolo DBC (§. 57, 2.°) abbiamo $BC = DC \cos C$, dunque

$$AD^2 = AC^2 + DC^2 - 2AC \times DC \cos C.$$

Nel triangolo ACD (fig. 149.) coll'angolo ottuso DCA abbiamo (G. §. 256.) $AD^2 = AC^2 + DC^2 + 2AC \times DC \cos DCB$: invece di CB possiamo porre $DC \cos DCB$, dunque

$$AD^2 = AC^2 + DC^2 + 2AC \times DC \cos DCB. (C)$$

59. Nel triangolo ABD (fig. 148.) abbiamo $DB = DA \sin A$ (§. 57, 1.°); e nell'altro DBC si ha $DB = DC \sin C$; dunque

$$DA \sin A = DC \sin C; \quad \frac{DA}{DC} = \frac{\sin C}{\sin A}.$$

60. Nel triangolo ADB (fig. 149.), $DB = DA \sin A$, e nel triangolo DCB, $DB = DC \sin DCB$: dunque

$$DA \sin A = DC \sin DCB; \quad \frac{DA}{DC} = \frac{\sin DCB}{\sin A}.$$

61. Si riprendano le due uguaglianze per la (fig. 148.)

$$AD^2 = AC^2 + DC^2 - 2AC \times DC \cos C, (A);$$

$$DA \sin A = DC \sin C, (B).$$

Si supponga, che DC rotando a sinistra intorno a C coincida con AC, è evidente, che deve essere $AD = \pm(AC - DC)$; ora se nell'espressione (A) sia $\cos C = 1$, ossia nel nostro caso $\cos 0^\circ = 1$ avremo

$$AD^2 = AC^2 + DC^2 - 2AC \times DC; \text{ ed } AD = \pm(AC - DC).$$

62. Se rotando la retta DC intorno a C verso dritta diventi l'angolo C retto, dovrà essere $AD^2 = AC^2 + DC^2$. Ora affinchè dia questa equazione la (A) è necessario, che sia $\cos C = \cos 90^\circ = 0$. Nel nostro caso la (B) deve dare (§. 57, 1°.) $AD \sin A = DC$: dunque $\sin 90^\circ = 1$.

63. Se proseguendo a girare la DC verso dritta l'angolo C diventa ottuso, la quantità $-2AC \times BC \cos C$ in (A) cambia di segno, ed invece dell'angolo C, o DCA (fig. 149.) si pone il suo conseguente acuto DCB, ciò si vede nella (C) (§. 58.); e con ragione perchè *le rette trigonometriche non rappresentano che gli angoli acuti.* (§. 22, 23.). Ciò non ostante i matematici per ritenere l'angolo dentro il triangolo ammettono il coseno dell'angolo ottuso DCA (figura 149.), dicendo, che è negativo, perchè è uguale al coseno negativo dell'angolo acuto DCB, che con esso fa 180° , e che si chiama suo *supplemento*. Con questo coseno ideale, che diremo *simbolico* dell'angolo ottuso, quando nel triangolo (fig. 148.) l'angolo C diventa ottuso il $\cos C$ diventa negativo, la formola (A) della (fig. 148.) diventa $AD^2 = AC^2 + CD^2 + 2AC \times CD \cos DCA$ della (fig. 149.). In tal maniera col coseno simbolico per ambedue i casi, che l'angolo C sia acuto, ed ottuso, si può stabilire una sola proposizione, che fa collegare in equazioni i sei elementi d'un triangolo, ed è

64. IN UN TRIANGOLO QUALUNQUE IL QUADRATO D'UN LATO È UGUALE ALLA SOMMA DE' QUADRATI DEGLI ALTRI DUE MENO DUE VOLTE IL PRODOTTO DI QUESTI LATI MOLTIPLICATO PEL COSENO DELL'ANGOLO CHE ESSI FANNO.

65. Se l'angolo C è acuto abbiamo (fig. 148.) (§. 59.)

$$\frac{DA}{DC} = \frac{\text{sen.}C}{\text{sen.}A} ;$$

e se è ottuso (fig. 149.) (§. 60.)

$$\frac{DA}{DC} = \frac{\text{sen.}DCB}{\text{sen.}A} .$$

Qui ancora i matematici per avere l'angolo DCA dentro il triangolo ammettono, che l'angolo ottuso abbia il seno uguale al seno dell'angolo acuto supplemento: abbiamo così un seno simbolico, che riduce ad una sola le due equazioni antecedenti cioè (fig. 148, 149.)

$$\frac{DA}{DC} = \frac{\text{sen.}DCA}{\text{sen.}A} ,$$

ossia

$$DA : DC = \text{sen.}DCA : \text{sen.}A ,$$

che dà quest' altra proposizione fondamentale di trigonometria.

66. IN UN TRIANGOLO QUALUNQUE I LATI SONO COME I SENI DEGLI ANGOLI OPPOSTI.

67. Si esprimano con A, B, C gli angoli d'un triangolo, e con a, b, c i lati opposti, le indicate proposizioni (§. 64, 65.) applicate in tutti i modi a questi lati, ed angoli daranno l'equazioni. Per la prima proposizione

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos.A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos.B \quad (M)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos.C$$

Per la seconda

$$\frac{\text{sen}.A}{a} = \frac{\text{sen}.B}{b} = \frac{\text{sen}.C}{c} \quad (N) .$$

68. Se A sia un angolo acuto il suo supplemento ottuso sarà $180^\circ - A$: dunque avremo (§. 63, 65.)

$$\cos(180^\circ - A) = -\cos A, \quad \text{sen}(180^\circ - A) = \text{sen} A :$$

le quali si esprimono dicendo, che i *coseni* di due angoli l'uno supplemento dell'altro sono uguali ma di segno contrario. I loro *seni* sono uguali. Egli è però da ricordarsi sempre , che i seni e coseni di angoli ottusi sono simboli introdotti per rendere uniformi le formole, e proposizioni dei triangoli acutangoli, ed ottusangoli , e che i valori , che rappresentano, sono le rette trigonometriche degli angoli acuti loro supplementi prese negativamente se sono coseni, e collo stesso segno se sono seni.

69. Da ciò viene, che anche le tangenti se sono di angoli supplementi l'uno dell'altro sono uguali ma di segno contrario. Infatti

$$\text{sen}(180^\circ - A) = \text{sen} A, \quad \cos(180^\circ - A) = -\cos A :$$

dunque

$$\frac{\text{sen}(180^\circ - A)}{\cos(180^\circ - A)} = -\frac{\text{sen}.A}{\cos.A} ,$$

dalla quale

$$\text{tang.}(180^\circ - A) = -\text{tang}.A .$$

Così ancora dall'equazione

$$\cos(180^\circ - A) = -\cos A$$

abbiamo

$$\frac{1}{\cos(180^\circ - A)} = -\frac{1}{\cos.A} :$$

ossia

$$\sec.(180^\circ - A) = -\sec.A.$$

Si troverà

$$\operatorname{cosec}.(180^\circ - A) = \operatorname{cosec}.A.$$

70. Se nella formola (M) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos.A$ si suppone A ottuso, e che diventi 180° è evidente, che dovrà essere $a = b + c$, perchè (fig. 149.) girando DC a dritta intorno a C fino a porsi sopra CB , AD diventa $AC + CD$: ora affinchè si abbia ciò dalla nostra equazione è necessario che sia $\cos A = \cos 180^\circ = -1$, perchè così si ha $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc$, ed estraendo la radice $a = b + c$.

71. Abbiamo dunque (§. 61, 62, 70.)

$$\cos 0^\circ = 1, \cos.90^\circ = 0, \sin.90^\circ = 1, \cos.180^\circ = -1:$$

72. Dopo ciò

$$\operatorname{tang}.90^\circ = \frac{\sin.90^\circ}{\cos.90^\circ} = \frac{1}{0}$$

espressione d'assurdità; e con ragione, perchè quando l'arco AI (fig. 144.) diventa un quadrante $AIII$ la tangente AB diventa l'indefinita AP parallela ad OH , e quindi non può mai incontrare OH ; ed intanto la tangente trigonometrica (§. 19.) deve incontrare il raggio prolungato, che passa per l'altra estremità dell'arco, onde sia una quantità.

73. Dalle due equazioni (§. 40, 41.) abbiamo

$$\sin(A + B) = \sin.A \cos.B + \cos.A \sin.B$$

$$\sin(A - B) = \sin.A \cos.B - \cos.A \sin.B$$

Ora si vede, che dalla prima $\sin(A + B)$ si passa alla seconda $\sin(A - B)$ col supporre B negativa. Se ciò si faccia anche nei secondi membri della prima equazione avremo $\cos - B$, $\sin - B$: ma affinchè si ottenga il secondo membro della seconda deve essere

$$\cos - B = \cos B, \sin - B = -\sin B.$$

Poichè queste trasformazioni in calcolo sono molto utili si ritengono, e si stabilisce, che il coseno d'un angolo o di un arco negativo è uguale al coseno del positivo; e che il seno d'un angolo, o arco negativo è uguale al seno negativo dell'arco positivo. Questi archi negativi e seni negativi sono simbolici, perchè gli archi, e le rette trigonometriche nella loro natura (§. 22, 23.) sono quantità positive.

74. Comechè siano simboliche le rette trigonometriche (§. 71, 72, 73.) da noi considerate, pur li matematici vogliono dar loro una rappresentanza geometrica, onde si ritengano in mente con più facilità. A questo fine rendono più estesa la definizione del seno. Dicono dunque, che il seno d'un arco è la normale calata da una estremità dell'arco sul diametro, che va all'altra estremità. Noi dicevamo (§. 13.) che il seno è la normale da un estremo dell'arco calata sul raggio, che va all'altro estremo. Si ritiene poi ferma la definizione del coseno, cioè, che è la parte del raggio compresa fra il centro ed il piede del seno. Dopo ciò si dice, che il seno del quadrante AH (fig. 144.) è il raggio HO, perchè cade dall'estremo H sul diametro AY, che va all'altro estremo A. Il coseno poi di AH è zero, perchè non vi è parte di raggio compresa fra il centro, ed il piede del seno. Così rappresentano in figura l'equazioni $\text{sen} 90^\circ = 1$, $\text{cos} 90^\circ = 0$ (§. 71.). Se l'arco $IA = 0$ sarà $IS = \text{sen}. 0^\circ = 0$, e $\text{cos}. 0^\circ = 1$ (§. 71.).

75. Sia l'arco AHK maggiore di 90° gradi, e perciò misuratore dell'angolo ottuso AOK; condotta la normale KQ il seno di AHK è KQ normale calata da nn estremo K dell'arco sul diametro AY, che va all'altro estremo A (§. 74.): ma $KQ = MC = \text{sen}. MA$, dunque $\text{sen}. AHK = \text{sen}. AM$, Se dunque $MA = A$, AHK sarà $180^\circ - A$, ed avremo $\text{sen}(180^\circ - A) = \text{sen}. A$, come sopra (§. 68.).

76. La OQ sarà il coseno di AHK, perchè parte del raggio compreso fra il centro, ed il piede Q del seno: avremo dunque $OQ = \text{cos}(180^\circ - A)$; ma $OQ = -CO$, perchè queste due rette partendo dal centro crescono in sensi opposti: dunque $\text{cos}(180^\circ - A) = -\text{cos}. A$. (§. 68.). Se AHK

diventi $\text{AHY} = 180^\circ$; OQ diventerà OY, ossia $-\text{OA}$, o -1 , dunque $\cos 180^\circ = -1$ (§. 70.)

77. L'arco $\text{AR} = -\text{AM}$, perchè sono opposti. Similmente $\text{CR} = -\text{MC}$: ma $\text{CR} = \text{senAR} = \text{sen} -\text{AM}$, $\text{CR} = -\text{MC} = -\text{sen.AM}$: dunque $\text{sen.} -\text{AM} = -\text{sen.AM}$. Inoltre $\text{CO} = \text{cos.AM}$; e al disotto $\text{CO} = \text{cos.AR} = \text{cos.} -\text{AM}$: dunque $\text{cos} -\text{AM} = \text{cosAM}$, come nel (§. 73.)

78. Dopo ciò dalle formole (M) deduciamo le formole per risolvere i triangoli. Risolvere i triangoli vuol dire dati i valori di tre dei loro elementi, tra i quali sia almeno un lato, trovare gli altri tre.

79. A questo fine, dalle formole (M) deduciamo le principali, che mostrano le relazioni fra loro degli angoli d'un triangolo qualunque, e degli angoli coi lati.

80. Dalla $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ abbiamo

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad 1 - \cos^2 A = \frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2}$$

ossia

$$\text{sen}^2 A = \frac{(2bc - b^2 - c^2 + a^2)(2bc + b^2 + c^2 - a^2)}{4b^2c^2} =$$

$$\frac{(a^2 - (b - c)^2)(b + c)^2 - a^2}{4b^2c^2} =$$

$$\frac{(a + b + c)(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)}{4b^2c^2}$$

e

$$\frac{\text{sen.A}}{a} = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}{2abc}.$$

Se si osserva il secondo membro si vedrà tale, che non cambia al cambiarsi d'un lato in un altro, e viceversa;



dunque sarà ancora

$$\frac{\text{sen.}B}{b} = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}{2abc};$$

perciò

$$\frac{\text{sen}A}{a} = \frac{\text{sen}B}{b} = \frac{\text{sen}C}{c};$$

cioè i lati sono come i seni degli angoli opposti (§. 66.).

81. Si sommino le due equazioni

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A; \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B,$$

e si tolgano poi le quantità comuni ai due membri, avremo

$$c = a \cos B + b \cos A.$$

Se si esprima per q il rapporto costante del seno d'un angolo al suo lato opposto avremo

$$c = q \text{ sen} C, \quad a = q \text{ sen} A, \quad b = q \text{ sen} B:$$

dunque sostituendo nell'equazione antecedente, e dividendo per q sarà

$$\text{sen.}C = \text{sen.}A \cos B + \cos A \text{ sen.}B:$$

ma nel triangolo un angolo è supplemento della somma degli altri due, perchè insieme danno 180° ; dunque (§. 68.)

$$\text{sen.}C = \text{sen}(A+B);$$

perciò

$$\text{sen}(A+B) = \text{sen}A \cos B + \cos A \text{ sen}B:$$

dunque *il seno della somma di due archi o angoli è uguale al seno del primo moltiplicato pel coseno del secondo più il coseno del primo moltiplicato pel seno del secondo.*

82. Abbiamo

$$\cos(A+B) = \sqrt{1 - \text{sen}^2(A+B)}$$

dunque

$$\begin{aligned}\cos(A+B) &= \sqrt{1 - (\operatorname{sen} A \cos B + \cos A \operatorname{sen} B)^2} = \\ &= \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 A \cos^2 B - \cos^2 A \operatorname{sen}^2 B - 2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \cos A \cos B} = \\ &= \sqrt{1 - (1 - \cos^2 A) \cos^2 B - (1 - \operatorname{sen}^2 A) \operatorname{sen}^2 B - 2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \cos A \cos B} = \\ &= \sqrt{\cos^2 A \cos^2 B + \operatorname{sen}^2 A \operatorname{sen}^2 B - 2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \cos A \cos B} = \\ &= \cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \cos(A+B) : \end{aligned}$$

dunque il coseno della somma di due angoli è uguale al prodotto dei coseni dei due angoli meno il prodotto de' loro seni.

83. Si riprendano le due equazioni

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(A+B) &= \operatorname{sen} A \cos B + \cos A \operatorname{sen} B \\ (N) \quad \cos(A+B) &= \cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B.\end{aligned}$$

Si ponga in ambedue $A-B$ invece di A avremo

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} A &= \operatorname{sen}(A-B) \cos B + \cos(A-B) \operatorname{sen} B \\ \cos A &= \cos(A-B) \cos B - \operatorname{sen}(A-B) \operatorname{sen} B.\end{aligned}$$

Trattate queste due equazioni come due equazioni di primo grado a due incognite, che sono $\operatorname{sen}(A-B)$, $\cos(A-B)$, risolvendole troveremo

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(A-B) &= \operatorname{sen} A \cos B - \cos A \operatorname{sen} B \\ (P) \quad \cos(A-B) &= \cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B,\end{aligned}$$

le quali si deducono dalle formole di $\operatorname{sen}(A+B)$, $\cos(A+B)$ cambiando il segno alla B , e ponendo invece dei simboli $\operatorname{sen}-B$, $\cos-B$ le vere quantità $-\operatorname{sen} B$, $\cos B$; lo che è

una nuova conferma di poter far uso di questi simboli.

84. Si dividano le equazioni (N) (§. 83.) avremo

$$\frac{\text{sen}(A + B)}{\cos(A + B)} = \frac{\text{sen}.A \cos.B + \cos.A \text{sen}.B}{\cos.A \cos.B - \text{sen}.A \text{sen}.B},$$

e dividendo il numeratore, e denominatore del secondo membro per $\cos.A \cos.B$, e ponendo le tangenti invece dei seni divisi per i coseni sarà

$$\text{tang}(A + B) = \frac{\text{tang}.A + \text{tang}.B}{1 - \text{tang}.A \text{tang}.B}.$$

Facendo lo stesso nell'equazioni (P) (§. 83.) sarà

$$\text{tang}(A - B) = \frac{\text{tang}.A - \text{tang}.B}{1 + \text{tang}.A \text{tang}.B},$$

che si ottiene dall'antecedente ponendo $-B$ invece di B , e $-\text{tang}.B$ in luogo di $\text{tang}.B$. Ciò conferma l'uso dei simboli $\text{sen} - B$, $\cos - B$ invece di $-\text{sen} B$, $\cos B$, perchè s'accorda col caso nostro

$$\frac{\text{sen} - B}{\cos - B} = -\frac{\text{sen} B}{\cos B} = -\text{tang}.B.$$

85. Riprendiamo l'equazioni

$$\text{sen}(A + B) = \text{sen}.A \cos.B + \cos.A \text{sen}.B$$

$$\text{sen}(A - B) = \text{sen}.A \cos.B - \cos.A \text{sen}.B;$$

da queste sommando, e sottraendo ricaveremo

$$\text{sen}(A + B) + \text{sen}(A - B) = 2\text{sen}.A \cos.B$$

$$\text{sen}(A + B) - \text{sen}(A - B) = 2\cos.A \text{sen}.B;$$

dividendo la prima per la seconda sarà

$$\frac{\operatorname{sen}(A+B) + \operatorname{sen}(A-B)}{\operatorname{sen}(A+B) - \operatorname{sen}(A-B)} = \frac{\operatorname{tang}.A}{\operatorname{tang}.B}.$$

Supponiamo $A+B=m$, $A-B=n$, sarà

$$A = \frac{m+n}{2}, \quad B = \frac{m-n}{2}:$$

dunque

$$\frac{\operatorname{sen}.m + \operatorname{sen}.n}{\operatorname{sen}.m - \operatorname{sen}.n} = \frac{\operatorname{tang}.\frac{m+n}{2}}{\operatorname{tang}.\frac{m-n}{2}}:$$

e ponendo A invece di m , e B invece di n sarà

$$\frac{\operatorname{sen}.A + \operatorname{sen}.B}{\operatorname{sen}.A - \operatorname{sen}.B} = \frac{\operatorname{tang}.\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tang}.\frac{A-B}{2}}.$$

Ora abbiamo $a:b = \operatorname{sen}.A : \operatorname{sen}.B$, dunque $a+b:b = \operatorname{sen}.A + \operatorname{sen}.B : \operatorname{sen}.B$; $a-b:b = \operatorname{sen}.A - \operatorname{sen}.B : \operatorname{sen}.B$,

dalle quali

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{sen}.A + \operatorname{sen}.B}{\operatorname{sen}.A - \operatorname{sen}.B}:$$

dunque

$$(Q) \quad \frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tang}.\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tang}.\frac{A-B}{2}}:$$

cioè in un triangolo la somma di due lati sta alla loro dif-

ferenza come la tangente della semisomma degli angoli opposti sta alla tangente della semidifferenza degli stessi angoli.

86. Nella formola $\cos(A+B) = \cos.A \cos.B - \sin.A \sin.B$ si ponga $B = A$ sarà

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = \cos^2 A - (1 - \cos^2 A) = 2\cos^2 A - 1,$$

$$\text{e} \quad \cos.A = \sqrt{\left(\frac{1 + \cos 2A}{2}\right)};$$

e ponendo $\frac{1}{2} A$ invece di A sarà

$$\cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\left(\frac{1 + \cos A}{2}\right)}.$$

Ora dall'equazione $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos.A$ abbiamo

$$\cos.A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \quad 1 + \cos.A = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc} =$$

$$\frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} = \frac{(a+b+c)(b+c-a)}{2bc};$$

dunque

$$(R) \quad \cos \frac{1}{2} A = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{bc}};$$

dunque in un triangolo il coseno della metà d'un angolo è uguale alla metà della radice della somma dei tre lati moltiplicata per la differenza fra la somma dei lati, che formano l'angolo, ed il lato opposto, diviso il prodotto pel prodotto dei lati, che formano lo stesso angolo.



SOLUZIONE DE' TRIANGOLI.



Per li triangoli rettangoli abbiamo già date le formole di soluzioni (§. 48, 49, 50.).

Per li triangoli qualunque vi sono tre casi (G. §. 59.). Sia il primo.

DATI I TRE LATI TROVARE I TRE ANGOLI.

87. Abbiamo (§. 86.) (R)

$$\cos \frac{1}{2} A = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{bc}};$$

$$\cos \frac{1}{2} B = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(a+b+c)(a+c-b)}{ac}};$$

$$\cos \frac{1}{2} C = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{ab}}.$$

DATI DUE LATI ED UN ANGOLO, TROVARE GLI ALTRI
DUE ANGOLI ED IL TERZO LATO.

88. Questo caso ne comprende due: 1.° Siano dati i lati a , b e l'angolo C compreso. Per questo abbiamo la formola (§. 85.) (Q)

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\text{tang. } \frac{1}{2} (A+B)}{\text{tang. } \frac{1}{2} (A-B)}.$$

In questa $a+b$, $a-b$ sono noti. Conoscendosi C si conoscerà $A+B$, supplemento di C , dunque colla formola antecedente potremo determinare $\frac{A-B}{2}$. Conoscendosi ora

$\frac{A+B}{2}$, ed $\frac{A-B}{2}$ sommando queste due quantità troveremo A ; e sottraendo la seconda dalla prima avremo B . Per trovare c avremo (§. 80.)

$$\frac{c}{a} = \frac{\text{sen. } C}{\text{sen. } A}.$$

89. 2.° Siano noti i lati a, b , e l'angolo B opposto al lato

b . Per trovare A avremo la formola (§. 80.) $\frac{\text{sen}.A}{\text{sen}.B} = \frac{a}{b}$.

Non sappiamo però se questo angolo sia dentro il triangolo (§. 59, 60.), o fuori, lo che accade quando l'interno supplemento sia ottuso: quindi si vede la necessità d'aggiungere alle condizioni del problema la specie di A , cioè combina col (G. §. 56.) Conoscendosi A, B conosceremo C ,

e quindi per la formola $\frac{c}{a} = \frac{\text{sen}.C}{\text{sen}.A}$ troveremo c .

DATI DUE ANGOLI ED UN LATO TROVARE GLI ALTRI
DUE LATI.

90. Il lato dato sia a , e gli angoli siano C, B ; si conoscerà anche A : dunque per trovare i due lati b, c avremo le formole

$$\frac{c}{a} = \frac{\text{sen}.C}{\text{sen}.A}, \quad \frac{b}{a} = \frac{\text{sen}.B}{\text{sen}.A}.$$

91. Le linee trigonometriche nelle tavole sono date per mezzo dei loro logaritmi: a questi sono acconcie le formole ora date per la soluzione dei triangoli essendo in esse gli elementi collegati colla moltiplicazione, divisione, ed estrazione di radice, operazioni semplificate dal calcolo logaritmico.



FORMOLE PIU' SPEDITE PER COSTRUIRE
LE TAVOLE TRIGONOMETRICHE.



92. Abbiamo in genere $\text{sen}(a + b) = \text{sen}.a \cos.b + \cos.a \text{sen}.b$, $\cos(a + b) = \cos.a \cos.b - \text{sen}.a \text{sen}.b$. Siano ora le due espressioni

$$\cos.a + \text{sen}.a\sqrt{-1}, \cos.b + \text{sen}.b\sqrt{-1}$$

da moltiplicarsi, avremo

$$(\cos.a + \text{sen}.a\sqrt{-1})(\cos.b + \text{sen}.b\sqrt{-1}) = \cos.a \cos.b - \text{sen}.a \text{sen}.b + (\text{sen}.a \cos.b + \cos.a \text{sen}.b)\sqrt{-1} = \cos(a+b) + \text{sen}(a+b)\sqrt{-1}.$$

Si moltiplichi questa equazione per $\cos.c + \text{sen}.c\sqrt{-1}$, considerando nel secondo membro la somma $a+b$ come monomio, avremo il caso antecedente di $\cos.a + \text{sen}.a\sqrt{-1}$ moltiplicato per $\cos.b + \text{sen}.b\sqrt{-1}$: dunque per analogia avremo il prodotto $\cos(a+b+c) + \text{sen}(a+b+c)\sqrt{-1}$, e questo sarà uguale a

$$(\cos.a + \text{sen}.a\sqrt{-1})(\cos.b + \text{sen}.b\sqrt{-1})(\cos.c + \text{sen}.c\sqrt{-1});$$

avremo ancora

$$(\cos.a + \text{sen}.a\sqrt{-1})(\cos.b + \text{sen}.b\sqrt{-1})(\cos.c + \text{sen}.c\sqrt{-1})(\cos.d + \text{sen}.d\sqrt{-1}) = \cos(a+b+c+d) + \text{sen}(a+b+c+d)\sqrt{-1}.$$

Supponendo ora, che tutte le lettere siano uguali ad a , e di numero n avremo

$$(\cos.a + \text{sen}.a\sqrt{-1})^n = \cos.na + \text{sen}.na\sqrt{-1},$$

$$\cos.a + \text{sen}.a\sqrt{-1} = (\cos.na + \text{sen}.na\sqrt{-1})^{\frac{1}{n}}.$$

Si ponga $\text{sen}.a = Aa^c + Ba^d$ ec., ove non si è posto termine privo di a , perchè fatto $a = 0$ il primo membro sarebbe zero, ed il secondo si ridurrebbe a questo termine: quindi gli esponenti c, d , ec. sono positivi, e suppongo crescenti cosicchè $d > c$, e così di seguito.

Essendo $\cos.a = \sqrt{1 - \text{sen}^2 a}$ sarà

$$\cos.a = (1 - (Aa^c + Ba^d \text{ ec.})^2)^{\frac{1}{2}} = (1 - A^2 a^{2c} - 2ABa^{c+d} \text{ ec.})^{\frac{1}{2}} =$$

(sviluppando col binomio) $1 - \frac{1}{2} A^2 a^{2c}.$

Per determinare c si prenda la formola (A) (§.38.) $\text{sen}^2 a = 2\text{sen}.a\sqrt{1 - \text{sen}^2 a} = 2\text{sen}.a \cos.a$, ed invece di $\text{sen}.a, \cos.a$ si pongano i loro valori $Aa^c + Ba^d + \text{ec.}$, $1 - \frac{1}{2} A^2 a^{2c} + \text{ec.}$

avremo $\text{sen}.2a = 2Aa^c + 2Ba^d + \text{ec.}$: ma essendo $\text{sen}.a = Aa^c + Ba^d + \text{ec.}$ sarà $\text{sen}.2a = 2^c Aa^c + 2^d Ba^d + \text{ec.}$: dunque $2Aa^c + 2Ba^d + \text{ec.} = 2^c Aa^c + 2^d Ba^d + \text{ec.}$ Essendo a qualunque questa equazione si deve identificare, onde $2 = 2^c$, e $c = 1$: dunque $\text{sen}.a = Aa + Ba^d \text{ ec.}$, $\cos.a = 1 - \frac{1}{2} A^2 a^2 + \text{ec.}$

Nelle espressioni ora trovate di $\text{sen}.a$, e $\cos.a$ ponendovi na invece di a avremo

$$\text{sen}.na = nAa + n^d Ba^d \text{ ec.}$$

$$\cos.na = 1 - \frac{n^2}{2} A^2 a^2 \text{ ec.} :$$

dunque

$$\cos.a + \text{sen}.a\sqrt{-1} = \left(1 + nA\sqrt{-1} - \frac{n^2}{2} Aa^2 + n^d Ba^d\sqrt{-1} \text{ ec.}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Si ponga

$$M = Aa\sqrt{-1} - \frac{n}{2} Aa^2 + n^{d-1} Ba^d\sqrt{-1} \text{ ec.}$$

e sarà

$$\begin{aligned} \cos.a + \text{sen}.a\sqrt{-1} &= (1 + nM)^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n} (nM) \\ &+ \frac{1}{n^2} \left(\frac{1-n}{2}\right) (nM)^2 \text{ ec.} + \frac{1}{n^3} \left(\frac{1-n}{2}\right) \left(\frac{1-2n}{3}\right) (nM)^3 \text{ ec.} \\ &= 1 + M + \left(\frac{1-n}{2}\right) M^2 + \left(\frac{1-n}{2}\right) \left(\frac{1-2n}{3}\right) M^3 \text{ ec.} \end{aligned}$$

La n può essere qualunque: si faccia dunque $n=0$ allora $M = aA\sqrt{-1}$, è

$$\cos.a + \text{sen}.a\sqrt{-1} = 1 + M + \frac{1}{2} M^2 + \frac{1}{2.3} M^3 + \frac{1}{2.3.4} M^4 \text{ ec.}$$

ossia

$$\begin{aligned} \cos.a + \text{sen}.a\sqrt{-1} &= 1 + Aa\sqrt{-1} - \frac{1}{2} A^2 a^2 - \frac{1}{2.3} A^3 a^3\sqrt{-1} \\ &+ \frac{1}{2.3.4} A^4 a^4 + \frac{1}{2.3.4.5} A^5 a^5\sqrt{-1} - \frac{A^6 a^6}{2.3.4.5.6} - \frac{A^7 a^7\sqrt{-1}}{2.3.4.5.6.7} \text{ ec.} \end{aligned}$$

In questa equazione le quantità reali colle reali, e l'immaginarie colle immaginarie debbono essere uguali, altrimenti, riducendo le reali in un membro, e l'immaginarie in un altro, sarebbero le reali uguali alle immaginarie, cosa assurda: dunque

$$\text{sen.}a = Aa - \frac{A^3 a^3}{2.3} + \frac{A^5 a^5}{2.3.4.5} \text{ ec.}$$

$$\text{cos.}a = 1 - \frac{A^2 a^2}{2} + \frac{A^4 a^4}{2.3.4} - \frac{A^6 a^6}{2.3.4.5.6} \text{ ec.}$$

93. Per determinare A stabiliamo due proposizioni. La prima è (G. §. 284.) che *i limiti di due quantità uguali debbono essere uguali*; perchè se fossero disuguali, cioè l'uno minore e l'altro maggiore, potendosi a questi avvicinare le due uguali quanto si vuole, avverrebbe, che una di queste non potendo giungere al suo limite minore, l'altra l'avrebbe passato per accostarsi al suo limite maggiore, e quindi non sarebbero generalmente uguali.

94. Secondo. *L'arco di circolo è minore della sua tangente, e maggiore del suo seno*. Sia l'arco FAD (fig. 150.): condotto il raggio CA al suo punto medio A si meni la corda DF , e la tangente trigonometrica AE . È evidente che essendo

$DF < FAD$, sarà $\frac{DF}{2} < \frac{FAD}{2}$, o $DB < DA$: dunque l'ar-

co è maggiore del suo seno. Abbiamo ancora $AEC > DAC$: ossia ponendo i valori $\frac{1}{2} AC \cdot AE > \frac{1}{2} DA \cdot AC$, o $AE > DA$, cioè l'arco è minore della tangente.

95. Ciò posto porremo $\frac{\text{sen.}a}{a} < \frac{\text{sen.}a}{\text{sen.}a}$, perchè il secondo denominatore è minore del primo, mentre si hanno i numeratori uguali. Sarà ancora $\frac{\text{sen.}a}{a} > \frac{\text{sen.}a}{\text{tang.}a}$, perchè al contrario il secondo denominatore è maggiore del primo. Ora

$$\frac{\text{sen.}a}{\text{sen.}a} = 1; \frac{\text{sen.}a}{\text{tang.}a} = \text{sen.}a : \frac{\text{sen.}a}{\text{cos.}a} = \text{cos.}a;$$

dunque $\frac{\text{sen.}a}{a}$ è minore di 1, ed è maggiore di $\text{cos.}a$:

ossia $\frac{\text{sen.} a}{a}$ è compreso fra $\cos. a$, ed 1. Ora impiccolendosi indefinitamente a , $\cos. a$ si accosta ad 1: dunque 1 è il limite di $\cos. a$; dunque 1 sarà il limite della quantità compresa $\frac{\text{sen.} a}{a}$. L'uguaglianza

$$\text{sen.} a = Aa - \frac{A^3 a^3}{2.3} + \frac{A^4 a^4}{2.3.4} - \frac{A^5 a^5}{2.3.4.5} \text{ ec.}$$

si divida per a , ed avremo

$$\frac{\text{sen.} a}{a} = A - \frac{A^3 a^2}{2.3} \text{ ec.}$$

Supponendo, che a indefinitamente decresca il limite di $\frac{\text{sen.} a}{a}$ è 1; il limite di $A - \frac{A^3 a^2}{2.3} \text{ ec.}$ è evidentemente A : dunque (§. 93.) $A = 1$: avremo dunque

$$\text{sen.} a = a - \frac{a^3}{2.3} + \frac{a^5}{2.3.4.5} - \frac{a^7}{2.3.4.5.6.7} \text{ ec.}$$

$$\cos. a = 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{2.3.4} - \frac{a^6}{2.3.4.5.6} \text{ ec.}$$

Che sono le serie, colle quali dati gli archi in valore del raggio si calcolano i loro seni, e coseni. Egli è dunque bene di dare la formola per valutare la circonferenza nel valore del raggio, onde poi dedurne gli archi, colli quali si trovano le rette trigonometriche. Questo calcolo riuscirà più esatto, e più spedito di quello proposto (G. §. 281, 282.) Se nella prima serie si faccia a negativa cambia tutta di segno: dunque $\text{sen.} -a = -\text{sen.} a$. La seconda serie in questa ipotesi rimane la stessa, dunque $\cos. -a = \cos. a$, prova de' simboli (§. 73.).

Per trovare ora gli archi in valore di raggio si riprenda l'equazione (§. 92.)

$$\cos. na + \text{sen.} na \sqrt{-1} = (\cos. a + \text{sen.} a \sqrt{-1})^n$$

si pongano in questa invece di $\text{sen}.na$, $\cos.na$ le serie (§.92.)

$$na + n^d Ba^d \text{ ec. ; } 1 - \frac{n^2 a^2}{2} \text{ ec.}$$

e si sviluppi il secondo membro avremo

$$(A) \quad 1 + na\sqrt{-1} + n^d Ba^d \sqrt{-1} - \frac{n^2 a^2}{2} \text{ ec.} =$$

$$\cos^na \left(1 + n \frac{\text{sen}.a}{\cos.a} \sqrt{-1} + n \left(\frac{n-1}{2} \right) \left(\frac{\text{sen}.a}{\cos.a} \sqrt{-1} \right)^2 + \text{ec.} \right).$$

Ora

$$\frac{\text{sen}.a}{\cos.a} = \text{tang}.a, \quad \cos.a = \sqrt{1 - \text{sen}^2 a};$$

dunque

$$\cos^na = (1 - \text{sen}^2 a)^{\frac{n}{2}} = 1 - \frac{n}{2} \text{sen}^2 a + a \left(\frac{n-2}{2.4} \right) \text{sen}^4 a \text{ ec.}$$

Sostituendo questi valori nell'equazione antecedente (A) si vedrà, che il secondo membro ordinato secondo le potenze di n sarà della forma $1 + nP + n^2 Q$ ec. essendo

$$P = \text{tang}.a\sqrt{-1} + \frac{1}{2} \text{tang}^2 a - \frac{1}{3} \text{tang}^3 a \sqrt{-1}$$

$$- \frac{1}{4} \text{tang}^4 a + \frac{1}{5} \text{tang}^5 a \sqrt{-1} \text{ ec.}$$

$$- \frac{1}{2} \text{sen}^2 a - \frac{1}{4} \text{sen}^4 a - \frac{1}{6} \text{sen}^6 a + \text{ec.}$$

$$Q = - \frac{1}{2} \text{tang}^2 a + \text{ec.}$$

Si tolga l'unità da ambedue i membri dell'equazione (A), il di cui secondo membro è $1 + nP + n^2 Q + \text{ec.}$ e diviso tutto per n si faccia $n = 0$, avremo $a\sqrt{-1} = P$,

ed uguagliando con $a\sqrt{-1}$, che è il primo membro, la parte immaginaria di P , e dividendo per $\sqrt{-1}$, avremo finalmente

$$(B) a = \operatorname{tang}.a - \frac{1}{3}\operatorname{tang}.^3a + \frac{1}{5}\operatorname{tang}.^5a - \frac{1}{7}\operatorname{tang}.^7a \text{ ec.}$$

serie, colla quale conoscendosi la tangente di un arco si può trovare l'arco stesso. Sia $a = 45^\circ$ sarà $\operatorname{tang}.a = 1$, dunque

$$\operatorname{arc}.45^\circ = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \text{ ec.}$$

serie *Leibniziana*.

Sia $a = 30^\circ$ sarà

$$\operatorname{sen}.30^\circ = \frac{1}{2}, \cos 30^\circ = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \operatorname{tang}.30^\circ =$$

$$\frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} :$$

quindi

$$\operatorname{arc}.30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \frac{1}{9 \cdot 3^4} - \text{ec.} \right) ;$$

serie, colle quale Lagny calcolò il valore della circonferenza con 127 decimali.

96. Se nella serie superiore (B) si suppone a negativa la serie nel secondo membro deve tutta cambiare di segno: dunque deve essere $\operatorname{tang}.-a = -\operatorname{tang}.a$, ciò che verifica il simbolo (§. 68.)

97. Conoscendosi il valore della circonferenza si potrà trovare quello d'un arco qualunque. Se sia p il valore della circonferenza, o di 360° , e si voglia quello di un arco di gradi g potremo far la proporzione $360^\circ : p :: g : x$, d'onde

$$x = \frac{pg}{360}$$

COGNIZIONE ED USO DELLE TAVOLE TRIGONOMETRICHE.



98. Mi servo delle tavole di *Callet*: in queste il raggio ha per logaritmo il 10. Nelle dette tavole si trovano i logaritmi de' seni, coseni, tangenti, e cotangenti, e queste rette in ogni pagina sono notate in capo a quattro colonne. Nell'alto di sei pagine sono notati gli stessi gradi. Così in sei pagine vi saranno gradi 30, ed in altre sei gradi 42, ed il maggior numero di gradi, che vi si trova è 44. Le pagine cominciano con due strette colonne; nella prima vi sono i successivi minuti primi per ogni numero di gradi fino a 60, e nella seconda per ogni primo sono notati i secondi da 10 in 10 fino a 60, cosicchè dalle tavole si può avere il logaritmo di una delle dette quattro rette trigonometriche di un numero di gradi non maggiore di 45 più un numero qualunque di primi, più decine di secondi; s'intende che i primi ed i secondi non siano maggiori di 60. Al termine dell'ultima pagina si hanno le quattro rette trigonometriche di gradi 45, che si formano coll'aggiungere ai gradi 44 posti in capo della pagina i 59' della prima colonna, ed i 60" della seconda.

99. Se si osservino le dette pagine nel basso sono scritti dei gradi, e nelle quattro colonne del seno, coseno, tangente, e cotangente è scritto al di sotto corrispondentemente coseno, seno, cotangente, e tangente. Ciò vuol dire, che i gradi scritti al fondo della pagina, ed i primi, ed i secondi che si leggono nelle ultime due strette colonne sono complementi dei gradi che si leggono nell'alto della pagina più i primi e secondi, che si leggono nelle strette colonne al principio venendo in giù fino alla linea dei primi e secondi, che si sono letti andando dal basso in alto nelle ultime colonne. Così si hanno le quattro rette trigonometriche per gli archi fino a 90.°

100. Dopo ciò sia il primo problema. DATO L'ARCO TROVARE IL LOGARITMO D'UNA SUA RETTA TRIGONOMETRICA.

Si voglia il logaritmo di $\text{sen.}24^{\circ}, 6', 20''$. Essendo 24° minore di 45° si cercherà nell'alto di una delle sei pagine, che gli appartengono. Nella prima colonna si scenderà fino a trovare $6'$, e nella colonna seguente si cercheranno i $20''$, accanto vi è il logaritmo domandato, cosicchè $\text{L. sen.}24^{\circ}, 6', 20'' = 9.6111059$. Si domandi $\text{L. tang.}69^{\circ}, 27', 50''$. Essendo 69° maggiore di 45° si cerchi nel basso delle pagine; poi andando in alto nell'ultima colonna si troverà $27'$, sollevandosi poi nella penultima si troverà $50''$, e il logaritmo della tangente sarà quello, che è nella colonna sotto la quale è scritto tang., ed in una retta col $50''$; avremo dunque $\text{L. tang.}69^{\circ}, 27', 50'' = 0.4264285$.

101. *Sia proposta ora una delle quattro rette trigonometriche di un arco, che non si trovi nelle tavole.*

Sia $\text{L. sen.}28^{\circ}, 56', 37''$. 8. Si troverà il logaritmo di $\text{sen.}28^{\circ}, 56', 30'' = 9.6847726$. La differenza fra questo logaritmo e il prossimamente superiore, che corrisponde a $28^{\circ}, 56', 40''$ è notata nelle tavole cioè 381: si farà dunque la proporzione $10 : 381 = 7.8 : x$, cioè se alla differenza di $10''$ corrisponde la differenza 381 di logaritmi, alla differenza $7''$, 8, qual differenza corrisponderà? Si troverà $x = 297.18$, si aggiungerà dunque 297 alle ultime cifre del log. superiore, ed avremo

$$\text{L. sen.}28^{\circ}, 56', 37'' . 8 = 9.6848023.$$

Sia $\text{L. cos.}47^{\circ}, 46', 23''$. 56. Se da 90° si tolga quest'arco, tanto sarà cercare il logaritmo del coseno proposto, che il log. di $\text{sen.}42^{\circ}, 13', 36''$. 44, che si troverà col metodo antecedente.

Per usare metodo diretto si cerchino nel basso delle pagine cominciando dal fine delle tavole andando verso sinistra li 47° , nell'ultima colonna andando di sopra si troveranno i $46'$, e più sopra nella penultima colonna i $20''$

si veda la colonna, ove è sotto notato il coseno, che è la prima, e nella linea di $20''$ si troverà il

$$\text{L.cos.}47^{\circ}, 46', 20'' = 9.8274208.$$

Il logaritmo, che corrisponde a $30''$ è 9.8273976, e differisce dal nostro di 232: quindi si farà la proporzione $10:232 = 3.56:x = 82$. I coseni (§. 25.) decrescono al crescere degli archi, dunque il logaritmo di coseno $47^{\circ}, 46', 20''$ è maggiore del logaritmo di coseno $47^{\circ}, 46', 23''$. 56: quindi si dovrà togliere l'82 dal primo logaritmo per avere il secondo: dunque

$$(a) \quad \text{L.cos.}47^{\circ}, 46', 23''.56 = 9.8274126.$$

102. Se anche nel coseno si voglia ritenere il metodo d'aggiungere il quarto proporzionale, si cercherà nelle tavole il coseno dell'arco prossimamente maggiore al proposto: quindi si troverà

$$(b) \quad \text{L.cos.}47^{\circ}, 46', 30'' = 9.8273976.$$

La differenza col prossimamente inferiore è 232: la differenza fra il nostro arco ed il notato in (b) è $6''44$: quindi si farà la proporzione $10:232 = 6.44:x$, ed $x = 149$, che si dovrà aggiungere al logarit. antecedente (b), ed avremo $\text{L.cos.}47^{\circ}, 46', 23''.56 = 9.8274125$, che combina con (a).

Andiamo ora al problema inverso dell'uso delle tavole trigonometriche.

103. DATA LA RETTA TRIGONOMETRICA TROVARE L'ARCO.

Trovate l'arco di cui il logaritmo del seno sia 9.0567650. Si cerchi nelle tavole il logaritmo prossimo inferiore, si troverà $9.0566218 = \text{L.sen. } 6^{\circ}, 32', 30''$. La differenza col logaritmo prossimamente superiore è 1836. La differenza col nostro è 1432: quindi si farà la proporzione $1836:10'' = 1432:x$, ed $x = 7''.79$: dunque avremo $9.0567650 = \text{L.sen.}6^{\circ}, 32', 37''.79$.

Sia (a) 9. 1603493 il logaritmo d'una cotangente, e si voglia l'arco. Questo logaritmo non si trova leggendo le colonne delle cotangenti da sopra in sotto andando da sinistra a dritta nella lettura delle tavole, lo cercherò dunque in quelle delle cotangenti leggendo da sotto in sopra, ed avvertendo che più si va in alto, e da dritta a sinistra più gli angoli crescendo le cotangenti decrescono (§. 25.). Cerco il logarit. della cotangente prossimamente minore ed è 9.1603083, cui appartiene l'arco di $81^{\circ}, 46', 10''$, e che differisce dal nostro di 410. La differenza dei logar. fra i quali è il nostro (a) è nelle tavole 1486 : dunque faremo la proporzione $10'' : 1486 = x : 410$, $x = 2'', 75$. Ora i gradi $81^{\circ}, 46', 10''$ appartengono ad una cotangente minore : dunque sono troppo grandi, e perciò si dovranno da essi togliere i $2''. 75$ per avere i gradi della nostra cotangente (a), che saranno $81^{\circ}, 46', 7''. 25$. Se nelle tavole si fosse preso il logaritmo della cotangente maggiore, alli gradi di questa si sarebbero dovuti aggiungere i gradi della proporzione per avere i gradi del logaritmo proposto.

RISOLUZIONE DEI TRIANGOLI COI NUMERI.

104. Le formole date per la soluzione dei triangoli suppongono il raggio uno, e quello delle tavole è l'unità seguita da 10 zeri, cosicchè il suo logaritmo è 10. Ma ciò nulla importa, perchè nelle dette equazioni le rette trigonometriche si supporranno di questo raggio r delle tavole, ed affinchè rimangano di raggio uno si divideranno per r . Quando poi sostituendovi i numeri si prenderanno i logaritmi invece di Lr si porrà 10. Se due rette trigonometriche saranno in quoto, o moltiplicheranno i due membri dell'equazione questi 10 si sopprimeranno; se saranno in un prodotto si sommeranno; e se sarà sola vi sarà un 10 negativo, che si potrà portare nell'altro membro. Dopo ciò siano i problemi.

105. In un triangolo rettangolo l'ipotenusa è metri 1785.395 ed un angolo di gradi $59^{\circ}, 37', 42''$; trovare gli altri elementi.

L'altro angolo sarà $90^{\circ} - 59^{\circ}, 37', 42'' = 30^{\circ}, 22', 18''$.
Per trovare il cateto opposto all'angolo dato avremo (§. 57. 1.°)

$$x = 1785.395 \operatorname{sen}. 59^{\circ}, 37', 42'';$$

quindi $Lx = L1785.395 + L.\operatorname{sen}. 59^{\circ}, 37', 42'' = 10.$

Ora $L1785.395 = 3.2517343$ (a)

$$L.\operatorname{sen}. 59^{\circ}, 37', 40'' = 9.9358894.$$

La differenza fra questo, ed il logaritmo superiore è 124.
Moltiplicando questo per 2 che sono i $2''$ di $42''$ e dividendo per 10 avremo 24,8: dunque

$$L.\operatorname{sen}. 59^{\circ}, 37', 42'' = 9.9358919.$$

Sommando questo con (a) sarà

$$13.1876262, \text{ ed } x = 3.1876262, \text{ ed } x = 1540^m.374.$$

Pel lato y , che coll'ipotenusa fa l'angolo $59^{\circ}, 37', 42''$ abbiamo (§. 52. 2.°) $y = 1785.395 \cos. 59^{\circ}, 37', 42''$. Il calcolo simile all'antecedente ci darà $y = 902^m.708$.

106. In un triangolo siano dati i lati $a = 9459^m.31$, $b = 8032^m.29$, $c = 8242$, 58, si vogliano i tre angoli.

Abbiamo la formola (§. 86.)

$$\cos \frac{1}{2} A = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{bc}}.$$

Nel nostro caso $a+b+c = 25734.18$, $b+c-a = 6815.56$

$$L \cos \frac{1}{2} A = 10 - L2 + \frac{1}{2} (L(a+b+c) + L(b+c-a) - Lb - Lc);$$

$$\text{ora } L(a+b+c) = 4.4105103$$

$$L(b+c-a) = 3.8335015$$

$$L(a+b+c) + L(b+c-a) = 8.2440118$$

$$Lb + Lc = 7.8209026$$

$$\hline 0.4231092$$

$$\text{dunque } L \sqrt{\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{bc}} = 0.2115546;$$

se a questo si aggiunga $10 - L2 = 9.6989700$ avremo

$$L \cos \frac{1}{2} A = 9.9105246.$$

Il logaritmo prossimo è 9.9105358, che corrisponde a gradi 35°, 31', 40". La differenza fra questi logaritmi è 112. La differenza dei logaritmi, fra i quali il nostro è compreso, è 151: dunque $\cos \frac{1}{2}A = 35^\circ, 31', 47''.42$, ed $A = 71^\circ, 3', 34''.84$. Collo stesso metodo si troverà un altro angolo.

107. Dato un punto A , dal quale si possano vedere due punti inaccessibili P, Q trovare la loro distanza.

Si misuri una base AB e sia $AB = 345.29$. Con uno strumento riguardando P si misuri l'angolo PAB , e sia $PAB = 69^\circ, 26'$. Traguardando Q sia $BAQ = 44^\circ, 31'$. Collo stesso mezzo si trovi $ABP = 48^\circ, 15', ABQ = 102^\circ, 44'$.

Nel triangolo PAB abbiamo $\frac{AP}{AB} = \frac{\text{sen.}ABP}{\text{sen.}APB}$.

Ora $APB = 180^\circ - PAB - ABP = 62^\circ, 19'$:
dunque $LAP = LAB + L.\text{sen.}ABP - L.\text{sen.}APB$. Eseguendo il calcolo si troverà $AP = 290^m.907$. Nello stesso triangolo APQ si calcolerà AQ collo stesso metodo, e si troverà $AQ = 615^m.454$. Ora nel triangolo PAQ si conoscono i due lati PA, AQ , e l'angolo $BAQ = PAB - BAQ = 44^\circ, 31'$. Si debbono ora calcolare gli angoli APQ, AQP , che esprimeremo con P , e Q , esprimendo con p e q i lati opposti. Abbiamo (§. 87.) $\frac{p+q}{p-q} = \frac{\text{tang.}\frac{1}{2}(P+Q)}{\text{tang.}\frac{1}{2}(P-Q)}$.

Ora $L.\text{tang.}\frac{1}{2}(P+Q) = 10.6421427$
 $L(p-q) = \dots = 2.5112776$
 $L(p+q) = \dots = 7.0426988$

dunque $L.\text{tang.}\frac{1}{2}(P-Q) = 10.1961191$

d'onde $\frac{1}{2}(P-Q) = 57^\circ, 31', 6''$,

ed in seguito $P = 134^\circ 40', 36''$, $Q = 19^\circ, 38', 24''$. Finalmente per calcolare PQ avremo $\text{sen.}Q : \text{sen.}PAQ = q : PQ$;

ora $Lq = 2.4637535$
 $L.\text{sen.}PAQ = 9.6368859$
 $L.\text{sen.}Q = 0.4735196$

dunque $L.PQ = 2.5741590$, e $PQ = 375^m.110$ distanza domandata.



ESERCIZI DI PROBLEMI TRIGONOMETRICI



1. *Risolvere un triangolo rettangolo conoscendo la sua ipotenusa ed il rapporto degli altri due lati. Calcolare la sua superficie.**
2. *Calcolare un triangolo rettangolo conoscendo il suo perimetro, ed il rapporto dell'ipotenusa alla somma degli altri due lati.*
3. *Risolvere un triangolo rettangolo, di cui si conosce la superficie ed il perimetro.*
4. *Risolvere un triangolo rettangolo, nel quale si conosce l'ipotenusa e la differenza degli altri due lati.*
5. *Risolvere un triangolo conoscendo i suoi angoli, e la sua superficie.*
6. *Risolvere un triangolo conoscendo un suo angolo, un lato adiacente, e la somma o la differenza degli altri due lati.*
7. *Risolvere un triangolo conoscendo un angolo, il lato opposto, e la somma o la differenza degli altri due lati.*
8. *Determinare in numeri gli angoli quando la base, i lati, e la normale sono in proporzione continua geometrica.*
9. *Conoscendo un angolo, il lato opposto, e la normale da quello su questo, determinare gli altri due angoli.*
10. *Calcolare un triangolo, nel quale si conosce un angolo, il lato opposto, ed il rettangolo degli altri due lati.*
11. *Conoscendo due lati e la differenza degli angoli opposti calcolare il triangolo.*
12. *Trovare l'area d'un quadrilatero iscrivibile per mezzo de' suoi lati. Si farà la somma delle superficie dei due triangoli, nelli quali viene diviso il quadrilatero da una diagonale, e si eliminerà dal risultamento l'angolo, che vi entra, applicando successivamente ai detti due triangoli la formola generale $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos.A$. Si troverà $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$.*

13. Calcolare la superficie di un quadrilatero, in cui si conoscono le due diagonali, e l'angolo che esse fanno.
14. Dare le formole, ed il metodo per conoscere la posizione d'un punto dal quale si possano vedere tre altri punti situati nello stesso suo piano, e noti di posizione.
15. Essendo dato il coseno d'un arco dar le formole per calcolare i coseni della sua metà, terzo, e quarto.
16. Essendo dato $\text{tang.} a$ trovare $\text{sen.} \frac{a}{2}$.
17. Essendo data la tangente d'un arco calcolare il seno di $\frac{2}{3}$ di questo arco.
18. Calcolare $\text{tang.} \frac{2}{3} a$ in $\cos a$.
19. Trovare il φ nell'equazione

$$\left(\frac{\text{sen}^3 x}{\cos^3 x} \right) \sec^2 x = \frac{4 \cos^2 x}{3} (\text{tang.}^2 x) \text{tang}^2 x$$

Troverete $x = 41^\circ, 2', 58''$ prossimamente.

20. Trovate $\cos x$ dall'equazione $\frac{\text{sen.} 3x}{\text{sen.} 2x} = r$; nella soluzione ponete $\frac{r}{2} = \cot a$, e troverete $\cos x = \frac{1}{2} \cot. \frac{1}{2} a$.

Di qui trovate il valore di x in a .

21. Dato $\text{tang.} a$ trovare $\text{sen.} a$, e $\cos a$. Dato $\sec a$ trovare $\text{tang.} a$.
22. Dare la serie in $\text{tang.} a$ di $L \left(\frac{\text{sen.} a - \cos a}{\text{sen.} a + \cos a} \right)$.
23. Cogli sviluppi di $\text{sen.} x$, $\cos x$, e^x provate l'uguaglianza
- $$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}, \quad \text{sen.} x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$
24. Estrarre la radice da $2(1 \mp \sqrt{1 - \text{sen}^2 a})$.
25. Trovate $\text{sen} \frac{1}{2} a$, $\cos \frac{1}{2} a$ dalle due equazioni
- $$\text{sen.} a = 2 \text{sen} \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} a, \quad 1 = \text{sen}^2 \frac{1}{2} a + \cos^2 \frac{1}{2} a.$$

ARITMETICA



	ERRATA	CORRIGE
Pag. lin.		
14 8	alcune delle prime cifre	alcuna delle cifre
50 12	onde in 3 libbre	onde in 32 libbre
69 20	al 5 per 100	al 6 per 100
80 32	$s + s' + s''$	$sm + s'm' + s''m''$
ivi 34	$s + s' + s''$	$sm + s'm' + s''m''$ (e così s'intenda in tutta la pagina 81)
105 14	11 scudi per 9	11 scudi per 7
106 6	per avere 19	per avere 17



ARITMETICA GENERALE



21 4	il fattore A deve	il fattore A, con cui è primo, deve
105 22	sono 78 fra uomini	sono 78 i paoli riscossi fra uomini
153 30	$bx + a,$	$bx + c$
ivi 31	$x + a,$	$x - a$
169 10	$x^2 y^2$	$x^3 y^3$
ivi	$\sqrt{(a^2+4b)}, \sqrt{(a^2+4b)^3}$	$\sqrt[4]{(a^2+4b)}, \sqrt[4]{(a^2+4b)^3}$
172 13	$+\sqrt{xy}, -\sqrt{xy}$	$+\sqrt[4]{xy}, -\sqrt[4]{xy}$
220 5 c 10	$AA'z^{a'}y^a, AA'y^{a+a'}$	$A'z^{a'}y^a, A'y^{a+a'}$



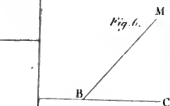
Pag. lin.

1	15	non si bada nè alla lunghezza	non si bada nè alla larg- hezza
ivi	16	non si riguarda l'e- stensione	non si riguarda la lar- ghezza
3	20	non si trovano tre punti	non si trovano tre punti consecutivi
23	8	non s' incontreranno mai	s'incontreranno
37	12	gradi 50	gradi 60
ivi	23	tutti sono doppii	tutti sono metà
79	14	(fig. 69.)	(fig. 96.)
82	18	che il rettangolo	che il quadrato
149	2	se il triangolo (fig. 139.) isoscele	se il triangolo (fig. 139.)



TAV. I.

Fig. 1.



D.

B

Fig. 12.

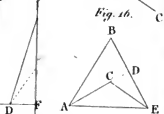


Fig. 11.

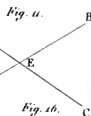


Fig. 16.

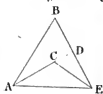
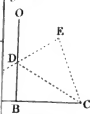


Fig. 20.





F E
Fig. 29.

I II B

O *Fig. 31.*C
H I G L CF
OP *Fig. 32.*

Q D T

B

B Q P

I A G

II

B A D

A O C

Fig. 44.



